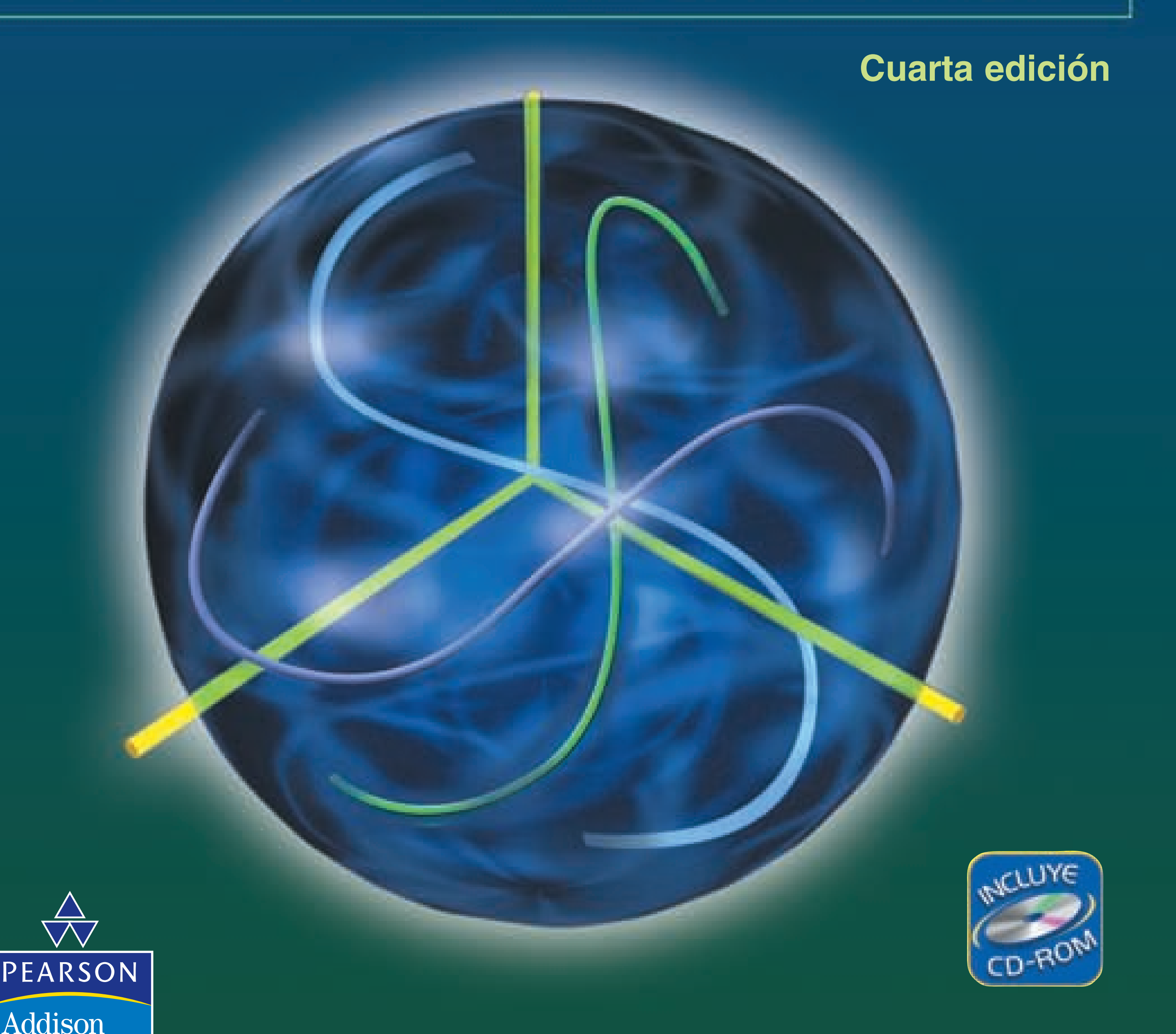
ECUACIONES DIFERENCIALES

y problemas con valores en la frontera

Cuarta edición



PEARSON
Addison Wesley

Nagle • Saff • Snider

*TABLA BREVE DE INTEGRALES**

$$\int (f(u)+g(u))\,du = \int f(u)\,du + \int g(u)\,du. \qquad \int cf(u)\,du = c\int f(u)\,du.$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1. \qquad \int \frac{du}{u} = \ln|u|.$$

$$\int e^u\,du = e^u. \qquad \int ue^u\,du = (u-1)e^u. \qquad \int u^n e^u\,du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u\,du.$$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a}, \quad a>0,\ a\neq 1. \qquad \int \ln u\,du = u\ln u - u. \qquad \int \frac{du}{u\ln u} = \ln|\ln u|.$$

$$\int u^n \ln u\,du = u^{n+1}\left(\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right), \quad n\neq -1. \qquad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}.$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|. \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|.$$

$$\int \frac{du}{(a+bu)(\alpha+\beta u)} = \frac{1}{a\beta-\alpha b}\ln\left(\frac{\alpha+\beta u}{a+bu}\right)$$

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)(\alpha+\beta u)} = \frac{1}{a\beta-\alpha b}\left[\frac{a}{b}\ln(a+bu) - \frac{\alpha}{\beta}\ln(\alpha+\beta u)\right].$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}). \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|, \quad u^2 \geq a^2.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}, \quad a^2\geq u^2. \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{u}, \quad u>a>0.$$

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u. \qquad \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u. \qquad \int \tan u\,du = -\ln|\cos u|.$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u|. \qquad \int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u|.$$

$$\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| = \ln|\csc u - \cot u|.$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u. \qquad \int \csc^2 u\,du = -\cot u. \qquad \int \sec u\tan u\,du = \sec u.$$

$$\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u. \qquad \int \cos^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u. \qquad \int \tan^2 u\,du = \tan u - u.$$

$$\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1}u\cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}u\,du.$$

$$\int \cos^n u\,du = \frac{\cos^{n-1}u\operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}u\,du.$$

**Nota:* Se debe añadir una constante arbitraria a cada fórmula.

TABLA BREVE DE INTEGRALES* (continuación)

$\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u.$ $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u\, du.$

$\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u.$ $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du.$

$\int e^{au} \operatorname{sen} nu\, du = \dfrac{e^{au}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu)}{a^2 + n^2}.$ $\int e^{au} \cos nu\, du = \dfrac{e^{au}(a \cos nu + n \operatorname{sen} nu)}{a^2 + n^2}.$

$\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = -\dfrac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2.$

$\int \cos au \cos bu\, du = \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2.$

$\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\dfrac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} - \dfrac{\cos(a-b)u}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2.$

$\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u.$ $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u.$

$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1}\, du, \quad t > 0;$ $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi};$ y $\Gamma(n+1) = n!,$ si n es un entero positivo.

ALGUNAS EXPANSIONES DE SERIES DE POTENCIA

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$ (series de Taylor)

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \tfrac{62}{2835}x^9 + \cdots$

$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{x^3}{2 \cdot 3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \cdots$

$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$ $J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(k+1)! 2^{2k+1}}$ $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+n}}{k!\Gamma(n+k+1) 2^{2k+n}}$

* *Nota:* Se debe añadir una constante arbitraria a cada fórmula.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

CUARTA EDICIÓN

R. Kent Nagle

University of South Florida

Edward B. Saff

Vanderbilt University

Arthur David Snider

University of South Florida

TRADUCCIÓN: **Óscar Alfredo Palmas Velazco**
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autonóma de México

REVISIÓN TÉCNICA: **Ernesto Filio López**
Unidad Profesional Interdisciplinaria en
Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional
Ma. Merced Arriaga Gutiérrez
Profesora del Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara
Gerardo Tole Galvis
Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
Oswaldo Rodríguez Díaz
Universidad Autónoma de Occidente
Cali, Colombia



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

NAGLE, R. KENT

Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4a. ed.

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2005

ISBN: 970-26-0592-X
Área: Universitarios

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 816

ISBN 0-321-14571-2

Edición en español
Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Jorge Bonilla Talavera
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés:
Publisher: Greg Tobin
Managing Editor: Karen Guardino
Acquisitions Editor: William Hoffman
Project Editor: Rachel S. Reeve
Production Supervisor: Cindy Cody
Marketing Manager: Pamela Laskey
Marketing Coordinator: Heather Peck
Media Producer: Lynne Blaszak
Manufacturing Buyer: Evelyn Beaton
Prepress Supervisor: Caroline Fell
Media Buyer: Ginny Michaud
Cover Designer: Barbara Atkinson
Cover Illustration: George V. Kelvin
Compositor: Nesbitt Graphics, Inc.

CUARTA EDICIÓN, 2005

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

ISBN 970-26-0592-X



Impreso en México. *Printed in Mexico*.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 08 07 06 05

Dedicado a R. Kent Nagle

Él dejó su huella no sólo en estas páginas, sino en todos aquellos que lo conocieron. Era de esa rara clase de matemáticos que podrían comunicarse con eficiencia a todos los niveles, impartiendo su amor por la materia con la misma facilidad a estudiantes de licenciatura, posgrado, bachillerato, maestros de escuelas públicas y colegas en la Universidad del Sur de Florida.

Kent vivió en paz, una paz emanada de la profundidad de su comprensión de la condición humana y la fuerza de sus ideas acerca de las instituciones familiares, religiosas y educativas. Fue investigador, autor destacado, maestro de escuela elemental cada domingo, esposo y padre dedicado a su familia.

Kent era también mi estimado amigo y compañero de ejercicio, se fue luchando por mantener el paso con sus altos ideales.

E. B. Saff

Prefacio

NUESTRO OBJETIVO

Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera está diseñado para cubrir las necesidades de un curso de uno o dos semestres de teoría básica, así como de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. Con este fin, aumentamos nuestro breve texto anterior, incluyendo capítulos relativos a problemas de valores propios y ecuaciones de Sturm-Liouville. Hemos tratado de crear un texto flexible que proporcione al instructor un amplio panorama para diseñar un temario del curso (en este prefacio damos ejemplos de tales temarios), para el énfasis del curso (teoría, metodología, aplicaciones y métodos numéricos) y para usar el software comercial.

INNOVACIONES PARA ESTA EDICIÓN

En respuesta a las solicitudes de usuarios y revisores, y en reconocimiento de los recientes desarrollos en enseñanza y aprendizaje, ofrecemos lo siguiente:

Iniciación guiada a las ecuaciones diferenciales

El capítulo 4, Ecuaciones lineales de segundo orden, se centra ahora en las ecuaciones con coeficientes constantes. Esta situación predomina en las aplicaciones. Al restringir la primera exposición al lector a una situación en que las soluciones se pueden construir fácilmente, podemos exhibir de manera explícita casi todos los aspectos de la teoría lineal. La visión general de esta teoría, que aparece en el capítulo 6 para quienes quieran aprenderla, es mucho más fácil de comprender cuando el lector ha logrado dominar los cálculos concretos en el caso de coeficientes constantes. En el capítulo 4 hemos mantenido una sección cualitativa, la cual guía al lector para especular de manera inteligente sobre el comportamiento aproximado de tipos más generales de ecuaciones (con coeficientes variables y no lineales).

Nuevo tratamiento de los coeficientes indeterminados Ahora se introduce el método de coeficientes indeterminados en la sección 4.4 para no-homogeneidades con un solo término, lo cual motiva mejor el método y simplifica el procedimiento. Los coeficientes indeterminados se revisan en la sección 4.5, donde se amplían a la suma de términos no homogéneos por medio del principio de superposición. En la guarda posterior de este texto se reproduce un bosquejo simplificado del procedimiento.

Aplicaciones tempranas a los circuitos eléctricos Las ecuaciones diferenciales que describen a circuitos RL y RC sencillos son de primer orden, de modo que esta aplicación se introduce ahora en el capítulo 3. El análisis de circuitos RLC más complejos permanece en el capítulo 5. Un nuevo proyecto al final del capítulo 3 describe el amplificador operacional ideal y muestra cómo un pequeño razonamiento físico permite a los ingenieros tratar un comportamiento no lineal sin dolor.

Nuevos proyectos de grupo Al final de los capítulos adecuados aparecen nuevos proyectos que modelan la oferta y la demanda, el crecimiento de tumores y los amplificadores operacionales (ya mencionados).

Introducción a los sistemas y al análisis del plano fase: Capítulo 5 Este capítulo ha sido reorganizado para dotar rápidamente al lector de la capacidad para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales mediante el método de eliminación. Los métodos numéricos se introducen antes de las descripciones del plano fase y los sistemas dinámicos, lo que facilita la comprensión y anima a realizar experimentos computacionales relativos a estos temas.

Ejercicios revisados Para conveniencia de los profesores, algunos de los ejercicios básicos para "construir habilidades" han sido modificados (para cambiar las respuestas anteriores obsoletas) y se ha agregado una selección de ejercicios con un grado mayor de desafío.

PRERREQUISITOS

Aunque en algunas universidades el curso de álgebra lineal es un prerrequisito para el curso de ecuaciones diferenciales, muchas escuelas (en especial las de Ingeniería) sólo usan el cálculo. Con esto en mente, hemos diseñado el texto de modo que sólo el capítulo 6 (Teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior) y el capítulo 9 (Métodos matriciales para sistemas lineales) requieran algo más que el álgebra lineal de bachillerato. Además, el capítulo 9 contiene secciones de repaso sobre matrices y vectores, así como referencias específicas para los resultados más profundos de la teoría del álgebra lineal que se utilizan en esta obra. También escribimos el capítulo 5 para dar una introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales, incluyendo los métodos de solución, análisis de plano fase, aplicaciones, procedimientos numéricos y transformaciones de Poincaré, que no requieren fundamentos de álgebra lineal.

EJEMPLOS DE TEMARIOS

Como una guía "en bruto" para el diseño de un curso en dos semestres que está relacionado con este texto, damos dos ejemplos que pueden servir para una serie de dos cursos de 15 semanas cada uno, con tres horas de clase por semana: el primero enfatiza las aplicaciones y los cálculos junto con el análisis del plano fase; el segundo está diseñado para cursos que enfatizan la teoría. Como en el texto más breve, los capítulos 1, 2 y 4 son el núcleo del curso del primer semestre. El resto de los capítulos es, en su mayor parte, independiente de lo demás. Para los estudiantes que tienen conocimientos de álgebra lineal, el instructor podría reemplazar el capítulo 7 (Transformadas de Laplace) o el capítulo 8 (Soluciones de ecuaciones diferenciales mediante series) por secciones del capítulo 9 (Métodos matriciales para sistemas lineales).

Primer semestre	Métodos, cálculos y aplicaciones	Teoría de métodos	Segundo semestre	Ambos cursos
Semana	**Secciones**	**Secciones**	**Semana**	**Secciones**
1	1.1,1.2,1.3	1.1,1.2,1.3	1	1.1, 1.2, 1.3
2	1.4, 2.2	1.4, 2.2, 2.3	2	1.4, 2.2
3	2.3, 2.4, 3.2	2.4, 2.5	3	2.3, 2.4
4	3.4, 3.5, 3.6	2.6, 3.2, 3.4	4	3.2, 3.4
5	3.7, 4.1	4.2, 4.3	5	4.2, 4.3
6	4.2, 4.3	4.4, 4.5, 4.6	6	4.4, 4.5, 4.6
7	4.4, 4.5, 4.6	4.7, 5.1, 5.2	7	4.7, 5.1, 5.2
8	4.7, 4.8, 4.9	5.3, 5.4	8	7.1, 7.2, 7.3
9	5.1, 5.2, 5.3	5.5, 6.1	9	7.4, 7.5
10	5.4, 5.5, 5.6	6.2, 6.3, 6.4	10	7.6, 7.7
11	6.1, 6.2	7.2, 7.3, 7.4	11	7.8, 8.2
12	6.3, 7.2, 7.3	7.5, 7.6	12	8.3, 8.5, 8.6
13	7.4, 7.5, 7.6	7.7, 8.1	13	10.2, 10.3
14	7.7, 8.1, 8.2	8.2, 8.3, 8.4	14	10.4, 10.5
15	8.3, 8.4	8.5, 8.6	15	10.6, 10.7

CARACTERÍSTICAS ÚNICAS DE ESTA OBRA

Organización flexible La mayor parte del material tiene una naturaleza modular que permite diversas configuraciones y énfasis en el curso (teoría, aplicaciones, técnicas o conceptos).

Uso opcional de software La disponibilidad de paquetes de cómputo como MATHCAD®, MATHEMATICA®, MATLAB® y MAPLE® proporciona una oportunidad para que el estudiante realice experimentos numéricos y enfrente aplicaciones realistas que proporcionen una mejor idea de la materia. En consecuencia, hemos insertado varios ejercicios y proyectos en todo el texto, diseñados para que el estudiante utilice el software disponible en el análisis del plano fase, el cálculo de valores propios y las soluciones numéricas de varias ecuaciones.

Elección de aplicaciones Debido a las restricciones de tiempo, es posible que en ciertos cursos no se aborden las secciones que tratan casi exclusivamente de aplicaciones (como las de los capítulos 3 y 5). Por tanto, hemos logrado que las secciones de estos capítulos sean casi completamente independientes entre sí. Para que el profesor tenga más flexibilidad, hemos incorporado varias aplicaciones en los ejercicios de las secciones teóricas. Además, hemos incluido muchos proyectos que trabajan con tales aplicaciones.

Proyectos de grupo Al final de cada capítulo aparecen los proyectos de grupo que están relacionados con el material del capítulo. Un proyecto puede implicar una aplicación más desafiante, profundizar en la teoría, o presentar temas más avanzados de ecuaciones diferenciales. Aunque estos proyectos pueden ser enfrentados por los estudiantes en forma individual, su utilización en el salón de clase ha mostrado que el trabajo en grupo le otorga una mayor dimensión a la experiencia de aprendizaje. De hecho, simula la interacción que tendrá lugar en el terreno profesional.

Ejercicios de escritura técnica La habilidad de comunicación es, por supuesto, un aspecto esencial de las actividades profesionales. Aún así, pocos textos proporcionan la oportunidad para que el lector desarrolle tal habilidad. Es por ello que hemos agregado al final de la mayor parte de los capítulos un conjunto de ejercicios de escritura técnica, claramente identificados, que invitan al estudiante a crear respuestas documentadas a preguntas que están relacionadas con los conceptos del capítulo. Al hacer esto, se pide a los estudiantes que comparen varios métodos y presenten ejemplos que apoyen su análisis.

Notas históricas En todo el texto aparecen notas históricas que se identifican con dagas (†). Estas notas al pie proporcionan por lo general el nombre de la persona que desarrolló la técnica, la fecha y el contexto de la investigación original.

Problemas de motivación La mayor parte de los capítulos inicia con el análisis de un problema de la física o la ingeniería que motiva al tema que se presenta, se incluye además la metodología.

Resumen del capítulo y problemas de repaso Todos los capítulos principales contienen un conjunto de problemas de repaso, junto con un resumen de los principales conceptos que se presentan.

Gráficos por computadora La mayor parte de las figuras del texto fueron generadas mediante una computadora. Los gráficos por computadora no sólo garantizan una mayor precisión en las ilustraciones, sino que demuestran el uso de la experimentación numérica en el estudio del comportamiento de las soluciones.

Demostraciones Aunque los estudiantes más pragmáticos podrían eludir las demostraciones, la mayoría de los profesores consideran a estas justificaciones como un ingrediente esencial en un libro de texto de ecuaciones diferenciales. Como en cualquier otro texto de este nivel, hay que omitir algunos detalles de las demostraciones. Cuando esto ocurre, señalamos el hecho y hacemos referencia a un problema en los ejercicios o a otro texto. Por conveniencia, el final de una demostración se señala mediante el símbolo ■.

Teoría lineal Hemos desarrollado la teoría de ecuaciones diferenciales lineales en forma gradual. En el capítulo 4 (Ecuaciones lineales de segundo orden) presentamos la teoría básica para las ecuaciones lineales de segundo orden y analizamos varias técnicas para resolver tales ecuaciones. Las ecuaciones de orden superior se mencionan brevemente en este capítulo. En el capítulo 6 (Teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior) se da un análisis más detallado de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Para un primer curso que enfatice los métodos de solución, basta la presentación del capítulo 4 y se puede omitir el capítulo 6.

Algoritmos numéricos Se presentan varios métodos numéricos para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales, junto con bosquejos de programas que se pueden ejecutar con facilidad en una computadora. Estos métodos se presentan de manera temprana en el texto, de modo que los maestros y los estudiantes puedan usarlos para la experimentación numérica y para enfrentar aplicaciones complejas. La mayor parte de los algoritmos analizados se implantan en el sitio en Internet para este texto.

Ejercicios Los ejercicios son abundantes, con diferentes grados de dificultad, desde los problemas rutinarios más directos, hasta los más desafiantes. Algunas preguntas teóricas más profundas, junto con aplicaciones aparecen por lo general en la parte final de los conjuntos de ejercicios. En todo el texto hemos incluido problemas y proyectos que requieren una calculadora o una computadora. Estos ejercicios se indican mediante el símbolo 💻. El software del sitio en

Internet especialmente diseñado para su uso con este texto facilita la solución de estos problemas numéricos.

Secciones opcionales Estas secciones se pueden omitir sin afectar el desarrollo lógico del material. Están señaladas con un asterisco en la tabla de contenido. Como hemos dicho, las secciones de los capítulos 3 y 5 son completamente independientes entre sí.

Transformadas de Laplace Proporcionamos un capítulo detallado sobre transformadas de Laplace (capítulo 7), pues éste es un tema recurrente para los ingenieros. Nuestro tratamiento enfatiza los términos de forzamiento discontinuo e incluye una sección sobre la función delta de Dirac.

Series de potencias Las soluciones en serie de potencias son un tema que en ciertas ocasiones causa ansiedad a los estudiantes. Es probable que esto se deba a una preparación inadecuada en el cálculo, donde el sutil tema de las series convergentes se estudia (con frecuencia) rápidamente. Nuestra solución consiste en proporcionar una introducción suave y atractiva a la teoría de soluciones en serie de potencias, con una exposición de las aproximaciones a las soluciones mediante polinomios de Taylor, posponiendo los aspectos sofisticados de la convergencia para secciones posteriores. A diferencia de muchos textos, el nuestro proporciona una amplia sección sobre el *método de Frobenius* (Sección 8.6), así como una sección sobre la determinación de una solución linealmente independiente.

Aunque hemos dedicado un espacio considerable a las soluciones mediante series de potencias, también hemos tenido cuidado en adecuarnos al profesor que sólo desea dar una introducción básica del tema. Puede lograrse una introducción al tema de solución de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias y el método de Frobenius abarcado los materiales de las secciones 8.1, 8.2, 8.3 y 8.6.

Ecuaciones diferenciales parciales Se proporciona una introducción a este tema en el capítulo 10, abarcando el método de separación de variables, series de Fourier, la ecuación del calor, la ecuación de onda y la ecuación de Laplace. Se incluyen ejemplos en dos y tres dimensiones.

Plano fase El capítulo 5 describe la forma en que puede obtenerse información cualitativa para las soluciones a sistemas de dos dimensiones con ecuaciones autónomas intratables, observando sus campos de direcciones y los puntos críticos en el plano fase. Con la ayuda del software adecuado, este punto de vista proporciona una alternativa refrescante, casi recreativa, a la metodología tradicional analítica al analizar las aplicaciones a la mecánica no lineal, las ecuaciones no lineales y la epidemiología.

Vibraciones Se proporciona una motivación para el capítulo 4, sobre ecuaciones diferenciales lineales, mediante una sección introductoria que describe el oscilador masa-resorte. Aprovechamos la familiaridad del lector con los movimientos vibratorios comunes para anticipar la exposición de los aspectos teóricos y analíticos de las ecuaciones lineales. Este modelo no sólo proporciona una base para el discurso sobre las ecuaciones con coeficientes constantes, sino que también una interpretación libre de sus características nos permite predecir el comportamiento cualitativo de las ecuaciones con coeficientes variables o no lineales.

Repaso de las ecuaciones algebraicas lineales y las matrices El capítulo sobre métodos matriciales para los sistemas lineales (capítulo 9) comienza con dos secciones introductorias (opcionales) que repasan la teoría de los sistemas algebraicos lineales y el álgebra matricial.

SUPLEMENTOS

Guía de recursos para el instructor (para la edición en inglés de esta obra)

Contiene respuestas cortas de todos los ejercicios y proyectos de grupo adicionales.
ISBN 0-321-17318-X

CD-ROM interactivo de ecuaciones diferenciales (para esta edición en español)

Por Beverly West (Universidad de Cornell), Steven Strogatz (Universidad de Cornell), Jean Marie McDill (California State Polytechnic University-San Luis Obispo), John Cantwell (Universidad de San Luis) y Hubert Hohn (Massachussetts College of Art). Versión revisada de un popular software directamente ligado al texto. Se centra en la ayuda a los estudiantes para visualizar conceptos. Se extraen aplicaciones de ingeniería, física, química y biología. Se puede utilizar en ambientes Windows o Macintosh y se incluye *gratuitamente* en cada ejemplar.

Guía del instructor basada en MAPLE (para la edición en inglés de esta obra)

Por Kenneth Pothoven (Universidad del Sur de Florida). Una colección de hojas de trabajo y proyectos de MAPLE® para ayudar a los profesores a integrar MAPLE a sus cursos. También disponible mediante nuestro sitio en Internet. ISBN 0-321-17320-1

CourseCompass

CourseCompass es una plataforma para administración de cursos en línea que combina los contenidos de Pearson Educación con la tecnología de punta de Blackboard (R). CourseCompass proporciona a los estudiantes y los profesores un punto central de acceso a los recursos multimedia disponibles para el libro de texto. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* incluye un curso precargado en CourseCompass, el cual usted puede personalizar para que se adapte mejor a su programa de clases. Para mayor información, visite nuestro sitio Web en www.coursecompass.com o contacte a su representante de ventas de Pearson Educación

AGRADECIMIENTOS

La aparición en escena de este libro implicó una actividad considerable tras bambalinas. Primero queremos agradecer a las personas que contribuyeron con nuevos proyectos (crecimiento de tumores) y ejercicios (entrega del Tecnecio) para la nueva edición: Glenn Webb (Universidad Vanderbilt) y Wilfredo Colón (Moffitt Cancer Center, Universidad del Sur de Florida). Damos una nota especial de gratitud a Alar Toomre (Massachusetts Institute of Technology), quien no sólo proporcionó dos proyectos de grupo y una amplia gama de nuevos problemas desafiantes, sino que también generó el gráfico que aparece en la página 278. Queremos agradecer a Frank Glaser (California State Polytechnic University, Pomona) por muchas de las notas históricas. También estamos en deuda con Herbert E. Rauch (Lockheed Research Laboratory) por su ayuda en la sección 3.3 sobre calentamiento y enfriamiento de edificios, el proyecto A del capítulo 3 sobre acuacultura y otros problemas de aplicación. Nuestro agradecimiento a Richard H. Elderkin (Pomona Collage), Jerrold Marsden (Universidad de California, Berkeley), T. G. Proctor (Universidad de Clemson) y Philip W. Schaefer (Universidad de Tennessee), quienes leyeron y volvieron a leer el manuscrito del texto original, haciendo numerosas sugerencias que mejoraron en gran medida este libro.

También estamos en deuda con todas las personas que revisaron el manuscrito de esta nueva edición:

Amin Boumenir, Universidad del Oeste de Georgia

Karen Clark, Colegio de Nueva Jersey

Patrick Dowling, Universidad de Miami

Sanford Geraci, Northern Virginia Community Collage

Scott Gordon, Universidad Estatal del Oeste de Georgia

Bonita Lawrence, Universidad Marshall

Richard Rubin, Universidad Internacional de Florida

Shu-Yi Tu, Universidad de Michigan, Flint

E. B. Saff, A. D. Snider

E. B. Saff, A. D. Snider

Contenido

*Denota secciones opcionales que pueden omitirse sin comprometer el flujo lógico.

CAPÍTULO 6 TEORÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR 316

CAPÍTULO 7 TRANSFORMADAS DE LAPLACE 347

CAPÍTULO 8 SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES 425

CAPÍTULO 9 MÉTODOS MATRICIALES PARA SISTEMAS LINEALES 503

CAPÍTULO 10 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES 576

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 FUNDAMENTOS

En las ciencias y la ingeniería se desarrollan modelos matemáticos para comprender mejor los fenómenos físicos. Con frecuencia, estos modelos producen una ecuación que contiene algunas derivadas de una función incógnita. Esta ecuación es una **ecuación diferencial**. Dos ejemplos de modelos que se desarrollan en cálculo son la caída libre de un cuerpo y el decaimiento de una sustancia radiactiva.

En el caso de la caída libre, un objeto se libera desde una altura determinada (por encima del nivel del suelo) y cae bajo la fuerza de la gravedad.[†] Podemos aplicar al objeto que cae la segunda ley de Newton, la cual establece que la masa de un objeto por su aceleración es igual a la fuerza total que actúa sobre él. Esto lleva a la ecuación (véase la figura 1.1)

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg \ ,$$

donde m es la masa del objeto, h es la altura sobre el suelo, d^2h/dt^2 es su aceleración, g es la aceleración gravitacional (constante) y $-mg$ es la fuerza debida a la gravedad. Ésta es una ecuación diferencial que contiene la segunda derivada de la altura desconocida h como función del tiempo.

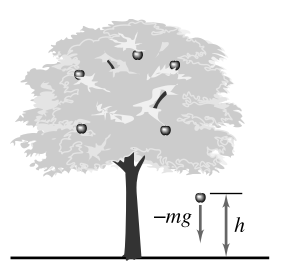


Figura 1.1 Manzana en caída libre

[†]En este caso suponemos que la gravedad es la *única* fuerza que actúa sobre el objeto, y que esta fuerza es constante. Otros modelos más generales considerarán otras fuerzas, como la resistencia del aire.

Por fortuna, es fácil resolver la ecuación anterior en términos de h. Basta dividir entre m e integrar dos veces con respecto de t. Es decir,

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g \ ,$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = -gt + c_1$$

y

$$h = h(t) = \frac{-gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \ .$$

Veremos que las constantes de integración c_1 y c_2 quedan determinadas si conocemos la altura *inicial* y la velocidad *inicial* del objeto. Así, tenemos una fórmula para la altura del objeto en el instante t.

En el caso del decaimiento radiactivo (figura 1.2), partimos de la siguiente premisa: la razón de decaimiento es proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva presente. Esto conduce a la ecuación

$$\frac{dA}{dt} = -kA \ , \qquad k > 0 \ ,$$

donde A (>0) es la cantidad desconocida de sustancia radiactiva que está presente en el instante t y k es la constante de proporcionalidad. Para resolver esta ecuación diferencial, la escribimos en la forma

$$\frac{1}{A} dA = -k\, dt$$

e integramos para obtener

$$\int \frac{1}{A} dA = \int -k\, dt$$

$$\ln A + C_1 = -kt + C_2 \ .$$

Al despejar A obtenemos

$$A = A(t) = e^{\ln A} = e^{-kt} e^{C_2 - C_1} = Ce^{-kt} \ ,$$

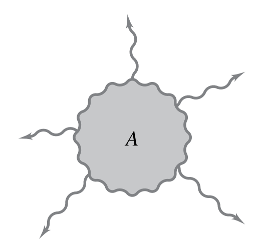


Figura 1.2 Decaimiento radiactivo

donde C es la combinación de constantes de integración $e^{C_2-C_1}$. El valor de C, como veremos más adelante, queda determinado si se tiene la cantidad *inicial* de sustancia radiactiva. Entonces tenemos una fórmula para la cantidad de sustancia radiactiva en cualquier instante futuro t.

Aunque los ejemplos anteriores se resolvieron fácilmente mediante métodos del cálculo, nos dan poca idea del estudio de las ecuaciones diferenciales en general. En primer lugar, obsérvese que la solución de una ecuación diferencial es una *función*, como $h(t)$ o $A(t)$, no sólo un número. En segundo lugar, la integración es una herramienta importante para resolver ecuaciones diferenciales (¡lo cual no es sorprendente!). En tercer lugar, no podemos esperar obtener una única solución a una ecuación diferencial pues hay unas "constantes de integración" arbitrarias. La segunda derivada d^2h/dt^2 en la ecuación de caída libre da lugar a dos constantes, c_1 y c_2 y la primera derivada en la ecuación de decaimiento da lugar, en última instancia, a una constante C.

Siempre que un modelo matemático implique la **razón de cambio** de una variable con respecto de otra, es probable que aparezca una ecuación diferencial. Por desgracia, en contraste con los ejemplos de la caída libre y el decaimiento radiactivo, la ecuación diferencial puede ser muy compleja y difícil de analizar.

Las ecuaciones diferenciales surgen en una amplia gama de áreas, no sólo en las ciencias físicas, sino también en campos tan diversos como la economía, la medicina, la psicología y la investigación de operaciones. Ahora enumeraremos unos cuantos ejemplos específicos.

1. Una aplicación clásica de las ecuaciones diferenciales aparece en el estudio de un circuito eléctrico formado por un resistor, un inductor y un capacitor que son excitados por una fuerza electromotriz (véase la figura 1.3). En este caso, al aplicar las leyes de Kirchhoff[†] obtenemos la ecuación

(1) $$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) ,$$

donde L es la inductancia, R es la resistencia, C es la capacitancia, $E(t)$ es la fuerza electromotriz, $q(t)$ es la carga en el capacitor y t es el tiempo.

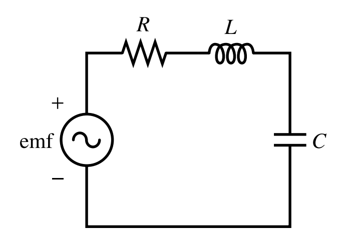


Figura 1.3 Diagrama de un circuito RLC en serie

2. En el estudio del equilibrio gravitacional de una estrella, una aplicación de la ley de gravitación de Newton y la ley de Stefan-Boltzmann para los gases conduce a la ecuación de equilibrio

(2) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi\rho G ,$$

donde P es la suma de la presión cinética del gas y la presión por radiación, r es la

[†]Analizaremos las leyes de Kirchhoff en la sección 3.5.

distancia desde el centro de la estrella, ρ es la densidad de la materia y *G* es la constante de gravitación.

3. En psicología, un modelo del aprendizaje de una tarea implica la ecuación

(3) $$\frac{dy/dt}{y^{3/2}(1-y)^{3/2}} = \frac{2p}{\sqrt{n}} .$$

En este caso, la variable *y* representa el nivel de habilidad del estudiante como función del tiempo *t*. Las constantes *p* y *n* dependen del individuo y la naturaleza de la tarea.

4. En el estudio de las cuerdas vibrantes y la propagación de ondas, encontramos la ecuación diferencial *parcial*

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 ,^{\dagger}$$

donde *t* representa el tiempo, *x* la posición a lo largo de la cuerda, *c* la rapidez de la onda y *u* el desplazamiento de la cuerda, *que es una función del tiempo y la posición*.

Para comenzar nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales necesitamos cierta terminología común. Si una ecuación implica la derivada de una variable con respecto de otra, entonces la primera se llama una **variable dependiente** y la segunda una **variable independiente**. Así, en la ecuación

(5) $$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0 ,$$

t es la variable independiente y *x* es la variable dependiente. Nos referimos a *a* y *k* como **coeficientes** en la ecuación (5). En la ecuación

(6) $$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y ,$$

x y *y* son variables independientes y *u* es una variable dependiente.

Una ecuación diferencial que sólo implica derivadas ordinarias con respecto de una sola variable independiente es una **ecuación diferencial ordinaria**. Una ecuación diferencial que implica derivadas parciales con respecto de más de una variable independiente es una **ecuación diferencial parcial**. La ecuación (5) es una ecuación diferencial ordinaria y la ecuación (6) es una ecuación diferencial parcial.

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de las derivadas de orden máximo que aparecen en la ecuación. La ecuación (5) es una ecuación de segundo orden, pues d^2x/dt^2 es la derivada de máximo orden que aparece en la ecuación. La ecuación (6) es una ecuación de primer orden, pues sólo contiene derivadas parciales de primer orden.

Será útil clasificar las ecuaciones diferenciales ordinarias como lineales y no lineales. Recuerde que las rectas (en dos dimensiones) y los planos (en tres dimensiones) son particularmente fáciles de visualizar, en comparación con objetos no lineales como las curvas cúbicas o las superficies cuádricas. Por ejemplo, podemos determinar todos los puntos de una recta si sólo conocemos dos de ellos. En correspondencia, las ecuaciones diferenciales *li-*

---

†***Nota histórica:*** Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) descubrió por primera vez esta ecuación diferencial parcial en 1747.

neales son más susceptibles de resolverse que las no lineales. Las ecuaciones para las rectas $ax + by = c$ y los planos $ax + by + cz = d$ tienen la característica de que las variables aparecen sólo en *combinaciones aditivas de sus primeras potencias*. Por analogía, una **ecuación diferencial lineal** es aquella en que la variable dependiente y y sus derivadas sólo aparecen en combinaciones aditivas de sus primeras potencias.

Una ecuación diferencial es **lineal** si tiene el siguiente formato

$$\textbf{(7)} \qquad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x) \ ,$$

donde $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ y $F(x)$ dependen sólo de la variable independiente x. Las combinaciones aditivas pueden tener multiplicadores (coeficientes) que dependen de x, sin que haya restricciones sobre la naturaleza de esta dependencia de x. Si una ecuación diferencial ordinaria no es lineal, entonces se conoce con el nombre de **no lineal**. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal, debido a la presencia del término y^3, mientras que

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^3$$

es lineal (a pesar del término x^3). La ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = \cos x$$

es no lineal debido al término $y\,dy/dx$.

Aunque la mayor parte de las ecuaciones que probablemente aparezcan en la práctica están en la categoría *no lineal*, un primer paso importante consiste en trabajar con las ecuaciones lineales, más sencillas (así como las rectas tangentes ayudan en la comprensión de curvas complicadas al proporcionar aproximaciones locales).

EJERCICIOS 1.1

En los problemas 1 a 12, damos una ecuación diferencial junto con el campo o área donde surge. Clasifíquelas como una ecuación diferencial ordinaria (EDO) o una ecuación diferencial parcial (EDP), proporcione el orden e indique las variables independientes y dependientes. Si la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, indique si la ecuación es lineal o no lineal.

1. $3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 9x = 2\cos 3t$

(vibraciones mecánicas, circuitos eléctricos, sismología).

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(ecuación de Hermite, mecánica cuántica, oscilador armónico).

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(2-3x)}{x(1-3y)}$

(competencia entre dos especies, ecología).

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(ecuación de Laplace, teoría de potencial, electricidad, calor, aerodinámica).

5. $\dfrac{dp}{dt} = kp(P - p)$, donde k y P son constantes

(curva logística, epidemiología, economía).

6. $\dfrac{dx}{dt} = (4 - x)(1 - x)$

(velocidad de reacción química).

7. $y\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = C$, donde C es una constante

(problema de la braquistocrona,† cálculo de variaciones).

8. $\sqrt{1 - y}\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0$

(ecuación de Kidder, flujo de un gas a través de un medio poroso).

9. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

(aerodinámica, análisis de tensión mecánica).

10. $8\dfrac{d^4y}{dx^4} = x(1 - x)$

(deflexión de vigas).

11. $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r} + kN$, donde k es una constante

(fisión nuclear).

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 0.1(1 - y^2)\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

(ecuación de van der Pol, válvula triodo).

En los problemas 13 a 16, escriba una ecuación diferencial que se ajuste a la descripción física.

13. La razón de cambio de la población p de bacterias en el instante t es proporcional a la población en el instante t.

14. La velocidad en el instante t de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta es proporcional a la cuarta potencia de su posición x.

15. La razón de cambio en la temperatura T del café en el instante t es proporcional a la diferencia entre la temperatura M del aire en el instante t y la temperatura del café en el instante t.

16. La razón de cambio de la masa A de sal en el instante t es proporcional al cuadrado de la masa de sal presente en el instante t.

17. Carrera de autos. Dos pilotos, Alison y Kevin, participan en una carrera de “arrancones”. Parten desde el reposo y luego aceleran a una razón constante. Kevin cubre la última cuarta parte de la distancia en 3 segundos, mientras que Alison cubre la última tercera parte de la distancia en 4 segundos. ¿Quién gana y por cuánto tiempo?

1.2 SOLUCIONES Y PROBLEMAS CON VALORES INICIALES

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una igualdad que relaciona la variable independiente con la n-ésima derivada de la variable dependiente (y usualmente también derivadas de orden menor). Algunos ejemplos son

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x^3 \qquad \text{(segundo orden, } x \text{ independiente, } y \text{ dependiente)}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)} - y = 0 \qquad \text{(segundo orden, } t \text{ independiente, } y \text{ dependiente)}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = xt \qquad \text{(cuarto orden, } t \text{ independiente, } x \text{ dependiente).}$$

†*Nota histórica:* En 1630, Galileo formuló el problema de la braquistocrona (βράχιστος = más corto, χρόνος = tiempo), es decir, determinar una trayectoria hacia abajo, por la cual debe caer una partícula desde un punto dado hasta otro en el menor tiempo posible. Fue propuesto de nuevo por John Bernoulli en 1696 y resuelto por éste al año siguiente.

Así, una forma general para una ecuación de orden n con x independiente, y dependiente, se puede expresar como

(1) $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \ ,$$

donde F es una función que depende de x, y, y de las derivadas de y hasta de orden n; es decir, depende de $x, y, \ldots, d^n y/dx^n$. Suponemos que la ecuación es válida para toda x en un intervalo abierto I ($a < x < b$, donde a o b pueden ser infinitos). En muchos casos, podemos despejar el término de orden máximo $d^n y/dx^n$ y escribir la ecuación (1) como

(2) $$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \ ,$$

que con frecuencia se prefiere sobre (1) por razones teóricas y de cálculo.

SOLUCIÓN EXPLÍCITA

Definición 1. Una función $\phi(x)$ tal que al sustituirla en vez de y en la ecuación (1) [o (2)] satisface la ecuación para toda x en el intervalo I es una **solución explícita** de la ecuación en I.

EJEMPLO 1 Mostrar que $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ es una solución explícita de la ecuación lineal

(3) $$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{x^2} y = 0 \ .$$

SOLUCIÓN Las funciones $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$, $\phi'(x) = 2x + x^{-2}$ y $\phi''(x) = 2 - 2x^{-3}$ están definidas para toda $x \neq 0$. Al sustituir $\phi(x)$ en vez de y en la ecuación (3) se tiene

$$(2 - 2x^{-3}) - \frac{2}{x^2}(x^2 - x^{-1}) = (2 - 2x^{-3}) - (2 - 2x^{-3}) = 0 \ .$$

Como esto es válido para cualquier $x \neq 0$, la función $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ es una solución explícita de (3) en $(-\infty, 0)$ y también en $(0, \infty)$. ■

EJEMPLO 2 Mostrar que para *cualquier* elección de las constantes c_1 y c_2, la función

$$\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

es una solución explícita de la ecuación lineal

(4) $$y'' - y' - 2y = 0 \ .$$

SOLUCIÓN Calculamos $\phi'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}$ y $\phi''(x) = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}$. Al sustituir ϕ, ϕ' y ϕ'' en vez de y, y' y y'' en la ecuación (4) se tiene

$$\begin{aligned}&(c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}) - (-c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}) - 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}) \\ &\quad = (c_1 + c_1 - 2c_1)e^{-x} + (4c_2 - 2c_2 - 2c_2)e^{2x} = 0 \ .\end{aligned}$$

Como la igualdad es válida para toda x en $(-\infty, \infty)$, entonces $\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ es una solución explícita de (4) en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2. ■

Como veremos en el capítulo 2, los métodos para resolver las ecuaciones diferenciales no siempre proporcionan una solución explícita de la ecuación. A veces tendremos que plantear una solución definida en forma implícita. Consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Mostrar que la relación

(5) $$y^2 - x^3 + 8 = 0$$

define de manera implícita una solución de la ecuación no lineal

(6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

en el intervalo $(2, \infty)$.

SOLUCIÓN Al despejar y en (5), obtenemos $y = \pm\sqrt{x^3 - 8}$. Veamos si $\phi(x) = \sqrt{x^3 - 8}$ es una solución explícita. Como $d\phi/dx = 3x^2/(2\sqrt{x^3 - 8}\,)$, tanto ϕ como $d\phi/dx$ están definidas en $(2, \infty)$. Al sustituirlas en (6) se tiene

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}} = \frac{3x^2}{2\left(\sqrt{x^3 - 8}\right)} ,$$

que es válida para toda x en $(2, \infty)$. [Usted puede verificar que $\psi(x) = -\sqrt{x^3 - 8}$ también es una solución explícita de (6)]. ■

SOLUCIÓN IMPLÍCITA

Definición 2. Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de la ecuación (1) en el intervalo I si define una o más soluciones explícitas en I.

EJEMPLO 4 Mostrar que

(7) $$x + y + e^{xy} = 0$$

es una solución implícita de la ecuación no lineal

(8) $$\left(1 + xe^{xy}\right)\frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0 .$$

SOLUCIÓN Primero observamos que no podemos despejar a y en (7) en términos de x. Sin embargo, para que se cumpla (7), observamos que cualquier cambio en x requiere un cambio en y, de modo que esperamos que la relación defina de manera implícita al menos una función $y(x)$. Esto es difícil de mostrar directamente, pero puede verificarse con rigor mediante el **teorema de la función implícita**[†] del cálculo avanzado, el cual garantiza la existencia de tal función $y(x)$ y que además es diferenciable (véase el problema 30).

[†]Véase *Vector calculus*, J. E. Marsden y A. J. Tromba, quinta edición (San Francisco: Freeman, 2004).

Una vez que sabemos que y es una función diferenciable de x, podemos usar la técnica de derivación implícita. De hecho, si en (7) derivamos con respecto de x y aplicamos las reglas del producto y de la cadena,

$$\frac{d}{dx}(x + y + e^{xy}) = 1 + \frac{dy}{dx} + e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

o

$$(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0 ,$$

que es idéntica a la ecuación diferencial (8). Así, la relación (7) es una solución implícita en algún intervalo garantizado por el teorema de la función implícita. ■

EJEMPLO 5 Verificar que para cada constante C la relación $4x^2 - y^2 = C$ es una solución implícita de

(9) $$y\frac{dy}{dx} - 4x = 0 .$$

Graficar las curvas solución para $C = 0, \pm 1, \pm 4$. (Llamamos a la colección de tales soluciones *una familia a un parámetro de soluciones*).

SOLUCIÓN Al derivar de manera implícita la ecuación $4x^2 - y^2 = C$ con respecto de x, tenemos

$$8x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 ,$$

que es equivalente a (9). En la figura 1.4 bosquejamos las soluciones implícitas para $C = 0, \pm 1, \pm 4$. Las curvas son hipérbolas con asíntotas comunes $y = \pm 2x$. Observe que las curvas solución implícitas (con C arbitrario) cubren todo el plano y no se cortan para $C \neq 0$. Para $C = 0$, la solución implícita produce las dos soluciones explícitas $y = 2x$ y $y = -2x$, ambas pasan por el origen. ■

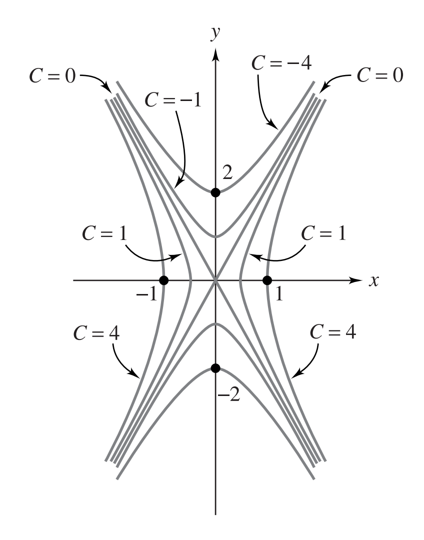


Figura 1.4 Soluciones implícitas de $4x^2 - y^2 = C$

Para abreviar, a partir de este momento usaremos el término *solución* para indicar una solución explícita o implícita.

Al inicio de la sección 1.1 vimos que la solución de la ecuación de caída libre de *segundo* orden implicaba dos constantes arbitrarias de integración c_1, c_2:

$$h(t) = \frac{-gt^2}{2} + c_1 t + c_2 ,$$

mientras que la solución de la ecuación de decaimiento radiactivo de *primer* orden contenía una sola constante C:

$$A(t) = Ce^{-kt} .$$

Es claro que al integrar la sencilla ecuación de *cuarto* orden

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

se producen cuatro constantes indeterminadas:

$$y(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 .$$

Más adelante mostraremos que, en general, los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de orden n necesitan n constantes arbitrarias. En la mayor parte de los casos, podremos evaluar estas constantes si conocemos n valores iniciales $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$.

PROBLEMAS CON VALORES INICIALES

Definición 3. Por un **problema con valores iniciales** para una ecuación diferencial de orden n

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 ,$$

se debe entender: Hallar una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que satisfaga en x_0 las n condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 ,$$

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = y_1 ,$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1} ,$$

donde $x_0 \in I$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes dadas.

En el caso de una ecuación de primer orden, las condiciones iniciales se reducen a un único requisito

$$y(x_0) = y_0 ,$$

y en el caso de una ecuación de segundo orden, las condiciones iniciales tienen la forma

$$y(x_0) = y_0 \ , \qquad \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1 \ .$$

La terminología *condiciones iniciales* proviene de la mecánica, donde la variable independiente x representa el *tiempo* y se indica como t. Si t_0 es el instante inicial, $y(t_0) = y_0$ representa la posición inicial de un objeto y $y'(t_0)/dt$ proporciona su velocidad inicial.

EJEMPLO 6 Mostrar que $\phi(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ es una solución del problema con valores iniciales

$$\textbf{(10)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ ; \qquad y(0) = -1 \ , \qquad \frac{dy}{dx}(0) = 1 \ .$$

SOLUCIÓN Observe que $\phi(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$, $d\phi/dx = \cos x + \operatorname{sen} x$, y $d^2\phi/dx^2 = -\operatorname{sen} x + \cos x$ están definidas en $(-\infty, \infty)$. Al sustituir esto en la ecuación diferencial tenemos

$$(-\operatorname{sen} x + \cos x) + (\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \ ,$$

que es válida para toda $x \in (-\infty, \infty)$. Por tanto, $\phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (10) en $(-\infty, \infty)$. Al verificar las condiciones iniciales, tenemos

$$\phi(0) = \operatorname{sen} 0 - \cos 0 = -1 \ ,$$
$$\frac{d\phi}{dx}(0) = \cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1 \ ,$$

lo que cumple los requisitos de (10). Por tanto, $\phi(x)$ es una solución del problema con valores iniciales dado. ■

EJEMPLO 7 Como se mostró en el ejemplo 2, la función $\phi(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2. Determinar c_1 y c_2 de modo que se cumplan las condiciones iniciales

$$y(0) = 2 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx}(0) = -3$$

para satisfacer.

SOLUCIÓN Para determinar las constantes c_1 y c_2, calculamos primero $d\phi/dx$ para obtener $d\phi/dx = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}$. Al sustituir en nuestras condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \phi(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = 2 \ , \\ \dfrac{d\phi}{dx}(0) = -c_1e^0 + 2c_2e^0 = -3 \ , \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \ , \\ -c_1 + 2c_2 = -3 \ . \end{cases}$$

Al sumar las dos últimas ecuaciones tenemos que $3c_2 = -1$, de modo que $c_2 = -1/3$. Como $c_1 + c_2 = 2$, tenemos que $c_1 = 7/3$. Por lo tanto, la solución del problema con valores iniciales es $\phi(x) = (7/3)e^{-x} - (1/3)e^{2x}$. ■

Ahora enunciaremos un teorema de existencia y unicidad para problemas de primer orden con valores iniciales. Suponemos que la ecuación diferencial tiene ya el formato

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ .$$

Por supuesto, el lado derecho $f(x, y)$ debe estar bien definido en el punto inicial x_0 con respecto de x y en el valor inicial dado $y_0 = y(x_0)$ con respecto de y. Además, las hipótesis del teorema piden la *continuidad* de f y $\partial f/\partial y$ para x en cierto intervalo $a < x < b$ que contenga a x_0, y para y en cierto intervalo $c < y < d$ que contenga a y_0. Observe que el conjunto de puntos en el plano xy que satisfacen $a < x < b$ y $c < y < d$ forman un *rectángulo*. La figura 1.5 muestre este "rectángulo de continuidad" con el punto inicial (x_0, y_0) en su interior y un bosquejo de la parte de la curva solución contenida en él.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Teorema 1. Dado el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) - y_0 \ ,$$

supóngase que f y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas en un rectángulo

$$R = \{(x, y)\colon a < x < b, c < y < d\}$$

que contiene al punto (x_0, y_0). Entonces el problema con valor inicial tiene una única solución $\phi(x)$ en algún intervalo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, donde δ es un número positivo.

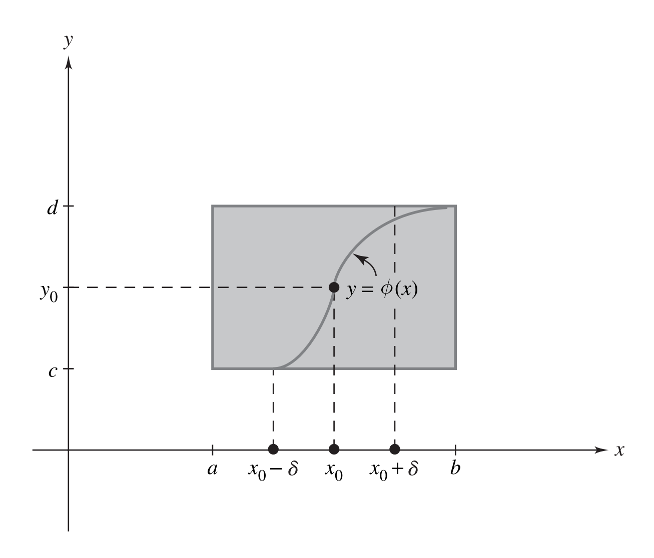


Figura 1.5 Diagrama para el teorema de existencia y unicidad

El teorema anterior nos dice dos cosas. La primera es que cuando una ecuación satisface las hipótesis del teorema 1, tenemos la seguridad de que existe una solución al problema con valor inicial. Naturalmente, es bueno saber si la ecuación que tratamos de resolver realmente tiene una solución, antes de perder mucho tiempo tratando de resolverla. La segunda es que, cuando se satisfacen las hipótesis, existe una **única** solución del problema con valor inicial. Esta unicidad nos dice que si podemos determinar una solución, entonces ésta es la *única* solución para el problema con valor inicial. Gráficamente, el teorema dice que sólo hay una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0). En otras palabras, para esta ecuación de primer orden, no puede ocurrir que se crucen dos soluciones en algún punto del rectángulo. Observe que la existencia y unicidad de la solución sólo es válida en *alguna* vecindad $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Por desgracia, el teorema no nos indica el rango (2δ) de esta vecindad (sólo que es distinto de cero). El problema 18 abunda sobre este aspecto.

El problema 19 proporciona un ejemplo de una ecuación sin solución. El problema 29 exhibe un problema con valores iniciales para el que la solución no es única. Por supuesto, en estos casos no se satisfacen las hipótesis del teorema 1.

Al utilizar problemas con valores iniciales para modelar fenómenos físicos, muchas personas presuponen que las conclusiones del teorema 1 son válidas. De hecho, para que el problema con valores iniciales sea un modelo razonable, ciertamente esperamos que tenga una solución, pues desde el punto de vista físico "algo ocurre realmente". Además, la solución debe ser única en aquellos casos en que la repetición del experimento bajo condiciones idénticas proporciona los mismos resultados.[†]

La demostración del teorema 1 implica la conversión del problema con valores iniciales en una ecuación integral y el uso del método de Picard para generar una sucesión de aproximaciones sucesivas que convergen a la solución. La conversión a una ecuación integral y el método de Picard se analizan en el proyecto B al final de este capítulo.[††]

EJEMPLO 8 Para el problema con valor inicial

(11) $$\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3 , \qquad y(1) = 6 ,$$

¿implica el teorema 1 la existencia de una solución única?

SOLUCIÓN En este caso, $f(x, y) = x^2 - xy^3$ y $\partial f/\partial y = -3xy^2$. Ambas funciones son continuas en cualquier rectángulo que contenga al punto (1, 6), de modo que se cumplen las hipótesis del teorema 1. Como consecuencia de este teorema, el problema con valor inicial (11) tiene una única solución en un intervalo con centro en $x = 1$ de la forma $(1 - \delta, 1 + \delta)$, donde δ es un número positivo. ■

EJEMPLO 9 Para el problema con valor inicial

(12) $$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} , \qquad y(2) = 0 ,$$

¿implica el teorema 1 la existencia de una solución única?

[†]Al menos esto sucede cuando consideramos un modelo determinista, en contraste con un modelo probabilístico.

[††]Todas las referencias al capítulo 11 corresponden al texto *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, cuarta edición.

SOLUCIÓN En este caso, $f(x, y) = 3y^{2/3}$ y $\partial f/\partial y = 2y^{-1/3}$. Por desgracia, $\partial f/\partial y$ no es continua, ni siquiera está cuando $y = 0$. En consecuencia, no hay un rectángulo que contenga a (2, 0) donde f y $\partial f/\partial y$ sean continuas. Como no se cumplen las hipótesis del teorema 1, no podemos usarlo para determinar si el problema con valor inicial tiene o no una solución única. Se puede ver que este problema con valor inicial *no* tiene una solución única. Los detalles aparecen en el problema 29. ■

En el ejemplo 9, suponga que la condición inicial se cambia por $y(2) = 1$. Entonces, como f y $\partial f/\partial y$ son continuas en cualquier rectángulo que contiene al punto (2, 1) pero no corta el eje x, digamos $R = \{(x, y): 0 < x < 10, 0 < y < 5\}$, el teorema 1 implica que este *nuevo* problema con valor inicial tiene una única solución en algún intervalo en torno de $x = 2$.

EJERCICIOS 1.2

1. **(a)** Muestre que $\phi(x) = 2x^3$ es una solución explícita de

$$x\frac{dy}{dx} = 3y$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

(b) Muestre que $\phi(x) = e^x - x$ es una solución explícita de

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = e^{2x} + (1 - 2x)e^x + x^2 - 1$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

(c) Muestre que $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ es una solución explícita de $x^2d^2y/dx^2 = 2y$ en el intervalo $(0, \infty)$.

2. **(a)** Muestre que $y^2 + x - 3 = 0$ es una solución implícita de $dy/dx = -1/(2y)$ en el intervalo $(-\infty, 3)$.

(b) Muestre que $xy^3 - xy^3 \operatorname{sen} x = 1$ es una solución implícita de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x\cos x + \operatorname{sen} x - 1)y}{3(x - x\operatorname{sen} x)}$$

en el intervalo $(0, \pi/2)$.

En los problemas 3 a 8, determine si la función dada es una solución de la ecuación diferencial correspondiente.

3. $y = \operatorname{sen} x + x^2$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2$.

4. $x = 3\cos t - 5\operatorname{sen} t$, $\quad x'' + x = 0$.

5. $x = \cos 2t$, $\quad \dfrac{dx}{dt} + tx = \operatorname{sen} 2t$.

6. $\theta = 2e^{3t} - e^{2t}$, $\quad \dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \theta\dfrac{d\theta}{dt} + 3\theta = -2e^{2t}$.

7. $y = e^{2x} - 3e^{-x}$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$.

8. $y = 3\operatorname{sen} 2x + e^{-x}$, $\quad y'' + 4y = 5e^{-x}$.

En los problemas 9 a 13, determine si la relación dada es una solución implícita de la ecuación diferencial correspondiente. Suponga que la relación realmente define a y de manera implícita como función de x, y utilice la derivación implícita.

9. $x^2 + y^2 = 6$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$.

10. $y - \ln y = x^2 + 1$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y - 1}$.

11. $e^{xy} + y = x - 1$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$.

12. $x^2 - \operatorname{sen}(x + y) = 1$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2x\sec(x + y) - 1$.

13. $\operatorname{sen} y + xy - x^3 = 2$,

$$y'' = \frac{6xy' + (y')^3\operatorname{sen} y - 2(y')^2}{3x^2 - y} .$$

14. Muestre que $\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ es una solución de $d^2y/dx^2 + y = 0$ para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2. Así, $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ es una familia a dos parámetros de soluciones de la ecuación diferencial.

15. Muestre que $\phi(x) = Ce^{3x} + 1$ es una solución de $dy/dx - 3y = -3$ para cualquier elección de la constante C. Así, $Ce^{3x} + 1$ es una familia a un parámetro de soluciones de la ecuación diferencial. Grafique

varias de las curvas solución usando los mismos ejes de coordenadas.

16. Verifique que $x^2 + cy^2 = 1$, donde c es una constante arbitraria distinta de cero, es una familia a un parámetro de soluciones implícitas de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

y grafique varias de las curvas solución usando los mismos ejes de coordenadas.

17. Verifique que $\phi(x) = 2/(1 - ce^x)$, donde c es una constante arbitraria, es una familia a un parámetro de soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-2)}{2} .$$

Grafique las curvas solución correspondientes a $c = 0, \pm 1, \pm 2$ usando los mismos ejes de coordenadas.

18. Si $c > 0$ entonces demuestre que la función $\phi(x) = (c^2 - x^2)^{-1}$ es una solución del problema con valor inicial $dy/dx = 2xy^2$, $y(0) = 1/c^2$ en el intervalo $-c < x < c$. Observe que esta solución no es acotada conforme x tiende a $\pm c$. Así, la solución existe en el intervalo $(-\delta, \delta)$ con $\delta = c$, pero no para una δ mayor. Esto ilustra el hecho de que en el teorema 1, el intervalo de existencia puede ser demasiado pequeño (si c es pequeño) o bastante grande (si c es grande). Observe además que la propia ecuación $dy/dx = 2xy^2$ o su valor inicial no nos dan indicios de que la solución "explota" en $x = \pm c$.

19. Muestre que la ecuación $(dy/dx)^2 + y^2 + 3 = 0$ no tiene solución (con valores reales).

20. Determine los valores de m para los que la función $\phi(x) = e^{mx}$ es una solución de la ecuación dada.

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$.

(b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$.

21. Determine los valores de m para los que la función $\phi(x) = x^m$ es una solución de la ecuación dada.

(a) $3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 11x\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$.

(b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 5y = 0$.

22. Verifique que la función $\phi(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}$ es una solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2. Determine c_1 y c_2 de modo que se satisfagan las siguientes condiciones iniciales.

(a) $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
(b) $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

En los problemas 23 a 28, determine si el teorema 1 implica que el problema con valor inicial dado tiene una solución única.

23. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 - y^3$, $\quad y(0) = 6$.

24. $\dfrac{dy}{d\theta} - \theta y = \operatorname{sen}^2\theta$, $\quad y(\pi) = 5$.

25. $x\dfrac{dx}{dt} + 4t = 0$, $\quad x(2) = -\pi$.

26. $\dfrac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1}$, $\quad y(2) = 1$.

27. $y\dfrac{dy}{dx} = x$, $\quad y(1) = 0$.

28. $\dfrac{dx}{dt} + \cos x = \operatorname{sen} t$, $\quad x(\pi) = 0$.

29. **(a)** Para el problema con valor inicial (12) del ejemplo 9, muestre que $\phi_1(x) \equiv 0$ y $\phi_2(x) = (x - 2)^3$ son soluciones. Por lo tanto, el problema con valor inicial no tiene una solución *única*.
(b) Para el problema con valor inicial $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 10^{-7}$, ¿existe una única solución en una vecindad de $x = 0$?

30. **Teorema de la función implícita.** *Sea $G(x, y)$ una función con primeras derivadas parciales continuas en el rectángulo $R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ que contiene al punto (x_0, y_0). Si $G(x_0, y_0) = 0$ y la derivada parcial $G_y(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe una función diferenciable $y = \phi(x)$, definida en cierto intervalo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ que satisface $G(x, \phi(x)) = 0$ para toda $x \in I$.*

El teorema de la función implícita proporciona condiciones bajo las cuales la relación $G(x, y) = 0$ define a y como función de x de manera implícita. Use el teorema de la función implícita para mostrar que la relación $x + y + e^{xy} = 0$, que se presenta en el

ejemplo 4, define de manera implícita a y como función de x cerca del punto $(0, -1)$.

31. Considere la ecuación del ejemplo 5,

(13) $$y\frac{dy}{dx} - 4x = 0 \ .$$

(a) ¿Implica el teorema 1 la existencia de una solución única a (13) que satisfaga $y(x_0) = 0$?

(b) Muestre que cuando $x_0 \neq 0$, la ecuación (13) no podría tener una solución en una vecindad de $x = x_0$ que satisfaga $y(x_0) = 0$.

(c) Muestre que hay dos soluciones distintas de (13) que satisfacen $y(0) = 0$ (véase la figura 1.4 de la página 9).

1.3 CAMPOS DE DIRECCIONES

Es claro que el teorema de existencia y unicidad que se analizó en la sección 1.2 tiene gran valor, pero se queda corto al no decirnos algo acerca de la *naturaleza* de la solución de una ecuación diferencial. Por razones prácticas, necesitamos saber el valor de la solución en un cierto punto, o los intervalos donde la solución sea creciente, o los puntos donde la solución alcanza un valor máximo. Ciertamente, contar con una representación explícita (una fórmula) para la solución sería de gran ayuda para responder a estas preguntas. Sin embargo, para muchas de las ecuaciones diferenciales que probablemente hallará el lector en aplicaciones "del mundo real", será imposible hallar tal fórmula. Además, aunque tuviésemos la suerte de obtener una solución implícita, sería difícil usar esta relación para determinar una forma explícita. Así, debemos basarnos en otros métodos para analizar o aproximar la solución.

Una técnica útil para visualizar (graficar) las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden consiste en bosquejar el campo de direcciones de la ecuación. Para describir este método, necesitamos una observación general: una ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

especifica una pendiente en cada punto del plano xy donde f está definida. En otras palabras, proporciona la dirección que debe tener una solución de la ecuación en cada punto. Consideremos, por ejemplo, la ecuación

(1) $$\frac{dy}{dx} = x^2 - y \ .$$

La gráfica de la solución de (1) que pasa por el punto $(-2, 1)$ debe tener pendiente $(-2)^2 - 1 = 3$ en ese punto, y una solución que pase por $(-1, 1)$ debe tener pendiente cero en ese punto.

Un bosquejo con pequeños segmentos de recta trazados en diversos puntos del plano xy para mostrar la pendiente de la curva solución en el punto correspondiente es un **campo de direcciones** de la ecuación diferencial. Como el campo de direcciones indica el "flujo de las soluciones", facilita el trazo de cualquier solución particular (como la solución de un problema con valor inicial). En la figura 1.6(a) bosquejamos el campo de direcciones de la ecuación (1) y en la figura 1.6(b) trazamos varias curvas solución con líneas grises.

En la figura 1.7 aparecen otros patrones interesantes de campos de direcciones. En la figura 1.7(a) está el patrón de la ecuación de decaimiento radiactivo $dy/dx = -2y$ (recuerde que en la sección 1.1 analizamos esta ecuación bajo la forma $dA/dt = -kA$). Los patrones del flujo muestran que todas las soluciones tienden en forma asintótica al semieje positivo de las x conforme x crece. En otras palabras, cualquier material que decaiga de acuerdo con esta ley se reduce a prácticamente nada. Esto es consistente con la fórmula solución que se dedujo con anterioridad,

$$A = Ce^{-kt} \ , \quad \text{o} \quad y = Ce^{-2x} \ .$$

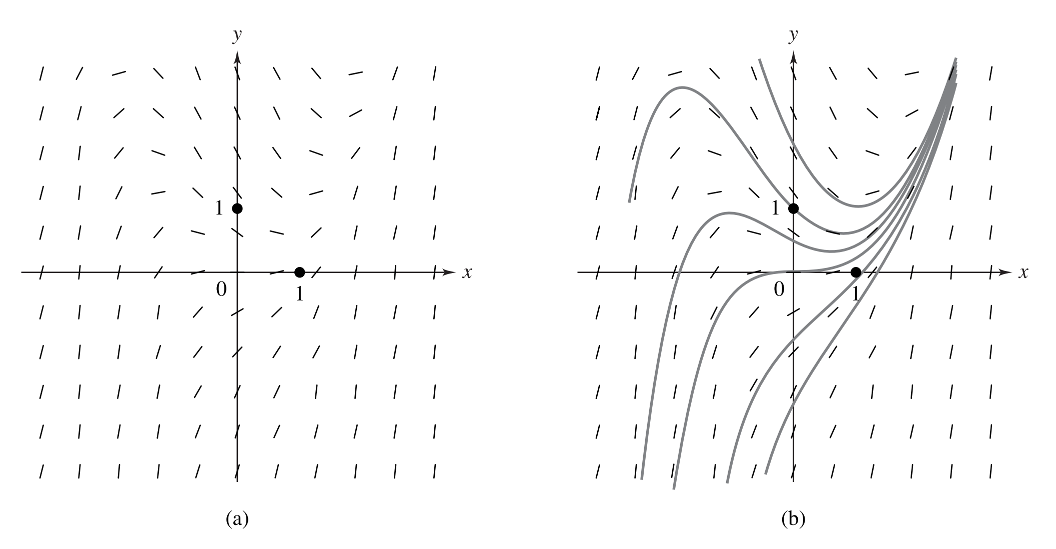


Figura 1.6 (a) Campo de direcciones de $dy/dx = x^2 - y$ (b) Soluciones de $dy/dx = x^2 - y$

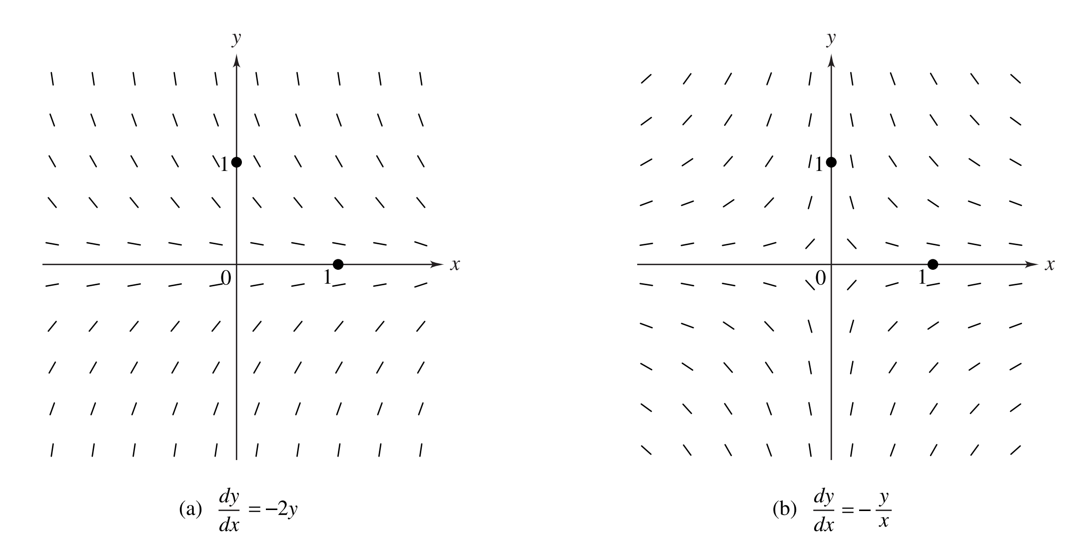


Figura 1.7 (a) Campo de direcciones de $dy/dx = -2y$ (b) Campo de direcciones de $dy/dx = -y/x$

Del campo de direcciones de la figura 1.7(b) podemos anticipar que todas las soluciones de $dy/dx = -y/x$ también tienden al eje x cuando x tiende a infinito (más o menos infinito, de hecho). Pero es más interesante la observación de que ninguna solución puede cruzar el eje y; $|y(x)|$ "explota" cuando x tiende a cero por cualquier dirección. Excepción: al analizar más de cerca, parece que la función $y(x) \equiv 0$ podría pasar por su barrera. De hecho, en el problema 19 le pedimos al lector que muestre que las soluciones de esta ecuación diferencial están dadas por $y = C/x$, con C una constante arbitraria. Así, divergen en $x = 0$, a menos que $C = 0$.

Interpretemos el teorema de existencia y unicidad de la sección 1.2 para estos campos de direcciones. Para la figura 1.7(a), donde $dy/dx = f(x, y) = -2y$, elegimos un punto de partida x_0 y un valor inicial $y(x_0) = y_0$, como en la figura 1.8(a). Como el lado derecho $f(x, y) = -2y$ es continuamente derivable para toda x y y, podemos encerrar cualquier punto inicial (x_0, y_0) en un "rectángulo de continuidad". Concluimos que la ecuación tiene una única curva solución que pasa por (x_0, y_0), como se muestra en la figura.

Para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{y}{x} .$$

el lado derecho $f(x, y) = -y/x$ no cumple las condiciones de continuidad cuando $x = 0$ (es decir, para los puntos del eje y). Sin embargo, para cualquier punto de partida x_0 *distinto de cero* y *cualquier* valor inicial $y(x_0) = y_0$, *podemos* encerrar a (x_0, y_0) en un rectángulo de continuidad que excluya al eje y, como en la figura 1.8(b). Así, podemos garantizar que una única curva solución pasa por tal punto.

El campo de direcciones para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$$

es intrigante, pues el ejemplo 9 de la sección 1.2 mostró que *no* se cumplen las hipótesis del teorema 1 en cualquier rectángulo que contenga al punto inicial $x_0 = 2$, $y_0 = 0$. De hecho, el problema 29 de esa sección demostró que se viola la unicidad, exhibiendo *dos* soluciones, $y(x) \equiv 0$ y $y(x) = (x - 2)^3$, que pasan por (2, 0). La figura 1.9(a) muestra este campo de direcciones, y la figura 1.9(b) demuestra la forma en que ambas curvas solución pueden "negociar" con éxito este patrón de flujo.

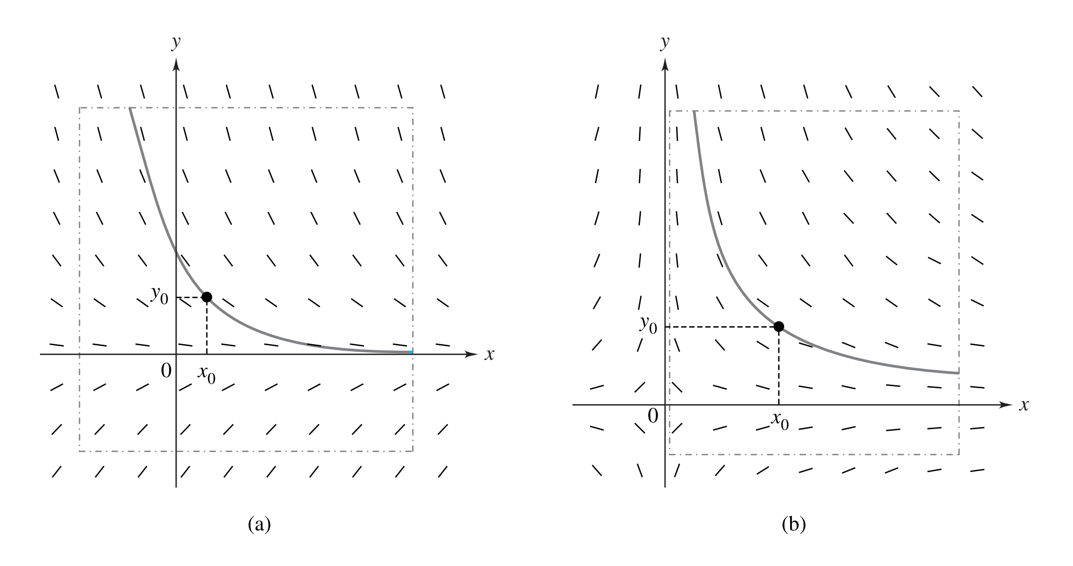


Figura 1.8 (a) Una solución para $dy/dx = -2y$ (b) Una solución para $dy/dx = -y/x$

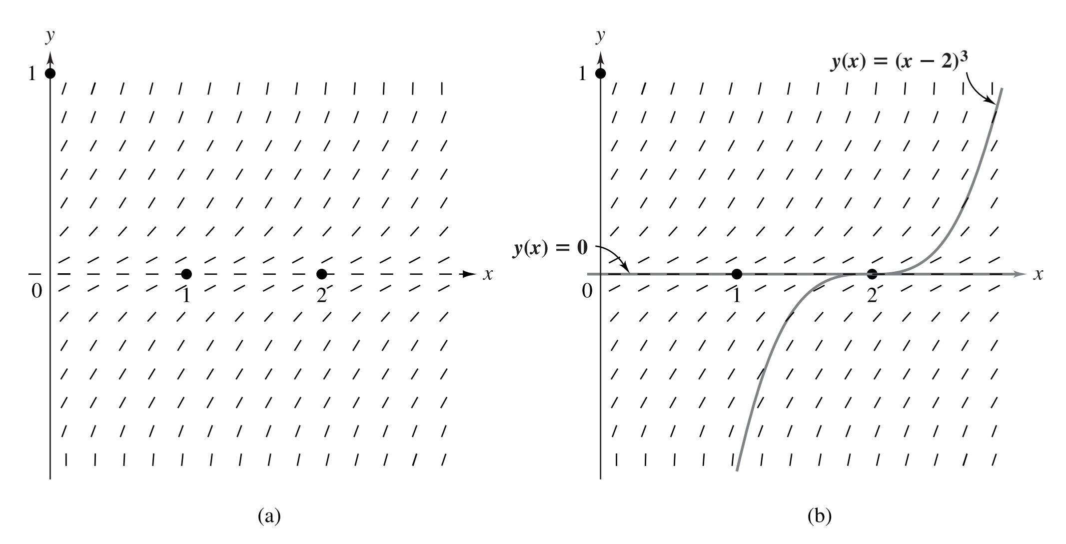


Figura 1.9 (a) Campo de direcciones de $dy/dx = 3y^{2/3}$ (b) Soluciones para $dy/dx = 3y^{2/3}$

Es claro que un bosquejo del campo de direcciones de una ecuación diferencial de primer orden puede ser útil para visualizar las soluciones. Sin embargo, este bosquejo no basta para trazar, sin ambigüedad, la curva solución que pasa por un punto inicial dado (x_0, y_0). Por ejemplo, si tratamos de trazar una de las curvas solución de la figura 1.6(b) de la página 17, podríamos "resbalar" hacia una curva adyacente. Para las situaciones sin unicidad, como en la figura 1.9(b), al negociar el flujo a lo largo de la curva $y = (x - 2)^3$ y llegar al punto de inflexión, uno no puede decidir si dar la vuelta o (literalmente) salirse por la tangente ($y = 0$).

EJEMPLO 1 La ecuación logística para la población p (en miles) de cierta especie en el instante t está dada por

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{dp}{dt} = p(2 - p) \ .$$

(Por supuesto, p es no negativa. La interpretación de los términos en la ecuación logística se analiza en la sección 3.2). Del campo de direcciones bosquejado en la figura 1.10 de la página 20, responder lo siguiente.

(a) Si la población inicial es 3000 (es decir, $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población límite $\lim_{t\to+\infty} p(t)$?

(b) ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?

(c) ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?

SOLUCIÓN **(a)** El campo de direcciones indica que todas las curvas solución [distintas de $p(t) \equiv 0$] tenderá a la recta horizontal $p = 2$ cuando $t \to +\infty$; es decir, esta recta es una asíntota para todas las soluciones positivas. Así, $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 2$.

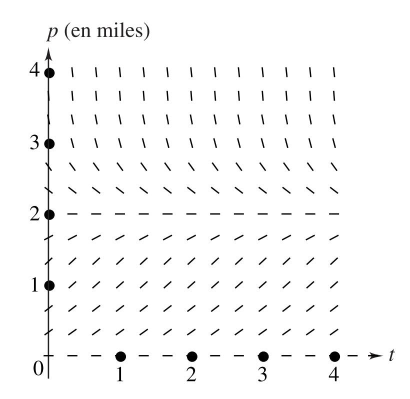


Figura 1.10 Campo de direcciones para la ecuación logística

(b) El campo de direcciones muestra además que las poblaciones mayores de 2000 decrecerán poco a poco, mientras que aquellas menores de 2000 aumentarán. En particular, una población de 1000 nunca puede disminuir hasta 500.

(c) Como se mencionó en la parte (b), una población de 1000 aumentará con el tiempo. Pero el campo de direcciones indica que nunca puede llegar a 2000 o a algún valor mayor; es decir, la curva solución nunca puede cruzar la recta $p = 2$. De hecho, la función constante $p(t) \equiv 2$ es una solución de la ecuación (2), y la parte de unicidad del teorema 1, página 12, prohíbe las intersecciones entre las curvas solución. ■

Observe que el campo de direcciones en la figura 1.10 tiene la agradable característica de que las pendientes no dependen de t; es decir, el patrón de pendientes es el mismo a lo largo de cada recta vertical. Lo mismo es cierto para las figuras 1.8(a) y 1.9. Ésta es la propiedad fundamental de las llamadas **ecuaciones autónomas** $y' = f(y)$, donde el lado derecho es una función sólo de la variable dependiente. En el Proyecto D analizaremos estas ecuaciones con mayor detalle.

El bosquejo a mano del campo de direcciones para una ecuación diferencial es con frecuencia una tarea tediosa. Por fortuna, se dispone de varios programas para esta tarea. Sin embargo, si tal bosquejo es necesario, el **método de isóclinas** puede ser útil para reducir el trabajo.

El método de isóclinas

Una isóclina para la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

es un conjunto de puntos en el plano xy donde todas las soluciones tienen la misma pendiente dy/dx; así, es una curva de nivel de la función $f(x, y)$. Por ejemplo, si

(3) $$y' = f(x, y) = x + y ,$$

las isóclinas son simplemente las curvas (líneas rectas) $x + y = c$ o $y = -x + c$. En este caso, c es una constante arbitraria. Pero c se puede interpretar como el valor numérico de la pendiente dy/dx de cada curva solución al cruzar la isóclina. (Observe que c no es la pendiente de la propia isóclina; esta pendiente es, claramente, -1). La figura 1.11(a) muestra las isóclinas de la ecuación (3).

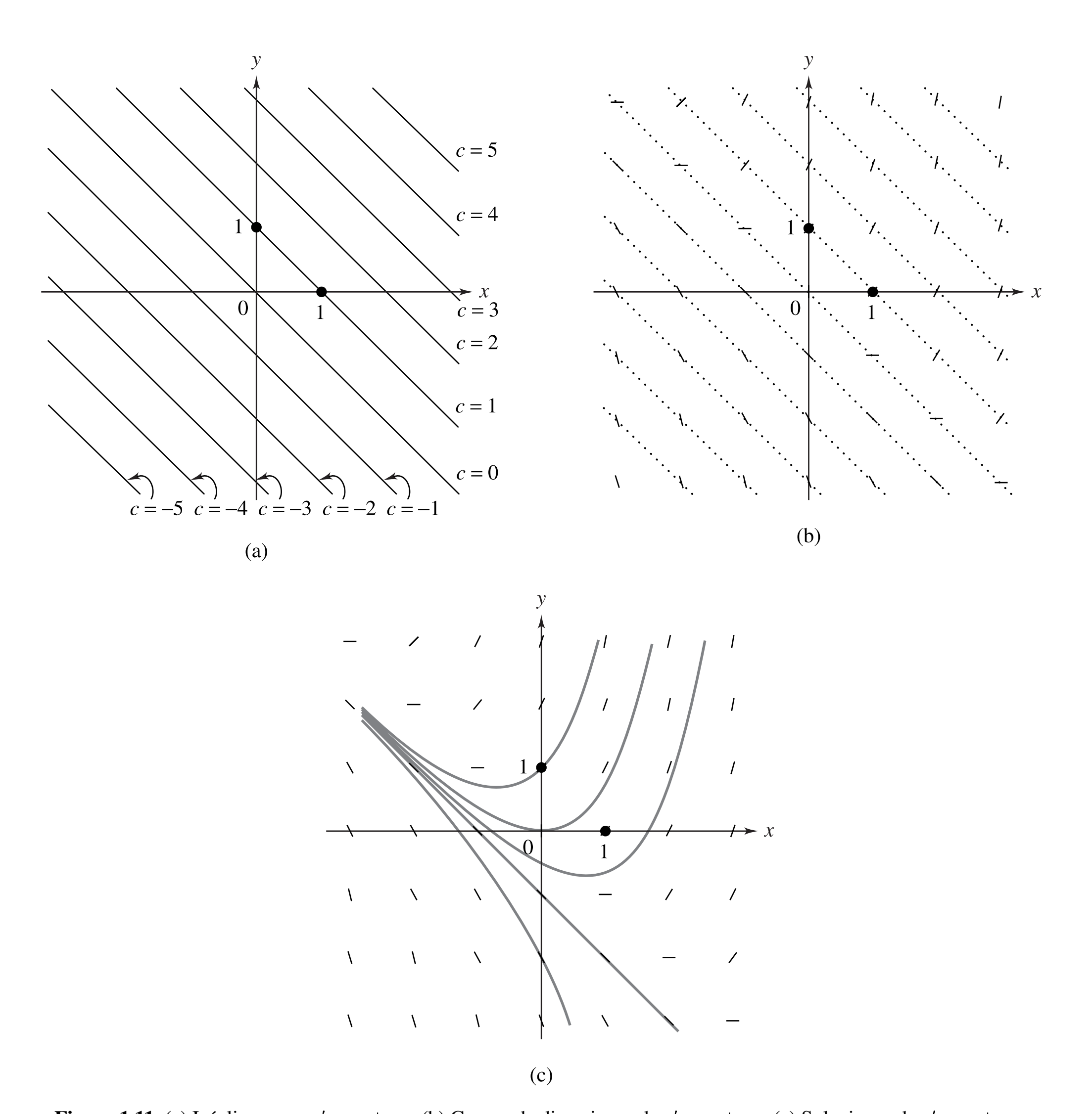


Figura 1.11 (a) Isóclinas para $y' = x + y$ (b) Campo de direcciones de $y' = x + y$ (c) Soluciones de $y' = x + y$

Para implantar el método de isóclinas y bosquejar los campos de direcciones, trazamos pequeños segmentos con pendiente c a lo largo de la isóclina $f(x, y) = c$ para unos cuantos valores de c. Si borramos las curvas isóclinas subyacentes, los segmentos constituyen una parte del campo de direcciones para la ecuación diferencial. La figura 1.11(b) muestra este proceso para las isóclinas de la figura 1.11(a), y la figura 1.11(c) despliega algunas curvas solución.

Observación. Las propias isóclinas no siempre son líneas rectas. Para la ecuación (1) al principio de esta sección (página 16), son parábolas $x^2 - y = c$. Cuando las curvas isóclinas son complejas, este método no es práctico.

EJERCICIOS 1.3

1. El campo de direcciones de $dy/dx = 4x/y$ aparece en la figura 1.12.

(a) Verifique las líneas rectas $y = \pm 2x$ son curvas solución, siempre que $x \neq 0$.

(b) Bosqueje la curva solución con condición inicial $y(0) = 2$.

(c) Bosqueje la curva solución con condición inicial $y(2) = 1$.

(d) ¿Qué puede decir acerca del comportamiento de las soluciones anteriores cuando $x \to +\infty$? ¿Y cuando $x \to -\infty$?

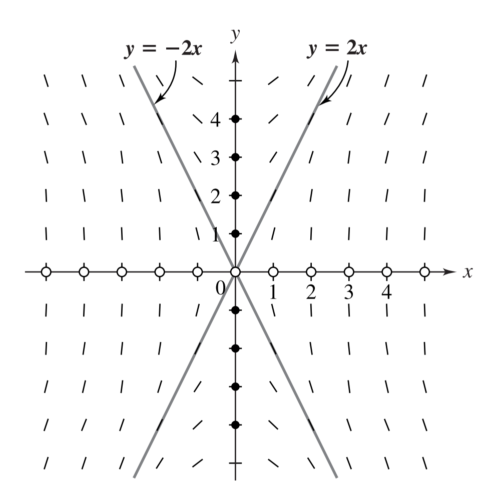


Figura 1.12 Campo de direcciones de $dy/dx = 4x/y$

2. El campo de direcciones de $dy/dx = 2x + y$ aparece en la figura 1.13.

(a) Bosqueje la curva solución que pasa por $(0, -2)$. A partir de este bosquejo, escriba la ecuación para la solución.

(b) Bosqueje la curva solución que pasa por $(-1, 3)$.

(c) ¿Qué puede decir acerca de la solución en la parte (b) cuando $x \to +\infty$? ¿Y cuando $x \to -\infty$?

3. Un modelo para la velocidad v en el instante t de cierto objeto que cae bajo la influencia de la gravedad en un medio viscoso está dado por la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = 1 - \frac{v}{8} .$$

A partir del campo de direcciones de la figura 1.14, bosqueje las soluciones con las condiciones iniciales $v(0) = 5$, 8 y 15. ¿Por qué el valor $v = 8$ se conoce como la "velocidad terminal"?

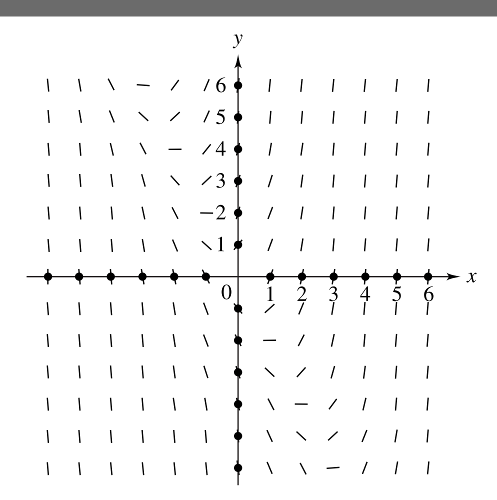


Figura 1.13 Campo de direcciones de $dy/dx = 2x + y$

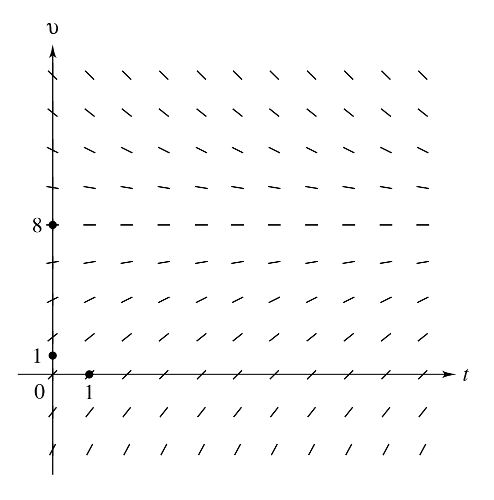


Figura 1.14 Campo de direcciones de $\dfrac{dv}{dt} = 1 - \dfrac{v}{8}$

4. Si la fuerza viscosa del problema 3 no es lineal, un posible modelo sería dado mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = 1 - \frac{v^3}{8} .$$

Trace de nuevo el campo de direcciones de la figura 1.14 para incorporar esta dependencia con respecto de v^3. Bosqueje las soluciones con condiciones iniciales $v(0) = 0, 1, 2, 3$. ¿Cuál es la velocidad terminal en este caso?

5. La ecuación logística para la población de cierta especie (en miles) está dada por

$$\frac{dp}{dt} = 3p - 2p^2 .$$

(a) Bosqueje el campo de direcciones usando un paquete de cómputo o el método de isóclinas.

(b) Si la población inicial es 2000 [es decir, $p(0) = 2$], ¿qué puede decir acerca de la población límite $\lim_{t\to+\infty} p(t)$?

(c) Si $p(0) = 0.5$, ¿cuál es el valor de $\lim_{t\to+\infty} p(t)$?

(d) ¿Podría una población de 3000 disminuir hasta 500?

6. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x + \operatorname{sen} y .$$

(a) Una curva solución pasa por el punto $(1, \pi/2)$. ¿Cuál es su pendiente en ese punto?

(b) Justifique que cada curva solución es creciente para $x > 1$.

(c) Muestre que la segunda derivada de cada solución satisface

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + x\cos y + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y .$$

(d) Una curva solución pasa por $(0, 0)$. Demuestre que la curva tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

7. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = p(p - 1)(2 - p)$$

para la población p (en miles) de cierta especie en el instante t.

(a) Bosqueje el campo de direcciones usando un paquete de cómputo o el método de isóclinas.

(b) Si la población inicial es 3000 [es decir, $p(0) = 3$], ¿qué puede decir acerca de la población límite $\lim_{t\to+\infty} p(t)$?

(c) Si $p(0) = 1.5$, ¿cuál es el valor de $\lim_{t\to+\infty} p(t)$?

(d) Si $p(0) = 0.5$, ¿cuál es el valor de $\lim_{t\to+\infty} p(t)$?

(e) ¿Puede una población de 900 crecer hasta 1100?

8. El movimiento de un conjunto de partículas que se mueve a lo largo del eje x está determinado por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = t^3 - x^3 ,$$

donde $x(t)$ denota la posición de la partícula en el instante t.

(a) Si una partícula reside en $x = 1$ cuando $t = 2$, ¿cuál es su velocidad en ese instante?

(b) Muestre que la aceleración de una partícula está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3t^2 - 3t^3x^2 + 3x^5 .$$

(c) Si una partícula está en $x = 2$ cuando $t = 2.5$, ¿puede llegar a la posición $x = 1$ en algún instante posterior?

[*Sugerencia*: $t^3 - x^3 = (t - x)(t^2 + xt + x^2)$].

9. Sea $\phi(x)$ la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x - y , \qquad y(0) = 1 .$$

(a) Muestre que $\phi''(x) = 1\ \phi'(x) = 1 - x + \phi(x)$.

(b) Justifique que la gráfica de ϕ es decreciente para x cercano a cero y que cuando x crece desde cero, $\phi(x)$ decrece hasta que cruza la recta $y = x$, donde su derivada es cero.

(c) Sea x^* la abscisa del punto donde la curva solución $y = \phi(x)$ cruza la recta $y = x$. Considere el signo de $\phi''(x^*)$ y justifique que ϕ tiene un mínimo relativo en x^*.

(d) ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de $y = \phi(x)$ para $x > x^*$?

(e) Verifique que $y = x - 1$ es una solución de $dy/dx = x - y$ y explique por qué la gráfica de $\phi(x)$ siempre está por arriba de la recta $y = x - 1$.

(f) Bosqueje el campo de direcciones para $dy/dx = x - y$ usando el método de isóclinas o un paquete de cómputo.

(g) Bosqueje la solución $y = \phi(x)$ usando el campo de direcciones de la parte (f).

10. Use un paquete de cómputo para bosquejar el campo de direcciones de las siguientes ecuaciones diferenciales. Bosqueje algunas de las curvas solución.

(a) $dy/dx = \operatorname{sen} x$.
(b) $dy/dx = \operatorname{sen} y$.
(c) $dy/dx = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.
(d) $dy/dx = x^2 + 2y^2$.
(e) $dy/dx = x^2 - 2y^2$.

En los problemas 11 a 16, trace las isóclinas con sus marcadores de dirección y bosqueje varias curvas solución, incluyendo la curva que satisface las condiciones iniciales dadas.

11. $dy/dx = 2x$, $y(0) = -1$.
12. $dy/dx = y$, $y(0) = 1$.
13. $dy/dx = -x/y$, $y(0) = 4$.
14. $dy/dx = x/y$, $y(0) = -1$.
15. $dy/dx = 2x^2 - y$, $y(0) = 0$.
16. $dy/dx = x + 2y$, $y(0) = 1$.

17. A partir de un bosquejo del campo de direcciones, ¿qué se puede decir acerca del comportamiento cuando $x \to +\infty$ de una solución a lo siguiente?

$$\frac{dy}{dx} - 3 - y + \frac{1}{x}$$

18. A partir de un bosquejo del campo de direcciones, ¿qué se puede decir acerca del comportamiento cuando $x \to +\infty$ de una solución a lo siguiente?

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

19. Escriba la ecuación diferencial $dy/dx = -y/x$ en la forma

$$\frac{1}{y}dy = \frac{-1}{x}dx ,$$

e integre ambos lados para obtener la solución $y = C/x$ para una constante arbitraria C.

1.4 EL MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE EULER

El método de Euler (o método de la recta tangente) es un procedimiento que permite construir aproximaciones a las soluciones de un problema con valor inicial, para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\textbf{(1)} \qquad y' = f(x, y) , \qquad y(x_0) = y_0 .$$

Se podría describir como una implantación "mecánica" o "computarizada" del procedimiento informal para bosquejar a mano la curva solución a partir de una imagen del campo de direcciones. Como tal, permanece sujeto al error cuando se pasa una curva solución a otra. Sin embargo, bajo condiciones bastante generales, las iteraciones del procedimiento convergen a soluciones reales.

El método se ilustra en la figura 1.15 de la página 25. Partiendo del punto inicial (x_0, y_0), seguimos la línea recta con pendiente $f(x_0, y_0)$, la recta tangente, por una cierta distancia hasta el punto (x_1, y_1). Luego cambiamos la pendiente por el valor $f(x_1, y_1)$ y seguimos esta recta hasta (x_2, y_2). De esta forma, construimos aproximaciones poligonales (líneas quebradas) de la solución. Al tomar espacios cada vez menores entre los puntos (con lo cual utilizamos más puntos), es de esperar que lleguemos a la solución real.

Para ser más precisos, supongamos que el problema con valor inicial (1) tiene una única solución $\phi(x)$ en cierto intervalo con centro en x_0. Sea h un número positivo fijo (llamado el *tamaño del paso*) y considerando los puntos equidistantes[†]

$$x_n := x_0 + nh , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

La construcción de los valores y_n que aproximan los valores de la solución $\phi(x_n)$ procede de la manera siguiente. En el punto (x_0, y_0), la pendiente de la solución de (1) está dada por $dy/dx = f(x_0, y_0)$. Por lo tanto, la recta tangente a la curva solución en el punto inicial (x_0, y_0) es

$$y = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0) .$$

[†]El símbolo := significa "se define como".

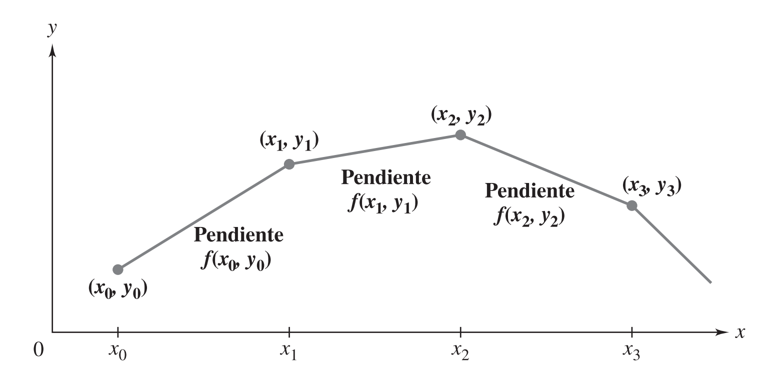


Figura 1.15 Aproximación mediante poligonales dada por el método de Euler

Usamos esta recta tangente para aproximar $\phi(x)$ y vemos que para el punto $x_1 = x_0 + h$

$$\phi(x_1) \approx y_1 := y_0 + hf(x_0, y_0) \ .$$

Ahora partimos del punto (x_1, y_1) para construir la recta con pendiente dada por el campo de direcciones en el punto (x_1, y_1); es decir, con pendiente igual a $f(x_1, y_1)$. Si seguimos esta recta† [a saber, $y = y_1 + (x - x_1)f(x_1, y_1)$] al pasar de x_1 a $x_2 = x_1 + h$, obtenemos la aproximación

$$\phi(x_2) \approx y_2 := y_1 + hf(x_1, y_1) \ .$$

Al repetir el proceso (como se ilustra en la figura 1.15), obtenemos

$$\phi(x_3) \approx y_3 := y_2 + hf(x_2, y_2) \ ,$$
$$\phi(x_4) \approx y_4 := y_3 + hf(x_3, y_3) \ , \qquad \text{etc.}$$

Este sencillo procedimiento es el **método de Euler** y se puede resumir mediante la fórmula recursiva

(2) $$\mathbf{x_{n+1} = x_n + h} \ ,$$

(3) $$\mathbf{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)} \ , \qquad \mathbf{n = 0, 1, 2, \ldots} \ .$$

EJEMPLO 1 Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

(4) $$y' = x\sqrt{y} \ , \qquad y(1) = 4$$

en los puntos $x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ y 1.5.

SOLUCIÓN En este caso, $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, $h = 0.1$ y $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Así, la fórmula recursiva (3) para y_n es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + (0.1)x_n\sqrt{y_n} \ .$$

†Como y_1 es una *aproximación* de $\phi(x_1)$, no se puede garantizar que esta recta sea tangente a la curva solución $y = \phi(x)$.

Al sustituir $n = 0$, obtenemos

$$x_1 = x_0 + 0.1 = 1 + 0.1 = 1.1 ,$$
$$y_1 = y_0 + (0.1)x_0\sqrt{y_0} = 4 + (0.1)(1)\sqrt{4} = 4.2 .$$

Al hacer $n = 1$ se tiene

$$x_2 = x_1 + 0.1 = 1.1 + 0.1 = 1.2 ,$$
$$y_2 = y_1 + (0.1)x_1\sqrt{y_1} = 4.2 + (0.1)(1.1)\sqrt{4.2} = 4.42543 .$$

Si continuamos de esta forma, obtenemos los resultados de la tabla 1.1. Como comparación, hemos incluido el valor exacto (hasta cinco cifras decimales) de la solución $\phi(x) = (x^2 + 7)^2/16$ de (4), la que puede obtenerse mediante separación de variables (véase la sección 2.2). Como era de esperar, la aproximación se deteriora cuando x se aleja de 1. ■

TABLA 1.1 CÁLCULOS PARA $y' = x\sqrt{y}$, $y(1) = 4$

n	x_n	Método de Euler	Valor exacto
0	1	4	4
1	1.1	4.2	4.21276
2	1.2	4.42543	4.45210
3	1.3	4.67787	4.71976
4	1.4	4.95904	5.01760
5	1.5	5.27081	5.34766

Dado el problema con valor inicial (1) y un punto *específico* x, ¿cómo utilizar el método de Euler para aproximar $\phi(x)$? Partiendo de x_0, podemos dar un paso gigante que llegue hasta x, o podemos considerar varios pasos pequeños para llegar hasta él. Si quisiéramos dar N pasos, entonces hacemos $h = (x - x_0)/N$, de modo que el tamaño del paso h y el número de pasos N están relacionados de una manera específica. Por ejemplo, si $x_0 = 1.5$ y queremos aproximar $\phi(2)$ usando 10 pasos, entonces $h = (2 - 1.5)/10 = 0.05$. Es de esperar que mientras más pasos consideremos, mejor será la aproximación. (Pero recuerde que más pasos significan más cálculos y con ello un mayor error por redondeo).

EJEMPLO 2 Utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

(5) $$y' = y , \quad y(0) = 1$$

en $x = 1$, considerando 1, 2, 4, 8 y 16 pasos.

Observación. Note que la solución de (5) es simplemente $\phi(x) = e^x$, de modo que el método de Euler generará aproximaciones algebraicas del número trascendente $e = 2.71828\ldots$.

SOLUCIÓN En este caso, $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. La fórmula recursiva del método de Euler es

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1 + h)y_n \ .$$

Para obtener aproximaciones en $x = 1$ con N pasos, consideramos el tamaño del paso $h = 1/N$. Para $N = 1$, tenemos

$$\phi(1) \approx y_1 - (1 + 1)(1) - 2 \ .$$

Para $N = 2$, $\phi(x_2) = \phi(1) \approx y_2$. En este caso, obtenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 + 0.5)(1) = 1.5 \ , \\ \phi(1) \approx y_2 &= (1 + 0.5)(1.5) = 2.25 \ . \end{aligned}$$

Para $N = 4$, $\phi(x_4) = \phi(1) \approx y_4$, donde

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 + 0.25)(1) = 1.25 \ , \\ y_2 &= (1 + 0.25)(1.25) = 1.5625 \ , \\ y_3 &= (1 + 0.25)(1.5625) = 1.95313 \ , \\ \phi(1) \approx y_4 &= (1 + 0.25)(1.95313) = 2.44141 \ . \end{aligned}$$

(En los cálculos anteriores redondeamos a cinco cifras decimales). De manera análoga, al considerar $N = 8$ y 16 obtenemos estimaciones cada vez mejores de $\phi(1)$. Estas aproximaciones aparecen en la tabla 1.2. Como comparación, la figura 1.16 de la página 28 muestra las aproximaciones poligonales de e^x usando el método de Euler con $h = 1/4$ ($N = 4$) y $h = 1/8$ ($N = 8$). Observe que el menor tamaño del paso proporciona la mejor aproximación. ■

TABLA 1.2 MÉTODO DE EULER PARA $y' = y$, $y(0) = 1$

N	h	Aproximación de $\phi(1) = e$
1	1.0	2.0
2	0.5	2.25
4	0.25	2.44141
8	0.125	2.56578
16	0.0625	2.63793

¿Qué tan bueno (o malo) es el método de Euler? Al juzgar un esquema numérico, debemos partir de dos preguntas fundamentales. ¿Converge tal método? Y, en tal caso, ¿cuál es la razón de convergencia? Estos importantes aspectos se analizan en la sección 3.6, donde se presentan algunas mejoras al método de Euler (véanse también los problemas 12 y 13).

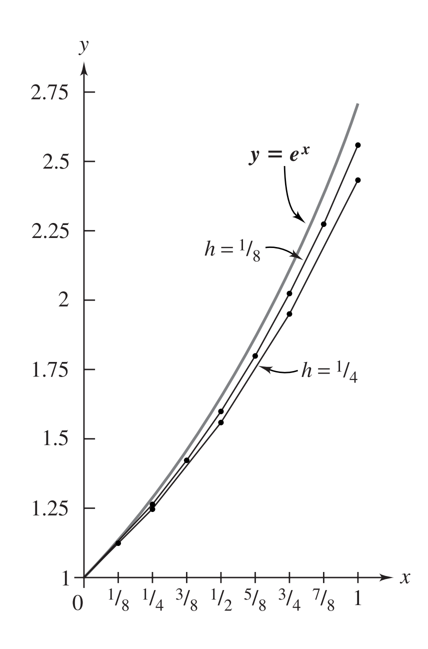


Figura 1.16 Aproximaciones de e^x usando el método de Euler con $h = 1/4$ y $1/8$

EJERCICIOS 1.4

En muchos de los problemas siguientes será útil una calculadora o computadora. También será conveniente que el lector escriba un programa para resolver problemas con valores iniciales mediante el método de Euler. (Recuerde que todos los cálculos trigonométricos se hacen en radianes).

En los problemas 1 a 4, utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial dado, en los puntos $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ *y* 0.5 *usando un tamaño del paso* 0.1 $(h = 0.1)$.

1. $dy/dx = x/y$, $\quad y(0) = -1$.

2. $dy/dx = -x/y$, $\quad y(0) = 4$.

3. $dy/dx = y(2 - y)$, $\quad y(0) = 3$.

4. $dy/dx = x + y$, $\quad y(0) = 1$.

5. Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0.2$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 + y), \qquad y(1) = 1$$

en los puntos $x = 1.2, 1.4, 1.6$ y 1.8.

6. Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x - y^2, \qquad y(1) = 0$$

en los puntos $x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ y 1.5.

7. Utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t\,\mathrm{sen}(tx), \qquad x(0) = 0$$

en $t = 1$, usando 1, 2, 4 y 8 pasos.

8. Utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 - \mathrm{sen}\, y, \qquad y(0) = 0$$

en $x = \pi$, usando 1, 2, 4 y 8 pasos.

9. Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2, \qquad y(1) = -1$$

en el intervalo $1 \le x \le 2$. Compare estas aproximaciones con la solución real $y = -1/x$ (¡verifique!)

graficando la aproximación poligonal y la solución real en el mismo sistema de coordenadas.

10. Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x - y\ , \qquad y(0) = 0$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Compare estas aproximaciones con la solución real $y = e^{-x} + x - 1$ (¡verifique!) graficando la aproximación poligonal y la solución real en el mismo sistema de coordenadas.

11. Utilice el método de Euler con 20 pasos para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2\ , \qquad x(0) = 0$$

en $t = 1$. Compare la aproximación con la solución real $x = \tan t$ (¡verifique!) evaluada en $t = 1$.

12. En el ejemplo 2 se aproxima el número trascendente e usando el método de Euler para resolver el problema con valor inicial

$$y' = y\ , \qquad y(0) = 1\ .$$

Muestre que la aproximación de Euler y_n obtenemos mediante el tamaño del paso $1/n$ está dada por la fórmula

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\ , \qquad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Recuerde de sus cursos de cálculo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\ ,$$

por lo que el método de Euler converge (teóricamente) al valor correcto.

13. Demuestre que la "razón de convergencia" del método de Euler en el problema 12 es comparable con $1/n$, mostrando que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e - y_n}{1/n} = \frac{e}{2}\ .$$

[*Sugerencia*: Use la regla de l'Hôpital y el desarrollo de Maclaurin para $\ln(1 + t)$].

14. Use el método de Euler con $h = 0.5, 0.1, 0.05$ y 0.01 para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 2xy^2\ , \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. (La explicación del errático resultado aparece en el problema 18 de los ejercicios 1.2).

Intercambio de calor. *En esencia, hay dos mecanismos mediante los que un cuerpo físico intercambia calor con su ambiente. La transferencia de calor* **por contacto** *a través de la superficie del cuerpo es controlada por la diferencia entre las temperaturas del cuerpo y del ambiente; esto se conoce como la ley de enfriamiento de Newton. Sin embargo, la transferencia de calor también se debe a la* **radiación térmica**, *que de acuerdo con la ley de radiación de Stefan es controlada por la diferencia entre las cuartas potencias de estas temperaturas. En la mayor parte de los casos, uno de estos modos domina al otro. Los problemas 15 y 16 invitan al lector a simular cada modo de manera numérica para un conjunto dado de condiciones iniciales.*

15. Ley de enfriamiento de Newton. La ley de enfriamiento de Newton establece que la razón de cambio en la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio $M(t)$ y la temperatura del cuerpo. Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)]\ ,$$

donde K es una constante. Sea $K = 1$ (minutos)$^{-1}$ y consideremos constante a la temperatura del medio, $M(t) \equiv 70°F$. Si el cuerpo tiene una temperatura inicial de 100°F, utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la temperatura del cuerpo después de

(a) 1 minuto.
(b) 2 minutos.

16. Ley de radiación de Stefan. La ley de radiación de Stefan establece que la razón de cambio en la temperatura de un cuerpo a $T(t)$ grados en un medio a $M(t)$ grados es proporcional a $M^4 - T^4$; es decir,

$$\frac{dT}{dt} = K(M(t)^4 - T(t)^4)\ ,$$

donde K es una constante. Sea $K = (40)^{-4}$ y supongamos que la temperatura del medio es constante, $M(t) \equiv 70°F$. Si $T(0) = 100°F$, utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar $T(1)$ y $T(2)$.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo presentamos cierta terminología básica de las ecuaciones diferenciales. El **orden** de una ecuación diferencial es el máximo orden de derivación presente en ella. El tema de este texto son las ecuaciones diferenciales **ordinarias**, que implican derivadas con respecto de una sola variable independiente. Tales ecuaciones se clasifican como **lineales** o **no lineales**.

Una **solución explícita** de una ecuación diferencial es una función de la variable independiente que satisface la ecuación en algún intervalo. Una **solución implícita** es una relación entre las variables dependiente e independiente que define de manera implícita una función que es una solución explícita. Por lo general, una ecuación diferencial tiene una infinidad de soluciones. En contraste, existen teoremas que nos garantizan la existencia de una solución única para ciertos **problemas con valores iniciales** en donde uno debe hallar una solución de la ecuación diferencial que además satisfaga ciertas condiciones iniciales dadas. Para una ecuación de orden n, estas condiciones se refieren a los valores de la solución y de sus primeras $n - 1$ derivadas en algún punto.

Aunque uno no pueda determinar soluciones explícitas de una ecuación diferencial, se pueden usar varias técnicas como ayuda para analizar las soluciones. Uno de estos métodos para ecuaciones de primer orden ve a la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ como algo que especifica direcciones (pendientes) en los puntos del plano. El conglomerado de tales pendientes es el **campo de direcciones** para la ecuación. El hecho de conocer el "flujo de soluciones" es útil para bosquejar la solución de un problema con valor inicial. Además, al llevar a cabo este método en forma algebraica obtenemos aproximaciones numéricas de la solución deseada. Este proceso numérico se llama **método de Euler**.

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

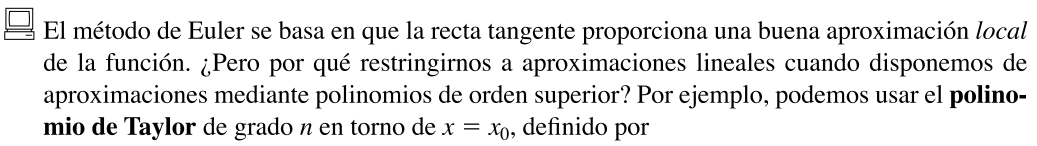
1. Elija cuatro campos (por ejemplo, astronomía, geología, biología y economía) y para cada campo analice una situación donde se apliquen ecuaciones diferenciales para resolver un problema. Elija ejemplos diferentes a los de la sección 1.1.

2. Compare las distintas clases de soluciones que se analizaron en este capítulo (explícitas, implícitas, gráficas y numéricas). ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de cada uno?

PROYECTOS DE GRUPO PARA EL CAPÍTULO 1

A. *Método de series de Taylor*

El método de Euler se basa en que la recta tangente proporciona una buena aproximación *local* de la función. ¿Pero por qué restringirnos a aproximaciones lineales cuando disponemos de aproximaciones mediante polinomios de orden superior? Por ejemplo, podemos usar el **polinomio de Taylor** de grado n en torno de $x = x_0$, definido por



$$P_n(x) := y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Este polinomio es la n-ésima suma parcial de la representación en serie de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Para determinar la serie de Taylor de la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial

$$dy/dx = f(x, y) , \qquad y(x_0) = y_0 ,$$

sólo necesitamos determinar los valores de la derivada de ϕ (suponiendo que existen) en x_0; es decir, $\phi(x_0)$, $\phi'(x_0)$, ... La condición inicial proporciona el primer valor $\phi(x_0) = y_0$. Usamos la ecuación $y' = f(x, y)$ para hallar $\phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Para determinar $\phi''(x_0)$ derivamos la ecuación $y' = f(x, y)$ de manera implícita con respecto de x para obtener

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f$$

con lo que podemos calcular $\phi''(x_0)$.

(a) Calcule los polinomios de Taylor de grado 4 para las soluciones de los problemas con valores iniciales dados. Use estos polinomios de Taylor para aproximar la solución en $x = 1$.

(i) $\dfrac{dy}{dx} = x - 3y$; $y(0) = 1$. (ii) $\dfrac{dy}{dx} = y(3 - y)$; $y(0) = 4$.

(b) Compare el uso del método de Euler con el de las series de Taylor para aproximar la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + y = \cos x + \operatorname{sen} x , \qquad y(0) = 1 .$$

Para esto, complete la tabla 1.3 de la página 32. Dé las aproximaciones para $\phi(1)$ y $\phi(3)$ redondeando a milésimos. Verifique que $\phi(x) = \operatorname{sen} x + e^{-x}$ y use esta fórmula y una calculadora o tablas para determinar los valores exactos de $\phi(x)$ redondeados a milésimos. Por último, decida cuál de los primeros cuatro métodos de la tabla 1.3 proporcionará la mejor aproximación de $\phi(10)$ y justifique su elección. (Recuerde que los cálculos de las funciones trigonométricas deben hacerse en el modo de radianes).

(c) Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 para la solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -xy$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. ¿Ve la forma en que el método de series de Taylor utilizará cada una de las n condiciones iniciales mencionadas en la definición 3 de la sección 1.2 para una ecuación diferencial general de orden n?

TABLA 1.3

Método	**Aproximación de $\phi(1)$**	**Aproximación de $\phi(3)$**
Método de Euler usando pasos de tamaño 0.1		
Método de Euler usando pasos de tamaño 0.01		
Polinomio de Taylor de grado 2		
Polinomio de Taylor de grado 5		
Valor exacto de $\phi(x)$ redondeado a milésimos		

B. *Método de Picard*

El problema con valor inicial

(1) $$y'(x) = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0$$

se puede escribir como una ecuación **integral**, si se integran ambos lados de (1) con respecto de x, desde $x = x_0$ hasta $x = x_1$:

(2) $$\int_{x_0}^{x_1} y'(x)dx = y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx \ .$$

Al sustituir $y(x_0) = y_0$ y despejar $y(x_1)$ tenemos

(3) $$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx \ .$$

Si usamos t en vez de x como la variable de integración, podemos hacer que $x = x_1$ sea el límite superior de integración. La ecuación (3) se convierte en

(4) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \ .$$

Podemos usar la ecuación (4) para generar aproximaciones sucesivas de una solución de (1). Si la función $\phi_0(x)$ es una estimación o aproximación inicial de una solución de (1), entonces una nueva función aproximación está dada por

$$\phi_1(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_0(t))dt \ ,$$

donde hemos reemplazado $y(t)$ por la aproximación $\phi_0(t)$ en el argumento de f. De manera similar, podemos usar $\phi_1(x)$ para generar una nueva aproximación $\phi_2(x)$, y así sucesivamente. En general, obtenemos la $(n + 1)$-ésima aproximación a partir de la relación

(5) $$\phi_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \phi_n(t)\big)dt \ .$$

Este procedimiento se conoce como el **método de Picard**.[†] Con ciertas hipótesis para f y $\phi_0(x)$, se sabe que la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ converge a una solución de (1).[††]

Si no tenemos más información acerca de la solución de (1), es común considerar que $\phi_0(x) \equiv y_0$.

(a) Utilice el método de Picard con $\phi_0(x) \equiv 1$ para obtener las cuatro siguientes aproximaciones sucesivas de la solución a

(6) $$y'(x) = y(x) \ , \qquad y(0) = 1 \ .$$

Muestre que estas aproximaciones son tan sólo las sumas parciales de la serie de Maclaurin de la solución real e^x.

(b) Use el método de Picard con $\phi_0(x) \equiv 0$ para obtener las tres siguientes aproximaciones sucesivas de la solución del problema no lineal

(7) $$y'(x) = 3x - [y(x)]^2 \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

Grafique estas aproximaciones para $0 \le x \le 1$.

(c) En el problema 29 de los ejercicios 1.2 mostramos que el problema con valor inicial

(8) $$y'(x) = 3[y(x)]^{2/3} \ , \qquad y(2) = 0$$

no tiene solución única. Muestre que el método de Picard, comenzando con $\phi_0(x) \equiv 0$, converge a la solución $y(x) \equiv 0$; y comenzando con $\phi_0(x) = x - 2$ converge a la segunda solución $y(x) = (x - 2)^3$. [*Sugerencia*: Para el caso $\phi_0(x) = x - 2$, muestre que $\phi_n(x)$ tiene la forma $c_n(x - 2)^{r_n}$, donde $c_n \to 1$ y $r_n \to 3$ cuando $n \to \infty$].

C. *Dipolo magnético*

Con frecuencia, una barra imantada se modela como un dipolo magnético, un extremo se identifica como polo norte N y el otro como polo sur S. El campo magnético del dipolo es simétrico con respecto de la rotación en torno de su eje que pasa de manera longitudinal por el centro de la barra. Por lo tanto, podemos estudiar el campo magnético restringiéndonos a un plano que contiene el eje de simetría, con el origen en el centro de la barra (véase la figura 1.17 en la página 34)

[†] ***Nota histórica:*** Este método de aproximación es subproducto del famoso teorema de existencia de Picard-Lindelöf formulado a fines del siglo XIX.

[††] Todas las referencias al capítulo 11 se refieren al texto ampliado *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, 4a. edición.

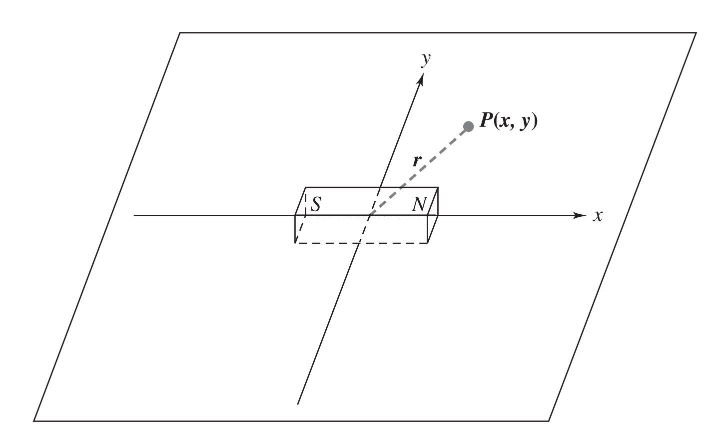


Figura 1.17 Dipolo magnético

Para un punto P localizado a una distancia r del origen, donde r es mucho mayor que la longitud del imán, las **líneas de campo magnético** satisfacen la ecuación diferencial

(9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

y las **líneas equipotenciales** satisfacen la ecuación

(10) $$\frac{dy}{dx} - \frac{y^2 - 3x^2}{2xy} \quad .$$

(a) Muestre que las dos familias de curvas son perpendiculares cuando se cortan. [*Sugerencia*: Considere las pendientes de las rectas tangentes a las dos curvas en un punto de intersección].

(b) Trace el campo de direcciones de la ecuación (9) para $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$. Puede utilizar un paquete de cómputo para generar el campo de direcciones o usar el método de isóclinas que se analizó en la sección 1.3. El campo de direcciones le recordará el experimento donde se esparce limadura de hierro sobre una hoja de papel que se coloca encima de un imán. La orientación de las pequeñas limaduras de hierro corresponde a los pequeños segmentos de recta.

(c) Utilice el campo de direcciones de la parte (b) como ayuda para bosquejar las líneas de campo magnético que son soluciones de (9).

(d) Aplique la afirmación de la parte (a) a las curvas de la parte (c) para bosquejar las líneas equipotenciales que son soluciones de (10). Las líneas del campo magnético y las líneas equipotenciales son ejemplos de *trayectorias ortogonales*. (Véase el problema 32 de los ejercicios 2.4, página 66).

D. La recta fase

El bosquejo del campo de direcciones de una ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$ es particularmente sencillo cuando la ecuación es **autónoma**; es decir, la variable independiente t no aparece en forma explícita:

(1) $$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

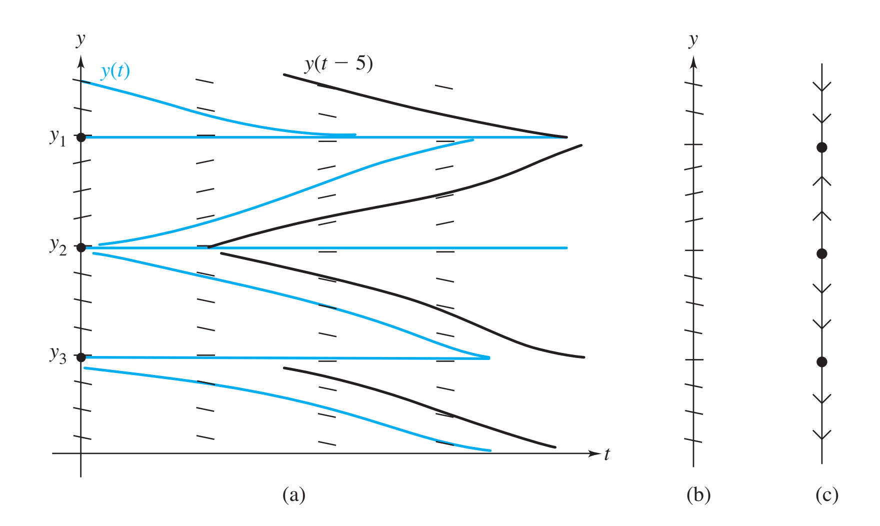


Figura 1.18 Campo de direcciones y soluciones para una ecuación autónoma

En la figura 1.18(a), la gráfica muestra el campo de direcciones de $y' = -A(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)^2$ y $A > 0$ y se trazan algunas soluciones. Observe las siguientes propiedades de las gráficas y explique por qué son consecuencia de que la ecuación sea autónoma.

(a) Las pendientes en el campo de direcciones son idénticas a lo largo de rectas horizontales.

(b) Se puede generar nuevas soluciones a partir de otras mediante un desplazamiento en el tiempo (es decir, reemplazando $y(t)$ por $y(t - t_0)$).

La observación (a) implica que todo el campo de direcciones puede describirse mediante una sola "línea" de direcciones, como en la figura 1.18(b).

De particular interés para las ecuaciones autónomas son las soluciones constantes, o **soluciones de equilibrio** $y(t) = y_i$, $i = 1, 2, 3$. El equilibrio $y = y_1$ es un *equilibrio estable*, o *sumidero*, pues las soluciones cercanas son atraídas hacia él cuando $t \to \infty$. Los equilibrios que repelen a las soluciones cercanas, como $y = y_2$, se conocen como *fuentes*; los demás equilibrios se llaman *nodos*, ilustrados por $y = y_3$. Las fuentes y los nodos son equilibrios no estables.

(c) Describa la forma de caracterizar los equilibrios mediante los ceros de la función $f(y)$ en la ecuación (1) y la forma de distinguir los sumideros, las fuentes y los nodos con base en los *signos* de $f(y)$ a los lados de los ceros.

Por tanto, la sencilla **línea fase** que aparece en la figura 1.18(c), que indica mediante puntos y flechas los ceros y los signos de $f(y)$, basta para describir la naturaleza de las soluciones de equilibrio para una ecuación autónoma.

(d) Trace la línea fase para $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$ y establezca la naturaleza de sus puntos de equilibrio.

(e) Use la línea fase para $y' = -(y - 1)^{5/3}(y - 2)^2(y - 3)$ para predecir el comportamiento asintótico (cuando $t \to \infty$) de la solución que satisface $y(0) = 2.1$.

(f) Trace la línea fase para $y' = y$ sen y y establezca la naturaleza de sus puntos de equilibrio.

(g) Trace las líneas fase para $y' =$ sen $y + 0.1$ y $y' =$ sen $y - 0.1$. Analice el efecto de la pequeña perturbación ± 0.1 sobre los puntos de equilibrio.

La separación de los equilibrios en $y = 0$ observada en la parte (g) ilustra lo que se conoce como *bifurcación*. El siguiente problema ilustra de manera drástica los efectos de una bifurcación en el contexto del manejo de una manada.

(g) Al aplicar el *modelo logístico*, que será analizado en la sección 3.2, a los datos disponibles para la población de lagartos en los terrenos del Centro Espacial Kennedy en Florida, se deduce la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{y(y - 1500)}{3200} .$$

Aquí, $y(t)$ es la población y el tiempo t se mide en años. Si se permite que los cazadores reduzcan la población a razón de s lagartos por año, la ecuación se modificaría como

$$y' = -\frac{y(y - 1500)}{3200} - s .$$

Trace las líneas fase para $s = 0, 50, 100, 125, 150, 175$ y 200. Analice el significado de los puntos de equilibrio. Observe la bifurcación en $s = 175$; ¿debe evitarse una tasa de reducción cercana a 175?

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1 INTRODUCCIÓN: MOVIMIENTO DE UN CUERPO EN CAÍDA

Un objeto cae en el aire hacia la Tierra. Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el objeto son la gravedad y la resistencia del aire, determine la velocidad del objeto como una función del tiempo.

La segunda ley de Newton establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración. Podemos expresarla mediante la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = F ,$$

donde F representa la fuerza total sobre el objeto, m es la masa del objeto y dv/dt es la aceleración, expresada como la derivada de la velocidad con respecto del tiempo. Será conveniente definir v como positiva cuando está dirigida hacia abajo (a diferencia del análisis en la sección 1.1).

Cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza debida a la gravedad es simplemente el peso del objeto. Esta fuerza se puede expresar como mg, donde g es la aceleración debida a la gravedad. No hay una ley general que modele con precisión la resistencia del aire que actúa sobre el objeto, pues esta fuerza parece depender de la velocidad del objeto, la densidad del aire, y la forma del objeto, entre otras cosas. Sin embargo, en ciertos casos, la resistencia del aire puede representarse de manera razonable como $-bv$, donde b es una constante positiva que depende de la densidad del aire y de la forma del objeto. Utilizamos el signo negativo debido a que la resistencia del aire es una fuerza que se opone al movimiento. Las fuerzas que actúan sobre el objeto aparecen en la figura 2.1 de la página 38. (Observe que hemos generalizado el modelo de caída libre de la sección 1.1, incluyendo la resistencia del aire).

Al aplicar la ley de Newton obtenemos la ecuación diferencial de primer orden

(1) $$m\frac{dv}{dt} = mg - bv .$$

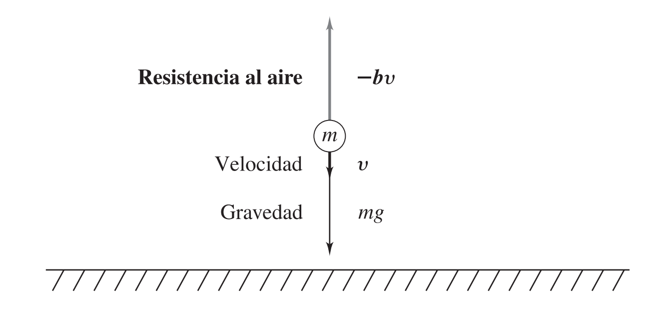


Figura 2.1 Fuerza sobre un objeto que cae

Para resolver esta ecuación, hacemos uso de una técnica llamada **separación de variables**, que se utilizó para analizar el modelo de decaimiento radiactivo de la sección 1.1 y que desarrollaremos con detalle en la sección 2.2. Si consideramos a dv y dt como diferenciales, reescribimos la ecuación (1) de modo que las variables v y t queden aisladas en lados opuestos de la ecuación:

$$\frac{dv}{mg - bv} = \frac{dt}{m} \ .$$

(De aquí la nomenclatura "separación de variables").

A continuación integramos la ecuación ya separada

$$\int \frac{dv}{mg - bv} = \int \frac{dt}{m}$$

y deducimos que

$$-\frac{1}{b} \ln |mg - bv| = \frac{t}{m} + c \ .$$

Por lo tanto,

$$|mg - bv| = e^{-bc} e^{-bt/m}$$

o

$$mg - bv = Ae^{-bt/m} \ ,$$

donde la nueva constante A tiene magnitud e^{-bc} y el mismo signo ($\pm$) que $(mg - bv)$. Al despejar v obtenemos

(2) $$v = \frac{mg}{b} - \frac{A}{b} e^{bt/m} \ ,$$

lo que se llama una **solución general** de la ecuación diferencial pues, como veremos en la sección 2.3, cualquier solución de (1) se puede expresar en la forma dada por (2).

En un caso específico, tendríamos dados los valores de m, g y b. Para determinar la constante A en la solución general, podemos usar la velocidad inicial del objeto v_0. Es decir, resolvemos el **problema con valor inicial**

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv\ , \qquad v(0) = v_0\ .$$

Al sustituir $v = v_0$ y $t = 0$ en la solución general de la ecuación diferencial, podemos hallar el valor de A. Con este valor, la solución del problema con valor inicial es

(3) $$v = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-bt/m}\ .$$

La fórmula anterior proporciona la velocidad del objeto que cae por el aire como función del tiempo, si la velocidad inicial del objeto es v_0. En la figura 2.2 bosquejamos la gráfica de $v(t)$ para diversos valores de v_0. La figura sugiere que la velocidad $v(t)$ tiende a mg/b *sin importar la velocidad inicial* v_0. [Esto es fácil de ver en la fórmula (3) haciendo $t \to +\infty$]. La constante mg/b se conoce como la **velocidad límite** o **terminal** del objeto.

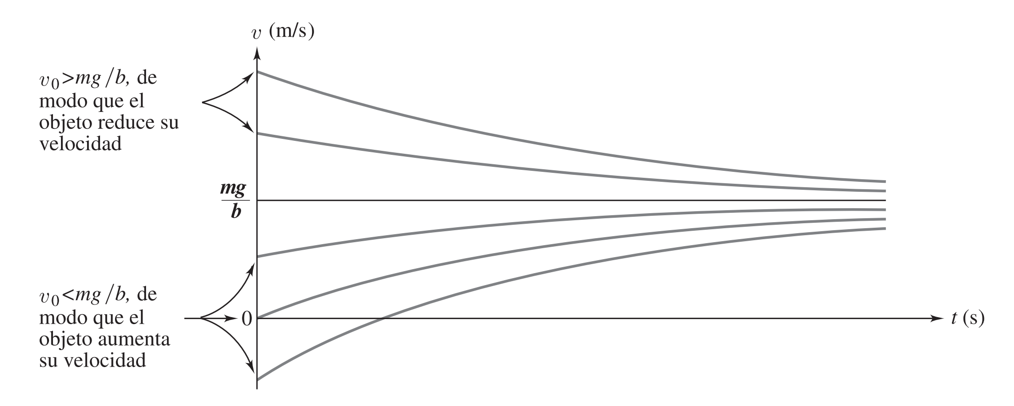


Figura 2.2 Gráfica de $v(t)$ para seis velocidades iniciales distintas v_0. ($g = 9.8$ m/s^2, $m/b = 5$ s)

Podemos hacer varias observaciones para este modelo de un cuerpo en caída. Como $e^{-bt/m}$ tiende rápidamente a cero, la velocidad es aproximadamente igual al peso mg dividido entre el coeficiente de resistencia del aire b. Así, en presencia de resistencia del aire, mientras más pesado sea el objeto, más rápido caerá, suponiendo formas y tamaños iguales. Además, al reducir la resistencia del aire (b más pequeño), el objeto caerá más rápido. Estas observaciones coinciden con nuestra experiencia.

Muchos otros problemas físicos,† al formularse de manera matemática, conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden o a problemas con valores iniciales. Algunos de ellos se analizan en el capítulo 3. En este capítulo aprenderemos a reconocer y obtener soluciones de ciertos tipos específicos de ecuaciones de primer orden. Comenzamos estudiando las ecuaciones separables, luego las ecuaciones lineales y a continuación las ecuaciones exactas. Los métodos

†El problema físico aquí analizado tiene otros modelos matemáticos. Por ejemplo, podríamos tomar en cuenta las variaciones en el campo gravitacional de la Tierra y ecuaciones más generales para la resistencia del aire.

para resolver estas ecuaciones son los más básicos. En las últimas dos secciones ilustraremos el uso de ciertos recursos, como los factores integrantes, las sustituciones y las transformaciones para convertir ciertas ecuaciones en ecuaciones separables, exactas o lineales que podamos resolver. En todo nuestro análisis de estos tipos especiales de ecuaciones, el lector irá construyéndose una mejor idea del comportamiento de las soluciones de ecuaciones más generales y de las dificultades posibles para hallar estas soluciones.

2.2 ECUACIONES SEPARABLES

Una clase sencilla de ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden resolverse mediante integración es la clase de **ecuaciones separables**, ecuaciones como

(1) $$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ ,$$

que se pueden reescribir de modo que las variables x y y (junto con sus diferenciales dx y dy) queden aisladas en lados opuestos de la ecuación, como en

$$h(y)dy = g(x)dx \ .$$

Así, el lado derecho original $f(x, y)$ debe tener la forma factorizada

$$f(x, y) = g(x) \cdot \frac{1}{h(y)} \ .$$

Más formalmente, escribimos $p(y) = 1/h(y)$ y presentamos la siguiente definición.

ECUACIÓN SEPARABLE

Definición 1. Si el lado derecho de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se puede expresar como una función $g(x)$ que sólo depende de x, por una función $p(y)$ que sólo depende de y, entonces la ecuación diferencial es **separable**.†

En otras palabras, una ecuación de primer orden es separable si se puede escribir en la forma

(2) $$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y) \ .$$

†***Nota histórica:*** Un procedimiento para resolver ecuaciones separables fue descubierto de manera implícita por Gottfried Leibniz en 1691. La técnica explícita llamada separación de variables fue formalizada por John Bernoulli en 1694.

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{y^2 + 1}$$

es separable, pues (si uno está alerta para detectar la factorización)

$$\frac{2x + xy}{y^2 + 1} = x\frac{2 + y}{y^2 + 1} = g(x)p(y) \ .$$

Sin embargo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy$$

no admite tal factorización del lado derecho y, por tanto, no es separable.

De manera vaga, las ecuaciones separables se resuelven realizando la separación y luego integrando cada lado.

MÉTODO PARA RESOLVER ECUACIONES SEPARABLES

Para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$$

multiplicamos por dx y por $h(y) := 1/p(y)$ para obtener

$$h(y)dy = g(x)dx \ .$$

Luego integramos ambos lados:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \ ,$$

(3) $$H(y) = G(x) + C \ .$$

donde hemos juntado las dos constantes de integración en un solo símbolo C. La última ecuación proporciona una solución implícita de la ecuación diferencial.

Más adelante veremos la justificación matemática del procedimiento "bosquejado" arriba, pero primero estudiaremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación no lineal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 5}{y^2} \ .$$

SOLUCIÓN Siguiendo el método ya delineado, separamos las variables y escribimos la ecuación en la forma

$$y^2\,dy = (x - 5)dx\ .$$

Al integrar tenemos

$$\int y^2\,dy = \int (x - 5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C\ ,$$

y al despejar y en esta última ecuación se tiene

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + 3C\right)^{1/3}\ .$$

Como C es una constante de integración que puede ser cualquier número real, $3C$ también puede ser cualquier número real. Al reemplazar $3C$ por el símbolo K, tenemos

$$y - \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + K\right)^{1/3}\ .$$

Si queremos apegarnos a la costumbre de seguir representando mediante C a una constante arbitraria, podemos usar C en vez de K en la respuesta final. Esta familia de soluciones se grafica en la figura 2.3. ■

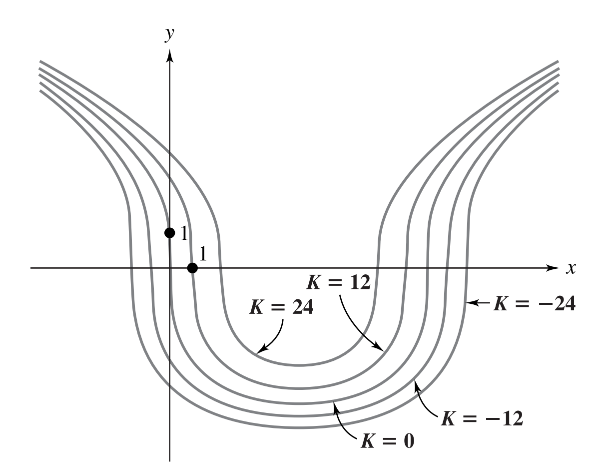


Figura 2.3 Familia de soluciones para el ejemplo 1

Como muestra el ejemplo 1, las ecuaciones separables se encuentran entre las más sencillas de resolver. Sin embargo, el procedimiento requiere una habilidad para el cálculo de integrales. Muchos de los procedimientos que serán analizados en el texto también exigen cierta familiaridad con las técnicas de integración. Para conveniencia del lector, en el forro aparece una breve tabla de integrales.

EJEMPLO 2 Resolver el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}, \qquad y(-1) = 0 . \tag{4}$$

SOLUCIÓN Al separar las variables e integrar tenemos

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+3},$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+3},$$

$$\ln|y-1| = \ln|x+3| + C . \tag{5}$$

En este momento podemos despejar y de manera explícita (conservando la constante C) o usar la condición inicial para determinar C y luego despejar y. Sigamos el primer camino.

Al exponenciar la ecuación (5), tenemos

$$e^{\ln|y-1|} = e^{\ln|x+3|+C} = e^C e^{\ln|x+3|},$$

$$|y-1| = e^C|x+3| = C_1|x+3| , \tag{6}$$

donde $C_1 := e^C$.[†] Ahora, dependiendo de los valores de y, tenemos $|y-1| = \pm(y-1)$; y de manera análoga, $|x+3| = \pm(x+3)$. Así, podemos escribir (6) como

$$y - 1 = \pm C_1(x+3) \quad \text{o} \quad y = 1 \pm C_1(x+3) ,$$

donde el signo depende (como ya indicamos) de los valores de x y y. Como C_1 es una constante *positiva* (recuerde que $C_1 = e^C > 0$), podemos reemplazar $\pm C_1$ por K, donde K representa ahora una constante *arbitraria* no nula. Obtenemos

$$y = 1 + K(x+3) . \tag{7}$$

Por último, determinamos K de modo que se satisfaga la condición inicial $y(-1) = 0$. Al hacer $x = -1$ y $y = 0$ en la ecuación (7) tenemos

$$0 = 1 + K(-1+3) = 1 + 2K ,$$

por lo que $K = -1/2$. Así, la solución del problema con valor inicial es

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x+3) = -\frac{1}{2}(x+1) . \tag{8}$$

[†]Recuerde que el símbolo $:=$ significa "se define como".

Método alternativo. El segundo método consiste en hacer primero $x = -1$ y $y = 0$ en la ecuación (5) y despejar C. En este caso obtenemos

$$\ln|0 - 1| = \ln|-1 + 3| + C ,$$
$$0 = \ln 1 = \ln 2 + C ,$$

y $C = -\ln 2$. Así, de (5) la solución y es dada de manera implícita por

$$\ln(1 - y) = \ln(x + 3) - \ln 2 .$$

Aquí hemos reemplazado $|y - 1|$ por $1 - y$ y $|x + 3|$ por $x + 3$, pues estamos interesados en x y y cercanas a los valores iniciales $x = -1$, $y = 0$ (para tales valores, $y - 1 < 0$ y $x + 3 > 0$). Al despejar y obtenemos

$$\ln(1 - y) = \ln(x + 3) - \ln 2 = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) ,$$
$$1 - y = \frac{x+3}{2} ,$$
$$y = 1 - \frac{1}{2}(x + 3) = -\frac{1}{2}(x + 1) ,$$

lo cual coincide con la solución (8) que se obtuvo mediante el primer método. ■

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación no lineal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2x + 1}{\cos y + e^y} . \quad \textbf{(9)}$$

SOLUCIÓN Al separar variables e integrar tenemos

$$(\cos y + e^y)dy = (6x^5 - 2x + 1)dx ,$$
$$\int(\cos y + e^y)dy = \int(6x^5 - 2x + 1)dx ,$$
$$\operatorname{sen} y + e^y = x^6 - x^2 + x + C .$$

En este momento llegamos a un atolladero. Quisiéramos despejar y en forma explícita, pero no podemos. Esto ocurre con frecuencia al resolver ecuaciones no lineales de primer orden. En consecuencia, al decir “resolver la ecuación”, tendremos que conformarnos en ocasiones al hallar una forma implícita de la solución. ■

La técnica de separación de variables, así como varias otras técnicas analizadas en este libro, conlleva la reescritura de una ecuación diferencial realizando ciertas operaciones algebraicas en ella. “Escribir $dy/dx = g(x)p(y)$ como $h(y)dy = g(x)dx$” equivale a dividir ambos lados entre $p(y)$. El lector puede recordar de sus cursos de álgebra que esto puede tener graves consecuencias. Por ejemplo, la ecuación $x(x - 2) = 4(x - 2)$ tiene dos soluciones: $x = 2$ y $x = 4$. Pero si “escribimos” la ecuación como $x = 4$ al dividir ambos lados entre $(x - 2)$, perdemos el rastro de la raíz $x = 2$. Así, debemos registrar los ceros de $(x - 2)$ antes de dividir entre este factor.

En el mismo sentido, debemos tomar en cuenta los ceros de $p(y)$ en la ecuación separable $dy/dx = g(x)p(y)$ antes de dividir. Después de todo, si (digamos) $g(x)p(y) = (x - 2)^2(y - 13)$, entonces podemos observar que la función constante $y(x) \equiv 13$ satisface la ecuación diferencial $dy/dx = g(x)p(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(13)}{dx} = 0 \ ,$$

$$g(x)p(y) = (x - 2)^2(13 - 13) = 0 \ .$$

De hecho, al resolver la ecuación del ejemplo 2,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 1}{x + 3} \ ,$$

obtenemos $y = 1 + K(x + 3)$ como conjunto de soluciones, donde K era una constante *no nula* (pues K reemplaza a $\pm e^C$). Pero observe que la función constante $y \equiv 1$ (que en este caso corresponde a $K = 0$) también es una solución de la ecuación diferencial. La razón por la que perdimos esta solución puede rastrearse hasta una división entre $y - 1$ en el proceso de separación. (Véase en el problema 31 un ejemplo en que se pierde una solución y no puede recuperarse haciendo a la constante $K = 0$).

Justificación formal del método

Concluimos esta sección revisando el procedimiento de separación de variables en un marco de referencia más riguroso. La ecuación diferencial original (2) se puede escribir en la forma

(10) $$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \ ,$$

donde $h(y) := 1/p(y)$. Si $H(y)$ y $G(x)$ denotan antiderivadas (integrales indefinidas) de $h(y)$ y $g(x)$, respectivamente, es decir,

$$H'(y) = h(y) \ , \qquad G'(x) = g(x) \ ,$$

podemos cambiar la ecuación (10) por

$$H'(y)\frac{dy}{dx} = G'(x) \ .$$

Por la regla de la cadena para la derivada, el lado izquierdo es la derivada de la función composición $H(y(x))$:

$$\frac{d}{dx}H\big(y(x)\big) = H'\big(y(x)\big)\frac{dy}{dx} \ .$$

Así, si $y(x)$ es una solución de la ecuación (2), entonces $H(y(x))$ y $G(x)$ son dos funciones de x que tienen la misma derivada. Por lo tanto, difieren por una constante:

(11) $$H\big(y(x)\big) = G(x) + C \ .$$

La ecuación (11) coincide con la ecuación (3), que fue deducida de manera informal, por lo que hemos verificado que esta última sirve para construir soluciones implícitas.

EJERCICIOS 2.2

En los problemas 1 a 6, determine si la ecuación diferencial dada es separable.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2y^3 + y + 4$. **2.** $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$.

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{x+y}}{x^2 + 2}$. **4.** $\dfrac{ds}{dt} = t \ln(s^{2t}) + 8t^2$.

5. $s^2 + \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{s + 1}{st}$.

6. $(xy^2 + 3y^2)dy - 2x\,dx = 0$.

En los problemas 7 a 16, resuelva la ecuación.

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x^2}{y^2}$. **8.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xy^3}$.

9. $\dfrac{dy}{dx} = y(2 + \operatorname{sen} x)$. **10.** $\dfrac{dx}{dt} = 3xt^2$.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2 y}{1 + x^2}$. **12.** $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1 - 4v^2}{3v}$.

13. $\dfrac{dx}{dt} + x^2 = x$. **14.** $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2(1 + y^2)$.

15. $y^{-1}\,dy + ye^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx = 0$.

16. $(x + xy^2)dx + e^{x^2}y\,dy = 0$.

En los problemas 17 a 26, resuelva el problema con valor inicial.

17. $y' = x^3(1 - y)$, $y(0) = 3$.

18. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + y^2)\tan x$, $y(0) = \sqrt{3}$.

19. $\dfrac{dy}{d\theta} = y \operatorname{sen} \theta$, $y(\pi) = -3$.

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2y + 1}$, $y(0) = -1$.

21. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y + 1}\cos x$, $y(\pi) = 0$.

22. $x^2\,dx + 2y\,dy = 0$, $y(0) = 2$.

23. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y$, $y(0) = \pi/4$.

24. $\dfrac{dy}{dx} = 8x^3e^{-2y}$, $y(1) = 0$.

25. $\dfrac{dy}{dx} = x^2(1 + y)$, $y(0) = 3$.

26. $\sqrt{y}\,dx + (1 + x)dy = 0$, $y(0) = 1$.

27. Soluciones que no pueden expresarse en términos de funciones elementales. Como se analizó en los cursos de cálculo, ciertas integrales indefinidas (antiderivadas) como $\int e^{x^2}\,dx$ no pueden expresarse en términos finitos utilizando funciones elementales. Al encontrar una integral de este tipo mientras se resuelve una ecuación diferencial, con frecuencia es útil usar la integración definida (integrales con límite superior variable). Por ejemplo, considere el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}y^2 , \qquad y(2) = 1 .$$

La ecuación diferencial se separa si dividimos entre y^2 y multiplicamos por dx. Integramos la ecuación separada de $x = 2$ a $x = x_1$ y obtenemos

$$\int_{x=2}^{x=x_1} e^{x^2}\,dx = \int_{x=2}^{x=x_1} \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}\Bigg|_{x=2}^{x=x_1} = -\frac{1}{y(x_1)} + \frac{1}{y(2)} .$$

Si t es la variable de integración y reemplazamos x_1 por x y $y(2)$ por 1, entonces podemos expresar la solución del problema con valor inicial como

$$y(x) = \left\{1 - \int_2^x e^{t^2}dt\right\}^{-1} .$$

Utilice la integración definida para hallar una solución explícita de los problemas con valores iniciales en (a)–(c).

(a) $dy/dx = e^{x^2}$, $y(0) = 0$.

(b) $dy/dx = e^{x^2}y^{-2}$, $y(0) = 1$.

(c) $dy/dx = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}\,(1 + y^2)$, $y(0) = 1$.

(d) Utilice un algoritmo de integración numérica (como la regla de Simpson, descrita en el apéndice B) para aproximar la solución de la parte (b) en $x = 0.5$ con tres cifras decimales.

28. Bosqueje la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 2yt\ , \qquad y(0) = 3$$

y determine su valor máximo.

29. Cuestiones de unicidad. En el capítulo 1 indicamos que, en las aplicaciones, la mayor parte de los *problemas con valor inicial* tendrán una solución única. De hecho, la existencia de soluciones únicas era tan importante que establecimos un teorema de existencia y unicidad, el teorema 1 de la página 12. El método para ecuaciones separables nos puede dar una solución, pero podría no darnos todas las soluciones (véase también el problema 31). Para ilustrar esto, considere la ecuación $dy/dx = y^{1/3}$.

(a) Use el método de separación de variables para mostrar que

$$y = \left(\frac{2x}{3} + C\right)^{3/2}$$

es una solución.

(b) Muestre que el problema con valor inicial $dy/dx = y^{1/3}$ y $y(0) = 0$ es satisfecho, para $C = 0$, por $y = (2x/3)^{3/2}$ para $x \geq 0$.

(c) Muestre ahora que la función constante $y \equiv 0$ también satisface el problema con valor inicial dado en la parte (b). Por lo tanto, este problema con valor inicial no tiene una única solución.

(d) Por último, muestre que las condiciones del teorema 1 de la página 12 no se satisfacen.

(La solución $y \equiv 0$ se perdió debido a la división entre cero en el proceso de separación).

30. Como vimos en esta sección, la separación de la ecuación (2) de la página 40 requiere la división entre $p(y)$, y esto puede esconder el hecho de que las raíces de la ecuación $p(y) = 0$ son en realidad soluciones constantes de la ecuación diferencial.

(a) Para explorar estos hechos con detalle, separe la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (x - 3)(y + 1)^{2/3}$$

y deduzca la solución

$$y = -1 + (x^2/6 - x + C)^3\ .$$

(b) Muestre que $y \equiv -1$ satisface la ecuación original $dy/dx = (x - 3)(y + 1)^{2/3}$.

(c) Muestre que no hay una elección de la constante C de modo que la solución de la parte (a) produzca la solución $y \equiv -1$. Así, perdemos la solución $y \equiv -1$ al dividir entre $(y + 1)^{2/3}$.

31. Intervalo de definición. Al analizar un problema con valor inicial $dy/dx = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$, no siempre es posible determinar el dominio de la solución $y(x)$ o el intervalo donde la función $y(x)$ satisface la ecuación diferencial.

(a) Resuelva la ecuación $dy/dx = xy^3$.

(b) Proporcione en forma explícita las soluciones de los problemas con valores iniciales $y(0) = 1$; $y(0) = 1/2$; $y(0) = 2$.

(c) Determine los dominios de las soluciones en la parte (b).

(d) Como se vio en la parte (c), los dominios de las soluciones dependen de las condiciones iniciales. Para el problema con valor inicial $dy/dx = xy^3$ con $y(0) = a$, $a > 0$, muestre que cuando a tiende a cero por la derecha, el dominio tiende a toda la recta real $(-\infty, \infty)$ y cuando a tiende a $+\infty$, el dominio se reduce a un solo punto.

(e) Bosqueje las soluciones del problema con valores iniciales $dy/dx = xy^3$ con $y(0) = a$ para $a = \pm 1/2,\ \pm 1$ y ± 2.

32. Radioisótopos y detección de cáncer Un radioisótopo utilizando en forma común para la detección de cáncer de mama es el tecnecio 99m. Este radionúclido se agrega a una solución que, inyectada a un paciente, se acumula en los lugares cancerosos. Luego se detecta la radiación del isótopo y se localiza el sitio, usando cámaras gama y otros dispositivos tomográficos.

El tecnecio 99m decae radioactivamente, de acuerdo con la ecuación $dy/dt = -ky$, donde $k = 0.1155/h$. La corta vida del tecnecio 99m tiene la ventaja que su radioactividad no pone en peligro al paciente. Una desventaja es que el isótopo debe fabricarse en un ciclotrón. Como los hospitales no tienen ciclotrones, las dosis de tecnecio 99m deben ordenarse de antemano con los surtidores médicos.

Suponga que debe administrarse una dosis de 5 milicuries (mCi) de tecnecio 99m a un paciente. Estime el tiempo de entrega desde el lugar de producción hasta la llegada a la sala de tratamiento del hospital como 24 horas y calcule la cantidad del radionúclido que debe solicitar el hospital para lograr administrar la dosis adecuada.

33. Mezclas. Suponga que una solución salina con 0.3 kg de sal por litro se introduce en un tanque que contenía originalmente 400 litros de agua y 2 kg de sal. Si la solución entra a razón de 10 litros/minuto, la mezcla se mantiene uniforme revolviéndola, y la mezcla sale con la misma razón, determine la masa de sal en el tanque después de 10 minutos (véase la figura 2.4). [*Sugerencia*: sea A el número de kilogramos de sal en el tanque, t minutos después de iniciar el proceso y aplique el siguiente planteamiento

razón de incremento A = **razón de entrada** − **razón de salida**

En la sección 3.2 se analizarán con más detalle los problemas de mezclas].

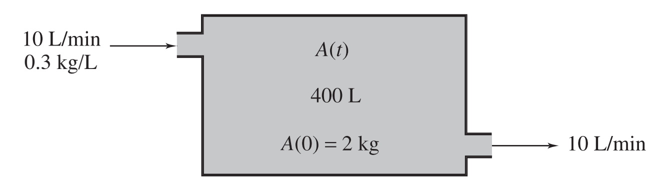


Figura 2.4 Representación esquemática de un problema de mezclas

34. Ley de enfriamiento de Newton. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, si un objeto a temperatura T se introduce en un medio con temperatura constante M, entonces la razón de cambio de T es proporcional a la diferencia de temperatura $M - T$. Esto produce la ecuación diferencial

$$dT/dt = k(M - T)\,.$$

(a) Resuelva la ecuación diferencial en términos de T.

(b) Un termómetro que marca 100°F se coloca en un medio con temperatura constante de 70°F. Después de 6 minutos, el termómetro marca 80°F. ¿Cuál es la lectura después de 20 minutos?

(En la sección 3.3 aparecen más aplicaciones de la ley de enfriamiento de Newton).

35. El plasma sanguíneo se almacena a 40°F. Antes de poder usarse, el plasma debe estar a 90°F. Al colocar el plasma en un horno a 120°F, se necesitan 45 minutos para que éste se caliente hasta 90°F. Suponga que podemos aplicar la ley de enfriamiento de Newton (problema 34). ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el plasma se caliente hasta 90°F si la temperatura del horno se fija en **(a)** 100°F, **(b)** 140°F y **(c)** 80°F?

36. Un recipiente con agua hirviendo a 100°C se retira de una estufa en el instante $t = 0$ y se deja enfriar en la cocina. Después de 5 minutos, la temperatura del agua ha descendido a 80°C y otros 5 minutos después ha bajado a 65°C. Suponga que se aplica la ley de enfriamiento de Newton (problema 34) y determine la temperatura (constante) de la cocina.

37. Interés compuesto. Si $P(t)$ es la cantidad de dinero en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual de *r% compuesto continuamente*, entonces

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100}P\,, \qquad t \text{ en años.}$$

Suponga que el interés es de 5% anual, $P(0) =$ \$1000 y que no hay retiros.

(a) ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 2 años?

(b) ¿En qué momento tendrá la cuenta \$4000?

(c) Si se agregan \$1000 a la cuenta cada 12 meses, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de $3\frac{1}{2}$ años?

38. Caída libre. En la sección 2.1 analizamos un modelo para un objeto que cae hacia la Tierra. Si sobre el objeto sólo actúan la resistencia del aire y la gravedad, se observó que la velocidad v debe satisfacer la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv\,,$$

donde m es la masa, g es la aceleración debida a la gravedad y $b > 0$ es una constante (véase la figura 2.1). Si $m = 100$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $b = 5$ kg/s y $v(0) = 10$ m/s, encuentre $v(t)$. ¿Cuál es la velocidad límite (es decir, terminal) del objeto?

39. Carrera del gran premio. El piloto A ha permanecido 3 millas *adelante* de su archienemigo B durante cierto tiempo. A sólo 2 millas antes de la meta, el piloto A se quedó sin gasolina y comenzó a desacelerar a una razón proporcional al cuadrado de su velocidad restante. Una milla después, la velocidad del piloto A se había reducido exactamente a la mitad. Si la velocidad del piloto B permaneció constante, ¿quién ganó la carrera?

2.3 ECUACIONES LINEALES

Un tipo de ecuación diferencial de primer orden que aparece con frecuencia en las aplicaciones es la ecuación lineal. Recuerde de la sección 1.1 que una **ecuación lineal de primer orden** es una ecuación que se puede expresar en la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \ , \tag{1}$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ sólo dependen de la variable independiente x, no así de y.

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 \operatorname{sen} x - (\cos x)y = (\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx}$$

es lineal, pues puede escribirse en la forma

$$(\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = x^2 \operatorname{sen} x \ .$$

Sin embargo, la ecuación

$$y\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y^3 = e^x + 1$$

no es lineal; no puede escribirse en la forma de la ecuación (1) debido a la presencia de los términos y^3 y $y\ dy/dx$.

Hay dos situaciones por las que la solución de una ecuación diferencial lineal es casi inmediata. La primera surge cuando el coeficiente $a_0(x)$ es idénticamente cero, ya que entonces la ecuación (1) se reduce a

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} = b(x) \ , \tag{2}$$

que es equivalente a

$$y(x) = \int \frac{b(x)}{a_1(x)}dx + C$$

[mientras $a_1(x)$ no se anule].

La segunda es menos trivial. Observe que si $a_0(x)$ fuese igual a la derivada de $a_1(x)$, es decir, $a_0(x) = a_1'(x)$, entonces los dos términos del lado izquierdo de la ecuación (1) conforman la derivada del producto $a_1(x)y$:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = a_1(x)y' + a_1'(x)y = \frac{d}{dx}[a_1(x)y]$$

Por lo tanto, la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{d}{dx}[a_1(x)y] = b(x) \tag{3}$$

y la solución es elemental nuevamente:

$$a_1(x)y = \int b(x)dx + C \ ,$$

$$y(x) = \frac{1}{a_1(x)}\left\{\int b(x)dx + C\right\} \ .$$

Pocas veces es posible reescribir una ecuación diferencial lineal de modo que se reduzca a una forma tan sencilla como (2). Sin embargo, podemos obtener la forma (3) multiplicando la ecuación original (1) por una función $\mu(x)$ bien elegida. Tal función $\mu(x)$ se llama entonces un "factor integrante" para la ecuación (1). La forma más sencilla consiste en dividir primero la ecuación original (1) entre $a_1(x)$ y escribirla en la **forma canónica**

(4) $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)} \quad .$$

donde $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$ y $Q(x) = b(x)/a_1(x)$.

Ahora queremos determinar $\mu(x)$ de modo que el lado izquierdo de la ecuación multiplicada

(5) $$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

sea precisamente la derivada del producto $\mu(x)y$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \boldsymbol{\mu(x)P(x)}y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \boldsymbol{\mu'(x)}y \ .$$

Es claro que para esto μ debe satisfacer

(6) $$\mu' = \mu P \ .$$

Para hallar tal función, reconocemos que la ecuación (6) es una ecuación diferencial separable, que podemos escribir como $(1/\mu)d\mu = P(x)dx$. Al integrar ambos lados tenemos

(7) $$\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int P(x)dx}} \ .$$

Con esta elección[†] de $\mu(x)$, la ecuación (5) se convierte en

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \ ,$$

que tiene la solución

(8) $$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)dx + C\right] \ .$$

[†]Cualquier elección de la constante de integración en $\int P(x)dx$ producirá una $\mu(x)$ adecuada.

En este caso, C es una constante arbitraria, de modo que (8) proporciona una familia a un parámetro de soluciones de (4). Esta forma se conoce como la **solución general** de (4).

Podemos resumir el método para resolver ecuaciones lineales como sigue.

MÉTODO PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES

(a) Escriba la ecuación en la forma canónica

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \ .$$

(b) Calcule el factor integrante $\mu(x)$ mediante la fórmula

$$\mu(x) = \exp\left[\int P(x)dx\right] \ .$$

(c) Multiplique la ecuación en forma canónica por $\mu(x)$ y, recordando que el lado izquierdo es precisamente $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$, obtenga

$$\underbrace{\mu(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y}_{\frac{d}{dx}(\mu(x)y)} = \mu(x)Q(x) \ ,$$

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x) \ .$$

(d) Integre la última ecuación y determine y dividiendo entre $\mu(x)$ para obtener (8).

EJEMPLO 1 Determine la solución general de

(9) $$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x \ , \qquad x > 0 \ .$$

SOLUCIÓN Para escribir esta ecuación lineal en forma canónica, multiplicamos por x para obtener

(10) $$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2\cos x \ .$$

En este caso, $P(x) = -2/x$, de modo que

$$\int P(x)dx = \int \frac{-2}{x}dx = -2\ln|x| \ .$$

Así, un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} \ .$$

Al multiplicar la ecuación (10) por $\mu(x)$ tenemos

$$\underbrace{x^{-2}\frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y}_{\frac{d}{dx}(x^{-2}y)} = \cos x \ ,$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = \cos x \ .$$

Ahora integramos ambos lados y despejamos y para obtener

$$x^{-2}y = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C \ .$$

(11) $$y = x^2 \operatorname{sen} x + Cx^2 \ .$$

Se verifica fácilmente que esta solución es válida para toda $x > 0$. En la figura 2.5 bosquejamos las soluciones para diversos valores de la constante C en (11). ■

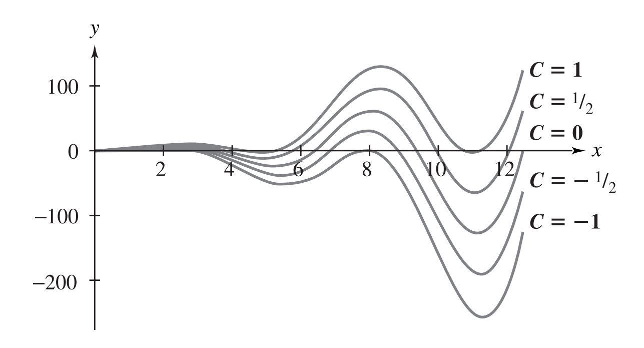


Figura 2.5 Gráfica de $y = x^2 \operatorname{sen} x + Cx^2$ para cinco valores de la constante C

En el siguiente ejemplo analizaremos una ecuación lineal que surge en el estudio del decaimiento radiactivo de un isótopo.

EJEMPLO 2 Una roca contiene dos isótopos radiactivos, RA_1 y RA_2, que pertenecen a la misma serie radiactiva; es decir, RA_1 decae en RA_2, quien luego decae en átomos estables. Suponga que la tasa con la que RA_1 decae en RA_2 es $50e^{-10t}$ kg/s. Como la razón de decaimiento de RA_2 es proporcional a la masa presente $y(t)$ de RA_2, la razón de cambio de RA_2 es

$$\frac{dy}{dt} = \text{razón de creación} - \text{razón de decaimiento} \ ,$$

(12) $$\frac{dy}{dt} = 50e^{-10t} - ky \ ,$$

donde $k > 0$ es la constante de decaimiento. Si $k = 2/\text{s}$ e inicialmente $y(0) = 40$ kg, determine la masa $y(t)$ de RA_2 para $t \geq 0$.

SOLUCIÓN La ecuación (12) es lineal, de modo que comenzamos escribiéndola en forma canónica

(13) $$\frac{dy}{dt} + 2y = 50e^{-10t} \ , \qquad y(0) = 40 \ ,$$

donde hemos sustituido $k = 2$ e incluido la condición inicial. Ahora vemos que $P(t) = 2$, de

modo que $\int P(t)dt = \int 2\, dt = 2t$. Así, un factor de integración es $\mu(t) = e^{2t}$. Al multiplicar la ecuación (13) por $\mu(t)$ obtenemos

$$\underbrace{e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y}_{\frac{d}{dt}(e^{2t}y)} = 50e^{-10t-2t} = 50e^{-8t} ,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y) = 50e^{-8t} .$$

Al integrar ambos lados y despejar y, tenemos

$$e^{2t}y = -\frac{25}{4}e^{-8t} + C ,$$

$$y = -\frac{25}{4}e^{-10t} + Ce^{-2t} .$$

Al sustituir $t = 0$ y $y(0) = 40$ se tiene

$$40 = -\frac{25}{4}e^{0} + Ce^{0} = -\frac{25}{4} + C ,$$

de modo que $C = 40 + 25/4 = 185/4$. Así, la masa $y(t)$ de RA_2 en el instante t está dada por

(14) $$y(t) = \left(\frac{185}{4}\right)e^{-2t} - \left(\frac{25}{4}\right)e^{-10t} , \qquad t \geq 0 . \quad ■$$

EJEMPLO 3 Para el problema con valor inicial

$$y' + y = \sqrt{1 + \cos^2 x}, \qquad y(1) = 4 ,$$

determinar el valor de $y(2)$.

SOLUCIÓN El factor integrante para la ecuación diferencial es, por la ecuación (7),

$$\mu(x) = e^{\int 1\, dx} = e^{x} .$$

La forma (8) de la solución general se lee

$$y(x) = e^{-x}\left(\int e^{x}\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx + C\right) .$$

Sin embargo, esta integral indefinida no se puede expresar en términos finitos con funciones elementales (recuerde una situación similar en el problema 27 de los ejercicios 2.2). Puesto que *podemos* usar algoritmos numéricos como la regla de Simpson (apéndice B) para realizar la integración *definida*, pasamos a la forma (5), que en este caso se lee

$$\frac{d}{dx}[e^{x}y] = e^{x}\sqrt{1 + \cos^2 x} ,$$

y consideramos la integral definida del valor inicial $x = 1$ hasta el valor deseado $x = 2$:

$$e^{x}y\Big|_{x=1}^{x=2} = e^{2}y(2) - e^{1}y(1) = \int_{x=1}^{x=2} e^{x}\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx .$$

Al insertar el valor de $y(1)$ y despejar, expresamos

$$y(2) = e^{-2+1}(4) + e^{-2}\int_1^2 e^x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \ .$$

Con la regla de Simpson tenemos que la integral definida es aproximadamente 4.841, de modo que

$$y(2) \approx 4e^{-1} + 4.841e^{-2} \approx 2.127 \ . \qquad \blacksquare$$

En el ejemplo 3 no tuvimos dificultad en expresar la integral para el factor integrante $\mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^x$. Es claro que habrá situaciones en que esta integral no pueda expresarse mediante funciones elementales. En tales casos, deberemos recurrir a un procedimiento numérico como el método de Euler (sección 1.4) o una implantación "cíclica anidada" de la regla de Simpson. En el problema 27 se invita al lector a explorar tal posibilidad.

Como hemos establecido fórmulas explícitas para las soluciones de las ecuaciones diferenciales *lineales* de primer orden, obtenemos como consecuencia una demostración directa del siguiente teorema.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Teorema 1. Supóngase que $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo (a, b) que contiene al punto x_0. Entonces para cualquier elección del valor inicial y_0, existe una única solución $y(x)$ en (a, b) al problema de valor inicial

(15) $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \ .$$

De hecho, la solución es dada por (8) para un valor adecuado de C.

Los aspectos esenciales de la demostración del teorema 1 aparecen en las deliberaciones que conducen a la ecuación (8); el problema 34 proporciona los detalles. Este teorema difiere del teorema 1 de la página 12 en que para el problema *lineal* con valor inicial (15) tenemos la existencia y unicidad de la solución en *todo* el intervalo (a, b), en vez de algún intervalo menor no determinado con centro en x_0.

La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales es una rama importante de las matemáticas, no sólo porque estas ecuaciones aparecen en las aplicaciones, sino también por la elegante estructura que está asociada con ellas. Por ejemplo, las ecuaciones lineales de primer orden siempre tienen una solución general que está determinada por la ecuación (8). En los problemas 28 y 36 se describen otras propiedades de las ecuaciones lineales de primer orden. Las ecuaciones lineales de orden superior se analizan en los capítulos 4, 6 y 8.

EJERCICIOS 2.3

En los problemas 1 a 6, determine si la ecuación dada es separable, lineal, ninguna o ambas.

1. $x^2\dfrac{dy}{dx} + \cos x = y$.

2. $\dfrac{dx}{dt} + xt = e^x$.

3. $x\dfrac{dx}{dt} + t^2x = \operatorname{sen} t$.

4. $3t = e^t\dfrac{dy}{dt} + y\ln t$.

5. $(t^2+1)\dfrac{dy}{dt} = yt - y$.

6. $3r = \dfrac{dr}{d\theta} - \theta^3$.

En los problemas 7 a 16, obtenga la solución general de la ecuación.

7. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{3x}$.

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 2x + 1$.

9. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \sec\theta$.

10. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^{-3}$.

11. $(t + y + 1)dt - dy = 0$.

12. $\dfrac{dy}{dx} = x^2e^{-4x} - 4y$.

13. $y\dfrac{dx}{dy} + 2x = 5y^3$.

14. $x\dfrac{dy}{dx} + 3y + 2x^2 = x^3 + 4x$.

15. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + xy = x$.

16. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2x - 1 - 4xy$.

En los problemas 17 a 22, resuelva el problema con valor inicial.

17. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = xe^x$, $\quad y(1) = e - 1$.

18. $\dfrac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0$, $\quad y(0) = \dfrac{4}{3}$.

19. $t^3\dfrac{dx}{dt} + 3t^2x = t$, $\quad x(2) = 0$.

20. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} + 2 = 3x$, $\quad y(1) = 1$.

21. $\cos x\dfrac{dy}{dx} + y\,\mathrm{sen}\,x = 2x\cos^2 x$,

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32} .$$

22. $\mathrm{sen}\,x\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = x\,\mathrm{sen}\,x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

23. Decaimiento radiactivo. En el ejemplo 2, suponga que la razón con la que RA_1 decae a RA_2 es $40e^{-20t}$ kg/s y que la constante de decaimiento para RA_2 es $k = 5/\text{s}$. Determine la masa $y(t)$ de RA_2 para $t \geq 0$ si inicialmente $y(0) = 10$ kg.

24. En el ejemplo 2, la constante de decaimiento para el isótopo RA_1 era 10/s, lo que se expresa en el exponente del término de la razón $50e^{-10t}$ kg/s. Cuando la constante de decaimiento para RA_2 es $k = 2/\text{s}$, vemos que en la fórmula (14) para y, el término $(185/4)e^{-2t}$ domina a partir de cierto momento (tiene mayor magnitud para t grande).

(a) Vuelva a resolver el ejemplo 2 considerando $k = 20/\text{s}$. En este caso, ¿cuál término de la solución domina a partir de cierto momento?

(b) Vuelva a resolver el ejemplo 2 considerando $k = 10/\text{s}$.

25. (a) Use la integración definida para mostrar que la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 , \qquad y(2) = 1 ,$$

se puede expresar como

$$y(x) = e^{-x^2}\left(e^4 + \int_2^x e^{t^2}\,dt\right) .$$

(b) Utilice la integración numérica (como la regla de Simpson del apéndice B) para aproximar la solución en $x = 3$.

26. Utilice la integración numérica (como la regla de Simpson del apéndice B) para aproximar la solución en $x = 1$ del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2(1 + \mathrm{sen}^2 x)}y = 1 , \qquad y(0) = 0 .$$

Garantice que su aproximación tiene una precisión de tres dígitos.

27. Considere el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \mathrm{sen}^2 x}\, y = x , \qquad y(0) = 2 .$$

(a) Utilice la integración definida para mostrar que el factor integrante para la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\mu(x) = \exp\left(\int_0^x \sqrt{1 + \mathrm{sen}^2 t}\,dt\right)$$

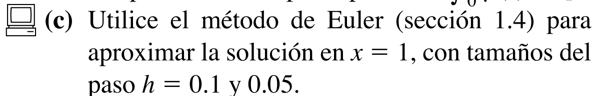
y que la solución del problema con valor inicial es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int_0^x \mu(s)\,s\,ds + \frac{2}{\mu(x)} .$$

(b) Obtenga una aproximación de la solución en $x = 1$ usando la integración numérica (como la regla de Simpson del apéndice B) en un ciclo anidado para estimar los valores de $\mu(x)$, y con ello, el valor de

$$\int_0^1 \mu(s)\,s\,ds .$$

[*Sugerencia*: Primero utilice la regla de Simpson para aproximar $\mu(x)$ en $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1$. Luego utilice estos valores y aplique la regla de Simpson de nuevo para aproximar $\int_0^1 \mu(s)s\,ds$].



(c) Utilice el método de Euler (sección 1.4) para aproximar la solución en $x = 1$, con tamaños del paso $h = 0.1$ y 0.05.

(Es muy difícil comparar directamente los méritos de ambos esquemas numéricos en (b) y (c), pues habría que tomar en cuenta la cantidad de evaluaciones funcionales en cada algoritmo, así como las precisiones inherentes).

28. Múltiplos constantes de soluciones.

(a) Muestre que $y = e^{-x}$ es una solución de la ecuación lineal

(16) $$\frac{dy}{dx} + y = 0\ ,$$

y $y = x^{-1}$ es una solución de la ecuación no lineal

(17) $$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0\ .$$

(b) Muestre que para cualquier constante C, Ce^{-x} es una solución de la ecuación (16), mientras que Cx^{-1} es una solución de la ecuación (17) sólo cuando $C = 0$ o 1.

(c) Muestre que para cualquier ecuación lineal de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0\ ,$$

si $\hat{y}(x)$ es una solución, entonces para cualquier constante C, la función $C\hat{y}(x)$ también es una solución.

29. Use su ingenio para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{4y} + 2x}\ .$$

[*Sugerencia*: Los papeles de las variables dependiente e independiente pueden invertirse].

30. Ecuaciones de Bernoulli. La ecuación

(18) $$\frac{dy}{dx} + 2y = xy^{2}$$

es un ejemplo de una ecuación de Bernoulli. (En la sección 2.6 se analizan con más detalle las ecuaciones de Bernoulli).

(a) Muestre que la sustitución $v = y^3$ reduce la ecuación (18) a la ecuación

(19) $$\frac{dv}{dx} + 6v = 3x\ .$$

(b) Despeje v en la ecuación (19). Luego haga la sustitución $v = y^3$ para obtener la solución de la ecuación (18).

31. Coeficientes discontinuos. Como veremos en el capítulo 3, hay ocasiones en que el coeficiente $P(x)$ de una ecuación lineal no es continuo debido a la existencia de discontinuidades de salto. Por fortuna, aun en este caso obtenemos una solución "razonable". Por ejemplo, considere el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = x\ , \qquad y(0) = 1\ ,$$

donde

$$P(x) := \begin{cases} 1\ , & 0 \le x \le 2\ , \\ 3\ , & x > 2\ . \end{cases}$$

(a) Determine la solución general para $0 \le x \le 2$.

(b) Elija la constante en la solución de la parte (a) de modo que se satisfaga la condición inicial.

(c) Determine la solución general para $x > 2$.

(d) Ahora seleccione la constante en la solución general de la parte (c) de modo que la solución de la parte (b) y la solución de la parte (c) coincidan en $x = 2$. Al pegar las dos soluciones, podemos obtener una función continua que satisface la ecuación diferencial en $x = 2$, punto donde su derivada no está definida.

(e) Bosqueje la gráfica de la solución desde $x = 0$ hasta $x = 5$.

32. Términos de forzamiento discontinuos. Hay ocasiones en que el término de forzamiento $Q(x)$ en una ecuación lineal deja de ser continuo debido a la aparición de las discontinuidades de salto. Por fortuna, aun en este caso podemos obtener una solución razonable imitando el procedimiento que se analizó en el problema 31. Utilice este procedimiento para hallar la solución continua del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 2y = Q(x)\ , \qquad y(0) = 0\ ,$$

donde

$$Q(x) := \begin{cases} 2\ , & 0 \le x \le 3\ , \\ -2\ , & x > 3\ . \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de la solución desde $x = 0$ hasta $x = 7$.

33. Puntos singulares. Los valores de x para los que $P(x)$ en la ecuación (4) no está definida, se llaman **puntos singulares** de la ecuación. Por ejemplo, $x = 0$ es un punto singular de la ecuación $xy' + 2y = 3x$, pues al escribir la ecuación en forma canónica, $y' + (2/x)y = 3$, vemos que $P(x) = 2/x$ no está definida en $x = 0$. En un intervalo que contenga un punto singular, las preguntas de existencia y unicidad de la solución quedan sin responder, pues el teorema 1 no puede aplicarse. Para mostrar el comportamiento posible de las soluciones cerca de un punto singular, considere las siguientes ecuaciones.

(a) Muestre que $xy' + 2y = 3x$ sólo tiene una solución definida en $x = 0$. Muestre entonces que el problema con valor inicial dado por esta ecuación y la condición inicial $y(0) = y_0$ tiene una única solución cuando $y_0 = 0$ y no tiene soluciones cuando $y_0 \neq 0$.

(b) Muestre que $xy' - 2y = 3x$ tiene una infinidad de soluciones definidas en $x = 0$. Luego muestre que el problema con valor inicial dado por esta ecuación y la condición inicial $y(0) = 0$ tiene una infinidad de soluciones.

34. Existencia y unicidad. Bajo las hipótesis del teorema 1, demostraremos que la ecuación (8) proporciona una solución de la ecuación (4) en (a, b). Podemos entonces elegir la constante C de la ecuación (8) de modo que se resuelva el problema con valor inicial (15).

(a) Muestre que como $P(x)$ es continua en (a, b), entonces $\mu(x)$ está definida en (7) y es una función continua y positiva que satisface $d\mu/dx = P(x)\mu(x)$ en (a, b).

(b) Como

$$\frac{d}{dx}\int \mu(x)Q(x)\,dx = \mu(x)Q(x)\ ,$$

verifique que la y dada en la ecuación (8) satisface la ecuación (4), derivando ambos lados de la ecuación (8).

(c) Muestre que si $\int \mu(x)Q(x)\,dx$ es la antiderivada cuyo valor en x_0 es 0 (es decir, $\int_{x_0}^{x} \mu(t)Q(t)dt$) y elegimos C como $y_0\mu(x_0)$, se satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

(d) Parta de la hipótesis de que $y(x)$ es una solución del problema con valor inicial (15) y muestre que el análisis que condujo a la ecuación (8) implica que $y(x)$ debe cumplir la ecuación (8). A continuación justifique que la condición inicial en (15) determina la constante C de manera única.

35. Mezclas. Suponga que una solución salina con 2 kg de sal por litro se introduce en un tanque que contiene inicialmente 500 litros de agua y 50 kg de sal. La solución entra al tanque a razón de 5 litros/minuto. La mezcla se mantiene uniforme revolviéndola, y sale del tanque a razón de 5 litros/minuto (véase la figura 2.6).

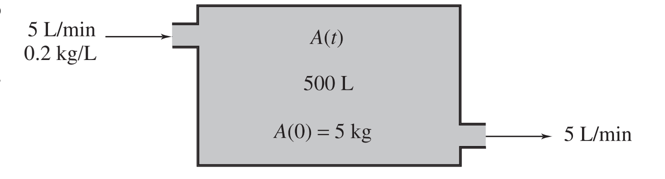


Figura 2.6 Problema de mezclas con razones de flujo idénticas

(a) Determine la concentración, en kilogramos/litro, de la sal en el tanque después de 10 minutos. [*Sugerencia*: Sea A el número de kilogramos de sal en el tanque, t minutos después de iniciar el proceso; use el hecho de que

razón de incremento en A = **razón de entrada** − **razón de salida.**

En la sección 3.2 se analizan con más detalle los problemas de mezclas].

(b) Después de 10 minutos, aparece un derrame en el tanque y comienza a salir del tanque otro litro por minuto (véase la figura 2.7). ¿Cuál será la concentración, en kilogramos/litro, de sal en el tanque después de 20 minutos a partir del inicio del derrame? [*Sugerencia*: Use el método que se analizó en los problemas 31 y 32].

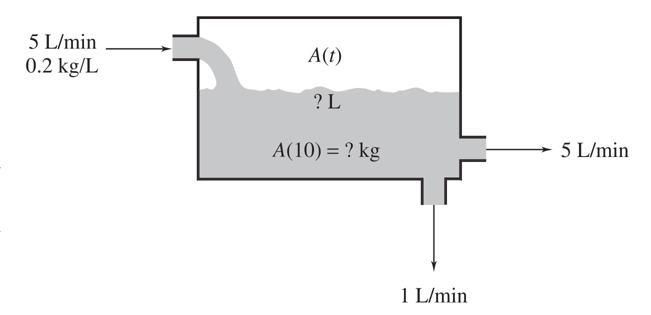


Figura 2.7 Problema de mezclas con razones de flujo distintas

36. Variación de parámetros. He aquí otro procedimiento para resolver ecuaciones lineales, particularmente útil para ecuaciones lineales de orden superior, el método de **variación de parámetros**. Se

basa en la idea de que al conocer tan sólo la *forma* de la solución, podemos sustituirla en la ecuación dada y hallar el valor de todas las incógnitas. Aquí ilustramos el método para las ecuaciones de primer orden (en las secciones 4.6 y 6.4 aparece la generalización a ecuaciones de orden superior).

(a) Muestre que la solución general de

$$\textbf{(20)} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

tiene la forma

$y(x) = Cy_h(x) + y_p(x)$,

donde y_h es una solución de la ecuación (20) cuando $Q(x) \equiv 0$, C es una constante, y $y_p(x) = v(x)y_h(x)$ para una función adecuada $v(x)$. [*Sugerencia*: Muestre que podemos considerar $y_h = \mu^{-1}(x)$ y luego utilice la ecuación (8)].

Al conocer esta forma, podemos determinar la función incógnita y_h resolviendo una ecuación separable. Después, una sustitución directa en la ecuación original dará una ecuación sencilla donde puede hallarse v.

Aplique este procedimiento para determinar la solución general de

$$\textbf{(21)} \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = x^2 , \qquad x > 0 ,$$

completando los siguientes pasos:

(b) Determine una solución no trivial y_h de la ecuación separable

$$\textbf{(22)} \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 0 , \qquad x > 0 .$$

(c) Suponiendo que (21) tiene una solución de la forma $y_p(x) = v(x)y_h(x)$, sustituya esto en la ecuación (21) y simplifique para obtener $v'(x) = x^2/y_h(x)$.

(d) Ahora, integre para obtener $v(x)$.

(e) Verifique que $y(x) = Cy_h(x) + v(x)y_h(x)$ es una solución general de (21).

37. Secreción de hormonas. Con frecuencia, la secreción de hormonas en la sangre es una actividad periódica. Si una hormona se secreta en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de la hormona en la sangre se puede representar mediante el problema con valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta \cos \frac{\pi t}{12} - kx , \qquad x(0) = x_0 ,$$

donde $x(t)$ es la cantidad de la hormona en la sangre en el instante t, α es la razón promedio de secreción, β es la cantidad de variación diaria en la secreción y k es una constante positiva que refleja la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre. Si $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$ y $x_0 = 10$, halle $x(t)$.

38. Utilice la técnica de separación de variables para deducir la solución (7) de la ecuación diferencial (6).

39. La temperatura T (en unidades de 100°F) de un salón de clases de una universidad en un día frío de invierno varía con el tiempo t (en horas) de acuerdo con

$$\frac{dT}{dt} = \begin{cases} 1 - T , & \text{si el calefactor está encendido.} \\ -T , & \text{si el calefactor está apagado.} \end{cases}$$

Suponga que $T = 0$ a las 9 A.M., que el calefactor está encendido de las 9 a las 10 A.M., apagado de las 10 a las 11 A.M., encendido de 11 a 12 de mediodía, y así sucesivamente por el resto del día. ¿A qué temperatura estará el salón a mediodía? ¿Y a las 5 P.M.?

2.4 ECUACIONES EXACTAS

Suponga que la función matemática $F(x, y)$ representa cierta cantidad física, como la temperatura, en una región del plano (x, y). Entonces, las curvas de nivel de F, donde $F(x, y) = constante$, pueden interpretarse como isotermas en un mapa del clima, como se muestra en la figura 2.8.

¿Cómo se calcula la pendiente de la tangente a una curva de nivel? Fácil: como $F(x, y) = constante$ en la curva de nivel, la diferencial total de F a lo largo de la curva es igual a cero:

$$\textbf{(1)} \qquad dF(x, y) := \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 .$$

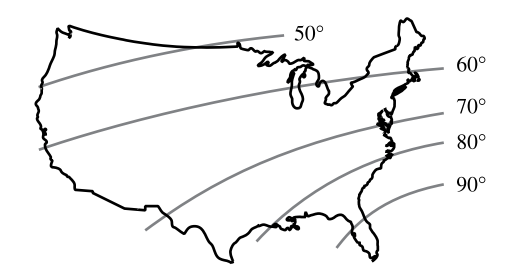


Figura 2.8 Curvas de nivel de $F(x, y)$

Así, la ecuación para su pendiente $f(x, y)$ en el punto (x, y) está dada por

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} .$$

Como la ecuación (2) tiene la forma de una ecuación diferencial, podríamos invertir esta lógica y obtener una técnica muy sencilla para resolver algunas ecuaciones diferenciales. Después de todo, cualquier ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ se puede escribir en la forma diferencial

$$\textbf{(3)} \qquad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

(de varias formas). Ahora, si el lado izquierdo de la ecuación (3) se puede identificar como una diferencial total:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x, y) ,$$

entonces sus soluciones están dadas (de manera implícita) por las curvas de nivel

$$F(x, y) = C$$

para una constante arbitraria C.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y} .$$

SOLUCIÓN Algunas de las opciones de formas diferenciales que corresponden a esta ecuación son

$$(2xy^2 + 1)dx + 2x^2y\, dy = 0 ,$$

$$\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y}dx + dy = 0 ,$$

$$dx + \frac{2x^2y}{2xy^2 + 1}dy = 0 , \quad \text{etc.}$$

Sin embargo, la primera forma es mejor para nuestros fines, pues es una diferencial total de la función $F(x, y) = x^2y^2 + x$:

$$(2xy^2 + 1)dx + 2x^2y\,dy = d\left[x^2y^2 + x\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + x)dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + x)dy\ .$$

Así, las soluciones están dadas de manera implícita por la fórmula $x^2y^2 + x = C$. Véase la figura 2.9. ■

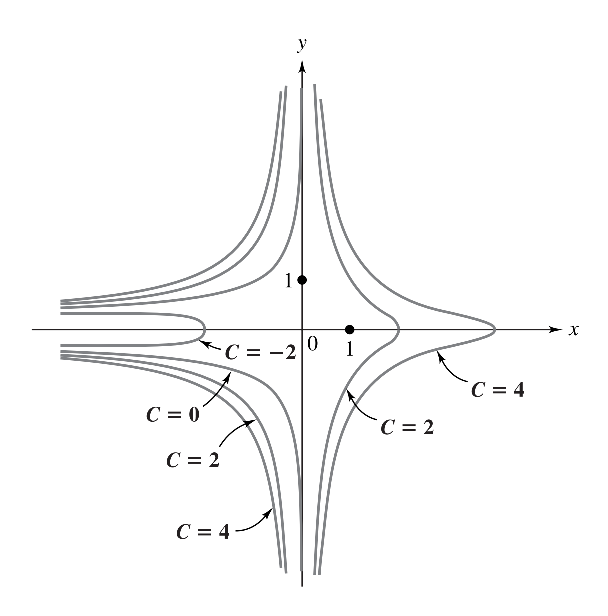


Figura 2.9 Soluciones del ejemplo 1

A continuación presentamos algo de terminología.

FORMA DIFERENCIAL EXACTA

Definición 2. La forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es **exacta** en un rectángulo R si existe una función $F(x, y)$ tal que

(4) $$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

para toda (x, y) en R. Es decir, la diferencial total de $F(x, y)$ satisface

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy\ .$$

Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta, entonces la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es llamada **ecuación exacta**.

Como es de sospechar, en las aplicaciones es raro que una ecuación diferencial se presente en la forma diferencial exacta. Sin embargo, el procedimiento de solución es tan rápido y sencillo para estas ecuaciones que les dedicaremos la presente sección. Del ejemplo 1, vemos que necesitamos (i) un criterio para determinar si una forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es exacta y, en tal caso, (ii) un procedimiento para determinar la propia función $F(x, y)$.

El criterio para la exactitud surge de la siguiente observación. Si

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \ ,$$

entonces el teorema de cálculo relativo a la igualdad de las derivadas parciales mixtas continuas

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}$$

indica una "condición de compatibilidad" sobre las funciones M y N:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x, y) \ .$$

De hecho, el teorema 2 indica que la condición de compatibilidad también es *suficiente* para que una forma diferencial sea exacta.

CRITERIO DE EXACTITUD

Teorema 2. Suponga que las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas en un rectángulo R. Entonces

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación exacta en R si y sólo si la condición de compatibilidad

(5) $$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

se cumple para toda (x, y) en R.†

Antes de realizar la demostración del teorema 2, observe que en el ejemplo 1 la forma diferencial que condujo a la diferencial total fue

$$(2xy^2 + 1)dx + (2x^2y)dy = 0 \ .$$

---

†***Nota histórica:*** Este teorema fue demostrado por Leonhard Euler en 1734.

Confirmamos fácilmente las condiciones de compatibilidad:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + 1) = 4xy \ ,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) = 4xy \ .$$

También es claro el hecho de que las otras formas diferenciales consideradas,

$$\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y}dx + dy = 0 \ , \qquad dx + \frac{2x^2y}{2xy^2 + 1}dy = 0 \ ,$$

no satisfacen las condiciones de compatibilidad.

Demostración del teorema 2. El teorema tiene dos partes: la exactitud implica compatibilidad y la compatibilidad implica exactitud. En primer lugar, hemos visto que si la ecuación diferencial es exacta, entonces los dos miembros de la ecuación (5) son simplemente las segundas parciales mixtas de una función $F(x, y)$. Como tales, su igualdad queda garantizada por el teorema de cálculo que afirma que las segundas parciales mixtas son iguales si son continuas. Como la hipótesis del teorema 2 garantiza esta última condición, la ecuación (5) queda justificada.

En vez de proceder con la demostración de la segunda parte del teorema, deduciremos una fórmula para una función $F(x, y)$ que satisfaga $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$. Al integrar la primera ecuación con respecto de x tenemos

(6) $$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \ .$$

Observe que en vez de utilizar C para representar la constante de integración, hemos escrito $g(y)$. Esto se debe a que y se mantiene fija al integrar con respecto de x, y por tanto nuestra "constante" podría depender de y. Para determinar $g(y)$, derivamos ambos lados de (6) con respecto a y para obtener

(7) $$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + \frac{\partial}{\partial y}g(y) \ .$$

Como g sólo es función de y, podemos escribir $\partial g/\partial y = g'(y)$ y despejar a $g'(y)$ en (7) para obtener

$$g'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx \ .$$

Como $\partial F/\partial y = N$, esta última ecuación se convierte en

(8) $$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx \ .$$

Observe que aunque el lado derecho de (8) indica una posible dependencia de x, *las apariciones de esta variable deben cancelarse*, pues el lado derecho $g'(y)$ sólo depende de y. Al integrar (8) podemos determinar $g(y)$ salvo una constante numérica, y por tanto podemos determinar la función $F(x, y)$ salvo una constante numérica, a partir de las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$.

Para concluir la demostración del teorema 2, necesitamos mostrar que la condición (5) implica que $M\,dx + N\,dy = 0$ es una ecuación exacta. Hacemos esto exhibiendo una función $F(x, y)$ que satisface $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$. Por fortuna, no tenemos que ir lejos para en-

contrar tal función. El análisis en la primera parte de la demostración sugiere a (6) como candidato, donde $g'(y)$ está dada por (8). A saber, *definimos* $F(x, y)$ como.

(9) $$F(x, y) := \int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt + g(y) \ ,$$

donde (x_0, y_0) es un punto fijo en el rectángulo R y $g(y)$ queda determinada, salvo una constante numérica, por la ecuación

(10) $$g'(y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt \ .$$

Antes de continuar, debemos responder una pregunta extremadamente importante relativa a la definición de $F(x, y)$: ¿cómo podemos estar seguros (en esta parte de la demostración) que $g'(y)$, dada en la ecuación (10), es en realidad una función que sólo depende de y? Para mostrar que el lado derecho de (10) es independiente de x (es decir, que las apariciones de la variable x se cancelan), basta mostrar que su derivada parcial con respecto de x es igual a cero. Aquí es donde se utiliza la condición (5). Dejamos al lector este cálculo y la verificación de que $F(x, y)$ satisface las condiciones (4) (véanse los problemas 35 y 36). ■

La construcción en la demostración del teorema 2 proporciona en realidad un procedimiento explícito para resolver ecuaciones exactas. Recapitulemos y veamos algunos ejemplos.

MÉTODO PARA RESOLVER ECUACIONES EXACTAS

(a) Si $M\,dx + N\,dy = 0$ es exacta, entonces $\partial F/\partial x = M$. Integre esta última ecuación con respecto de x para obtener

(11) $$F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + g(y) \ .$$

(b) Para determinar $g(y)$, calcule la derivada parcial con respecto de y de ambos lados de la ecuación (11) y sustituya N en vez de $\partial F/\partial y$. Ahora podemos hallar $g'(y)$.

(c) Integre $g'(y)$ para obtener $g(y)$ salvo una constante numérica. Al sustituir $g(y)$ en la ecuación (11) se obtiene $F(x, y)$.

(d) La solución de $M\,dx + N\,dy = 0$ está dada de manera implícita por

$$F(x, y) = C.$$

(En forma alternativa, partiendo de $\partial F/\partial y = N$, la solución implícita se puede determinar integrando primero con respecto de y; véase el ejemplo 3).

EJEMPLO 2 Resolver

(12) $$(2xy - \sec^2 x)\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0 \ .$$

SOLUCIÓN En este caso, $M(x, y) = 2xy - \sec^2 x$ y $N(x, y) = x^2 + 2y$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x} \ ,$$

la ecuación (12) es exacta. Para determinar $F(x, y)$, comenzamos integrando M con respecto de x:

(13) $$F(x, y) = \int (2xy - \sec^2 x)dx + g(y)$$
$$= x^2 y - \tan x + g(y) .$$

A continuación consideramos la derivada parcial de (13) con respecto de y y sustituimos $x^2 + 2y$ en vez de N:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) ,$$
$$x^2 + g'(y) = x^2 + 2y .$$

Así, $g'(y) = 2y$, y como la elección de la constante de integración no es importante, podemos considerar que $g(y) = y^2$. Por tanto, de (13), tenemos que $F(x, y) = x^2y - \tan x + y^2$ y la solución de la ecuación (12) está dada de manera implícita por $x^2y - \tan x + y^2 = C$. ■

Observación. El procedimiento para resolver ecuaciones exactas requiere varios pasos. Como verificación de su trabajo, observe que al despejar $g'(y)$ debemos obtener una función que sea independiente de x. Si esto no ocurre, entonces habrá un error en alguna parte de los cálculos de $F(x, y)$ o al calcular $\partial M/\partial y$ o $\partial N/\partial x$.

Al construir $F(x, y)$, podemos integrar primero $N(x, y)$ con respecto a y para obtener

(14) $$\boldsymbol{F(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x)}$$

y luego hallar $h(x)$. Ilustramos este método alternativo en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Resolver

(15) $$(1 + e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0 .$$

SOLUCIÓN En este caso, $M = 1 + e^x y + xe^x y$ y $N = xe^x + 2$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x + xe^x = \frac{\partial N}{\partial x} ,$$

la ecuación (15) es exacta. Si ahora integramos $N(x, y)$ con respecto de y, obtenemos

$$F(x, y) = \int (xe^x + 2)dy + h(x) = xe^x y + 2y + h(x) .$$

Al considerar la derivada parcial con respecto de x y sustituir en M, obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$
$$e^x y + xe^x y + h'(x) = 1 + e^x y + xe^x y .$$

Así, $h'(x) = 1$, de modo que consideramos $h(x) = x$. En este caso, $F(x, y) = xe^x y + 2y + x$, y la solución de la ecuación (15) está dada de manera implícita por $xe^x y + 2y + x = C$. En este caso, podemos despejar y para obtener $y = (C - x)/(2 + xe^x)$. ■

Observación. Como podemos utilizar cualquier procedimiento para hallar $F(x, y)$, puede valer la pena analizar cada una de las integrales $\int M(x, y)dx$ y $\int N(x, y)dy$. Si una es más fácil de evaluar que la otra, esto sería razón suficiente para preferir un método sobre el otro. [El lector escéptico puede tratar de resolver la ecuación (15) integrando primero $M(x, y)$].

EJEMPLO 4 Mostrar que

(16) $$(x + 3x^3 \operatorname{sen} y)dx + (x^4 \cos y)dy = 0$$

no es exacta, pero que al multiplicar esta ecuación por el factor x^{-1} se obtiene una ecuación exacta. Utilizar este hecho para resolver (16).

SOLUCIÓN En la ecuación (16), $M = x + 3x^3 \operatorname{sen} y$ y $N = x^4 \cos y$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^3 \cos y \not\equiv 4x^3 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x} ,$$

la ecuación (16) no es exacta. Al multiplicar (16) por el factor x^{-1}, obtenemos

(17) $$(1 + 3x^2 \operatorname{sen} y)dx + (x^3 \cos y)dy = 0 .$$

Para esta nueva ecuación, $M = 1 + 3x^2 \operatorname{sen} y$ y $N = x^3 \cos y$. Si verificamos la exactitud, tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x} ,$$

y por tanto, (17) es exacta. Al resolver (17), vemos que la solución está dada de manera implícita como $x + x^3 \operatorname{sen} y = C$. Como las ecuaciones (16) y (17) sólo difieren por el factor x, entonces cualquier solución de una será solución de la otra, siempre que $x \neq 0$. Por tanto, la solución de la ecuación (16) está dada de manera implícita por $x + x^3 \operatorname{sen} y = C$. ■

En la sección 2.5 analizaremos algunos métodos para determinar factores que, como x^{-1} en el ejemplo 4, cambien las ecuaciones inexactas por ecuaciones exactas.

EJERCICIOS 2.4

En los problemas 1 a 8, clasifique la ecuación como separable, lineal, exacta, o ninguna de las anteriores. Observe que algunas ecuaciones pueden tener más de una clasificación.

1. $(x^2y + x^4 \cos x)dx - x^3\,dy = 0$.

2. $(x^{10/3} - 2y)dx + x\,dy = 0$.

3. $(ye^{xy} + 2x)dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$.

4. $\sqrt{-2y - y^2}\,dx + (3 + 2x - x^2)dy = 0$.

5. $y^2\,dx + (2xy + \cos y)dy = 0$.

6. $xy\,dx + dy = 0$.

7. $\theta\,dr + (3r - \theta - 1)d\theta = 0$.

8. $[2x + y\cos(xy)]dx + [x\cos(xy) - 2y]dy = 0$.

En los problemas 9 a 20, determine si la ecuación es exacta. Si lo es, resuélvala.

9. $(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$.

10. $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$.

11. $(\cos x \cos y + 2x)dx - (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + 2y)dy = 0$.

12. $(e^x \operatorname{sen} y - 3x^2)dx + (e^x \cos y + y^{-2/3}/3)dy = 0$.

13. $(t/y)dy + (1 + \ln y)dt = 0$.

14. $e^t(y - t)dt + (1 + e^t)dy = 0$.

15. $\cos \theta\, dr - (r \operatorname{sen}\theta - e^{\theta})d\theta = 0$.

16. $(ye^{xy} - 1/y)dx + (xe^{xy} + x/y^2)dy = 0$.

17. $(1/y)dx - (3y - x/y^2)dy = 0$.

18. $[2x + y^2 - \cos(x + y)]\,dx + [2xy - \cos(x + y) - e^y]\,dy = 0$.

19. $\left(2x + \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{1 + x^2y^2} - 2y\right)dy = 0$.

20. $\left[\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + y\cos(xy)\right]dx + [x\cos(xy) - y^{-1/3}]dy = 0$.

En los problemas 21 a 26, resuelva el problema con valor inicial.

21. $(1/x + 2y^2x)dx + (2yx^2 - \cos y)dy = 0$, $y(1) = \pi$.

22. $(ye^{xy} - 1/y)dx + (xe^{xy} + x/y^2)dy = 0$, $y(1) = 1$.

23. $(e^ty + te^ty)dt + (te^t + 2)dy = 0$, $\quad y(0) = -1$.

24. $(e^tx + 1)dt + (e^t - 1)dx = 0$, $\quad x(1) = 1$.

25. $(y^2 \operatorname{sen} x)dx + (1/x - y/x)dy = 0$, $\quad y(\pi) = 1$.

26. $(\tan y - 2)dx + (x \sec^2 y + 1/y)dy = 0$, $y(0) = 1$.

27. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine la función más general $M(x, y)$ de modo que la ecuación sea exacta:
(a) $M(x, y)dx + (\sec^2 y - x/y)dy = 0$.
(b) $M(x, y)dx + (\operatorname{sen} x \cos y - xy - e^{-y})dy = 0$.

28. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine la función más general $N(x, y)$ de modo que la ecuación sea exacta:
(a) $[y\cos(xy) + e^x]\,dx + N(x, y)dy = 0$.
(b) $[ye^{xy} - 4x^3y + 2]\,dx + N(x, y)dy = 0$.

29. Considere la ecuación

$$(y^2 + 2xy)dx - x^2\, dy = 0 .$$

(a) Muestre que esta ecuación no es exacta.
(b) Muestre que al multiplicar ambos lados de la ecuación por y^{-2} se obtiene una nueva ecuación que es exacta.
(c) Use la solución de la ecuación exacta resultante para resolver la ecuación original.
(d) ¿Se perdieron soluciones en el proceso?

30. Considere la ecuación

$$(5x^2y + 6x^3y^2 + 4xy^2)dx + (2x^3 + 3x^4y + 3x^2y)dy = 0$$

(a) Muestre que la ecuación no es exacta.
(b) Multiplique la ecuación por x^ny^m y determine valores de n y m que hagan exacta a la ecuación resultante.
(c) Use la solución de la ecuación exacta resultante para resolver la ecuación original.

31. Justifique que, en la demostración del teorema 2, la función g se puede considerar como

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x, t)dt - \int_{y_0}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x} M(s, t)ds\right]dt ,$$

lo que puede expresarse como

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x, t)dt - \int_{x_0}^{x} M(s, y)ds + \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)ds .$$

Esto conduce en última instancia a la representación

$$\textbf{(18)} \qquad F(x, y) = \int_{y_0}^{y} N(x, t)dt + \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)ds .$$

Evalúe esta fórmula directamente, con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ para resolver nuevamente
(a) El ejemplo 1.
(b) El ejemplo 2.
(c) El ejemplo 3.

32. Trayectorias ortogonales. Un problema geométrico que aparece con frecuencia en ingeniería es el de determinar una familia de curvas (trayectorias ortogonales) que intersecte a una familia dada de curvas en forma ortogonal en cada punto. Por ejemplo, nos dan las líneas de fuerza de un campo eléctrico y queremos determinar la ecuación de las curvas equipotenciales. Considere la familia de curvas descritas por $F(x, y) = k$, donde k es un parámetro. Recuerde,

del análisis de la ecuación (2), que para cada curva de la familia, la pendiente está dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial y} .$$

(a) Recuerde que la pendiente de una curva que sea ortogonal (perpendicular) a una curva dada es justamente el negativo del recíproco de la pendiente de la curva dada. Use este hecho para mostrar que las curvas ortogonales a la familia $F(x, y) = k$ satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dx - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dy = 0 .$$

(b) Use la ecuación diferencial anterior para mostrar que las trayectorias ortogonales a la familia de círculos $x^2 + y^2 = k$ son justamente las líneas rectas que pasan por el origen (véase la figura 2.10).

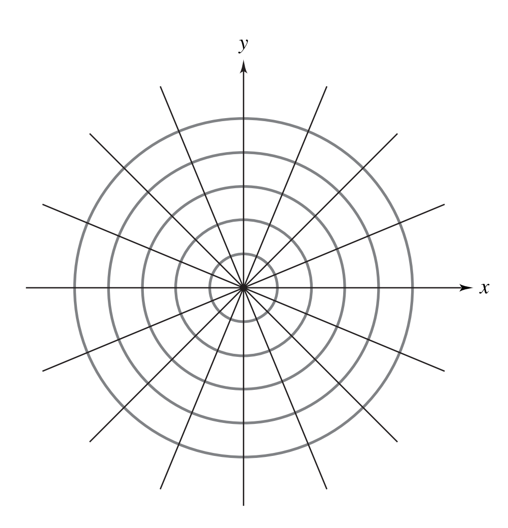


Figura 2.10 Las trayectorias ortogonales para círculos concéntricos son las rectas que pasan por el centro

(c) Muestre que las trayectorias ortogonales de la familia de hipérbolas $xy = k$ son las hipérbolas $x^2 - y^2 = k$ (véase la figura 2.11).

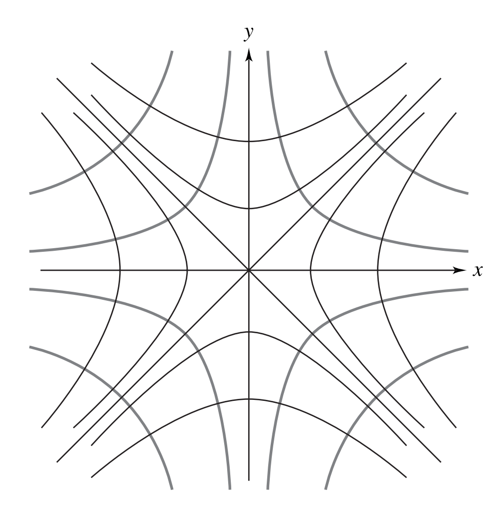


Figura 2.11 Familias de trayectorias ortogonales

33. Utilice el método del problema 32 para hallar las trayectorias ortogonales para cada una de las familias dadas de curvas.

(a) $2x^2 + y^2 = k$. **(b)** $y = kx^4$.
(c) $y = e^{kx}$. **(d)** $y^2 = kx$.

[*Sugerencia*: Exprese primero la familia en la forma $F(x, y) = k$].

34. Use el método descrito en el problema 32 para mostrar que las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $x^2 + y^2 = kx$, donde k es un parámetro, satisfacen

$$(2yx^{-1})dx + (y^2x^{-2} - 1)dy = 0 .$$

Determine las trayectorias ortogonales resolviendo la ecuación anterior. Bosqueje la familia de curvas, junto con sus trayectorias ortogonales. [*Sugerencia*: Trate de multiplicar la ecuación por $x^m y^n$ como en el problema 30].

35. Utilice la condición (5) para mostrar que el lado derecho de (10) es independiente de x, viendo que su derivada parcial con respecto de x es igual a cero. [*Sugerencia*: Como las derivadas parciales de M son continuas, el teorema de Leibniz permite intercambiar las operaciones de integración y derivación].

36. Verifique que $F(x, y)$ definida en (9) y (10) satisface las condiciones (4).

2.5 FACTORES INTEGRANTES ESPECIALES

Si consideramos la forma canónica de la ecuación diferencial lineal de la sección 2.3,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) ,$$

y la reescribimos en forma diferencial multiplicándola por dx, obtenemos

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 .$$

Es claro que esta forma no es exacta, pero se vuelve exacta al multiplicarla por el factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$. Tenemos que la forma es

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0$$

y la condición de compatibilidad es precisamente $\mu(x)P(x) = \mu'(x)$ (véase el problema 18).

Esto conduce a generalizar el concepto de factor integrante.

FACTOR INTEGRANTE

Definición 3. Si la ecuación

(1) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

no es exacta, pero la ecuación

(2) $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$,

resultante de multiplicar la ecuación (1) por la función $\mu(x, y)$ *sí* es exacta, entonces $\mu(x, y)$ es un **factor integrante**† de la ecuación (1).

EJEMPLO 1 Mostrar que $\mu(x, y) = xy^2$ es un factor integrante de

(3) $(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0$.

Utilice este factor integrante para resolver la ecuación.

SOLUCIÓN Dejaremos al lector la verificación de que (3) no es exacta. Al multiplicar (3) por $\mu(x, y) = xy^2$, obtenemos

(4) $(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0$.

Para esta ecuación tenemos que $M = 2xy^3 - 6x^2y^2$ y $N = 3x^2y^2 - 4x^3y$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 - 12x^2y = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) ,$$

la ecuación (4) es exacta. Por tanto, $\mu(x, y) = xy^2$ es en realidad un factor integrante de la ecuación (3).

†***Nota histórica:*** Una teoría general de factores integrantes fue desarrollada por Alexis Clairaut en 1739. Leonhard Euler también estudió clases de ecuaciones que se pudieran resolver usando un factor integrante específico.

Ahora resolveremos la ecuación (4) mediante el procedimiento de la sección 2.4. Para hallar $F(x, y)$, primero integramos M con respecto de x:

$$F(x, y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)dx + g(y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + g(y) \ .$$

Al considerar la derivada parcial con respecto de y y sustituir en N, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$
$$3x^2y^2 - 4x^3y + g'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y \ .$$

Así, $g'(y) = 0$, de modo que podemos considerar $g(y) \equiv 0$. Por tanto, $F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$ y la solución de la ecuación (4) está dada de manera implícita por

$$x^3y^3 - 2x^3y^2 = C \ .$$

Aunque las ecuaciones (3) y (4) tienen esencialmente las mismas soluciones, *es posible que se pierdan o ganen soluciones al multiplicar por* $\mu(x, y)$. En este caso, $y \equiv 0$ es una solución de la ecuación (4) que no lo es de la ecuación (3). La solución extraña surge debido a que, al multiplicar (3) por $\mu = xy^2$ para obtener (4), en realidad multiplicamos ambos lados de (3) por cero si $y \equiv 0$. Esto nos proporciona $y \equiv 0$ como solución de (4), aunque no sea solución de (3). ■

En general, al usar factores integrantes, usted debe verificar si cualquier solución de $\mu(x, y) = 0$ es en realidad una solución de la ecuación diferencial original.

¿Cómo hallar un factor integrante? Si $\mu(x, y)$ es un factor integrante de (1) con primeras derivadas parciales continuas, para verificar la exactitud de (2) debemos tener

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)N(x, y)] \ .$$

Al usar la regla del producto, esto se reduce a la ecuación

(5) $$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu \ .$$

Pero resolver la ecuación diferencial parcial (5) en términos de μ es por lo general más difícil que resolver la ecuación original (1). Sin embargo, hay dos excepciones importantes.

Supongamos que la ecuación (1) tiene un factor integrante que sólo depende de x; es decir, $\mu = \mu(x)$. En este caso, la ecuación (5) se reduce a la ecuación separable

(6) $$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right)\mu \ ,$$

donde $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ sólo depende de x (supuestamente). De manera similar, si la ecuación (1) tiene un factor integrante que sólo depende de y, entonces la ecuación (5) se reduce a la ecuación separable

(7) $$\frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right)\mu \ ,$$

donde $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ sólo depende de y.

Podemos invertir el argumento anterior. En particular, si $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ es una función que sólo depende de x, entonces podemos resolver la ecuación separable (6) para obtener el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right)dx\right]$$

para la ecuación (1). Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema.

FACTORES INTEGRANTES ESPECIALES

Teorema 3. Si $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ es continua y sólo depende de x, entonces

(8) $$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right)dx\right]$$

es un factor integrante para la ecuación (1).

Si $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ es continua y sólo depende de x, entonces

(9) $$\mu(y) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right)dy\right]$$

es un factor integrante para la ecuación (1).

El teorema 3 sugiere el siguiente procedimiento.

MÉTODO PARA HALLAR FACTORES INTEGRANTES ESPECIALES

Si $M\,dx + N\,dy = 0$ no es separable ni lineal, calcule $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$. Si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, entonces la ecuación es exacta. Si no es exacta, considere

(10) $$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\Big) .$$

Si (10) sólo depende de x, entonces un factor integrante está dado por la fórmula (8). En caso contrario, considere

(11) $$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\Big) .$$

Si (11) sólo depende de y, entonces un factor integrante está dado por la fórmula (9).

EJEMPLO 2 Resolver

(12) $$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0 .$$

SOLUCIÓN Una rápida inspección muestra que la ecuación (12) no es separable ni lineal. Observe además que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \not\equiv (2xy - 1) = \frac{\partial N}{\partial x} .$$

Como (12) no es exacta, calculamos

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = \frac{-2}{x} \ .$$

Obtenemos una función que sólo depende de x, de modo que un factor integrante de (12) está dado por la fórmula (8). Es decir,

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{-2}{x}dx\right) = x^{-2} \ .$$

Al multiplicar (12) por $\mu = x^{-2}$, obtenemos la ecuación exacta

$$(2 + yx^{-2})dx + (y - x^{-1})dy = 0 \ .$$

Al resolver esta ecuación, deducimos en última instancia la solución implícita

(13) $$2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C \ .$$

Observe que la solución $x \equiv 0$ se perdió al multiplicar por $\mu = x^{-2}$. Por tanto, (13) y $x \equiv 0$ son soluciones de la ecuación (12). ■

Hay muchas ecuaciones diferenciales que no quedan cubiertas por el teorema 3, aunque para ellas exista un factor integrante. Sin embargo, la principal dificultad consiste en hallar una fórmula explícita para estos factores integrantes, que en general dependerán de x y y.

EJERCICIOS 2.5

En los problemas 1 a 6, identifique la ecuación como separable, lineal, exacta o que tenga un factor integrante que sólo dependa de x o sólo dependa de y.

1. $(2y^3 + 2y^2)dx + (3y^2x + 2xy)dy = 0$.

2. $(2x + yx^{-1})dx + (xy - 1)dy = 0$.

3. $(y^2 + 2xy)dx - x^2\,dy = 0$.

4. $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$.

5. $(2y^2x - y)dx + x\,dy = 0$.

6. $(x^2\operatorname{sen}x + 4y)dx + x\,dy = 0$.

En los problemas 7 a 12, resuelva la ecuación.

7. $(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$.

8. $(2xy)dx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$.

9. $(2y^2 + 2y + 4x^2)dx + (2xy + x)dy = 0$.

10. $(x^4 - x + y)dx - x\,dy = 0$.

11. $(y^2 + 2xy)dx - x^2\,dy = 0$.

12. $(2xy^3 + 1)dx + (3x^2y^2 - y^{-1})dy = 0$.

En los problemas 13 y 14, determine un factor integrante de la forma x^ny^m y resuelva la ecuación.

13. $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0$.

14. $(12 + 5xy)dx + (6xy^{-1} + 3x^2)dy = 0$.

15. Muestre que si $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/(xM - yN)$ sólo depende del producto xy, es decir,

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{xM - yN} = H(xy) \ ,$$

entonces la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tiene un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. Proporcione la fórmula general para $\mu(xy)$.

16. Si $xM(x, y) + yN(x, y) \equiv 0$, determine la solución de la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

17. Flujo de fluidos. Las líneas de flujo asociadas con cierto flujo de fluidos son representadas por la familia de curvas $y = x - 1 + ke^{-x}$. Los potenciales de

velocidad del flujo son justamente las trayectorias ortogonales de esta familia.

(a) Use el método descrito en el problema 32 de los ejercicios 2.4 para mostrar que los potenciales de velocidad satisfacen

$$dx + (x, y)dy = 0\ .$$

[*Sugerencia*: Primero exprese la familia $y = x - 1 + ke^{-x}$ en la forma $F(x, y) = k$].

(b) Determine los potenciales de velocidad resolviendo la ecuación obtenida en la parte (a).

18. Verifique que cuando la ecuación diferencial lineal $[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$ se multiplica por $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, el resultado es exacto.

2.6 SUSTITUCIONES Y TRANSFORMACIONES

Cuando la ecuación

$$M(x, y)dy + N(x, y)dy = 0$$

no es separable, exacta ni lineal, podríamos transformarla en una ecuación que sepamos resolver. Éste, de hecho, fue nuestro enfoque en la sección 2.5, donde utilizamos un factor integrante para transformar nuestra ecuación original en una ecuación exacta.

En esta sección estudiamos cuatro tipos de ecuaciones que pueden transformarse en una ecuación separable o lineal por medio de una sustitución o transformación adecuada.

PROCEDIMIENTO DE SUSTITUCIÓN

(a) Identifique el tipo de ecuación y determine la sustitución o transformación adecuada.
(b) Escriba la ecuación original en términos de las nuevas variables.
(c) Resuelva la ecuación transformada.
(d) Exprese la solución en términos de las variables originales.

Ecuaciones homogéneas

ECUACIÓN HOMOGÉNEA

Definición 4. Si el lado derecho de la ecuación

(1) $$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se puede expresar como una función que sólo depende del cociente y/x, entonces decimos que la ecuación es **homogénea**.

Por ejemplo, la ecuación

(2) $$(x - y)dx + x\,dy = 0$$

se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x} = \frac{y}{x} - 1 \ .$$

Ya que hemos expresado $(y - x)/x$ como función del cociente y/x; [es decir, $(y - x)/x = G(y/x)$, donde $G(v) := v - 1$], entonces la ecuación (2) es homogénea.

La ecuación

(3) $$(x - 2y + 1)dx + (x - y)dy = 0$$

se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 1}{y - x} = \frac{1 - 2(y/x) + (1/x)}{(y/x) - 1} \ .$$

Por lo tanto, el lado derecho no se puede expresar como una función que sólo dependa de y/x, debido al término $1/x$ en el numerador. Por lo tanto, la ecuación (3) no es homogénea.

Un criterio para la homogeneidad de la ecuación (1) consiste en reemplazar x por tx y y por ty. Entonces (1) es homogénea si y sólo si

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

para toda $t \neq 0$ [véase el problema 43(a)].

Para resolver una ecuación homogénea, hacemos una sustitución más o menos evidente. Sea

$$\boldsymbol{v = \frac{y}{x}} \ .$$

Nuestra ecuación homogénea tiene ahora la forma

(4) $$\frac{dy}{dx} = G(v) \ ,$$

y sólo debemos expresar dy/dx en términos de x y v. Como $v = y/x$, entonces $y = vx$. Recuerde que v y y son funciones de x, por lo que podemos usar la regla del producto para la derivada y deducir de $y = vx$ que

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ .$$

Entonces sustituimos la expresión anterior para dy/dx en la ecuación (4) para obtener

(5) $$v + x\frac{dv}{dx} = G(v) \ .$$

La nueva ecuación (5) es separable, y podemos obtener su solución implícita de

$$\int \frac{1}{G(v) - v}dv = \int \frac{1}{x}dx \ .$$

Sólo falta expresar la solución en términos de las variables originales x y y.

EJEMPLO 1 Resolver

(6) $$(xy + y^2 + x^2)dx - x^2\,dy = 0 \;.$$

SOLUCIÓN Una verificación mostrará que la ecuación (6) no es separable, exacta ni lineal. Si expresamos (6) en la forma de derivada

(7) $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 \;,$$

entonces vemos que el lado derecho de (7) es una función de sólo y/x. Así, la ecuación (6) es homogénea.

Ahora, sea $v = y/x$ y recuerde que $dy/dx = v + x(dv/dx)$. Con estas sustituciones, la ecuación (7) se convierte en

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + v^2 + 1 \;.$$

La ecuación anterior es separable; al separar las variables e integrar, obtenemos

$$\int \frac{1}{v^2 + 1}dv = \int \frac{1}{x}dx \;,$$

$$\arctan v = \ln|x| + C \;.$$

Por tanto,

$$v = \tan(\ln|x| + C) \;.$$

Por último, sustituimos y/x en vez de v y despejamos y para obtener

$$y = x\tan(\ln|x| + C)$$

como solución explícita de la ecuación (6). Observe además que $x \equiv 0$ es una solución. ■

Ecuaciones de la forma $dy/dx = G(ax + by)$

Cuando el lado derecho de la ecuación $dy/dx = f(x, y)$ se puede expresar como una función de la combinación $ax + by$, donde a y b son constantes, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = G(ax + by) \;,$$

entonces la sustitución

$$\boldsymbol{z = ax + by}$$

transforma la ecuación en una ecuación separable. El método se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Resolver

(8) $$\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1} \;.$$

SOLUCIÓN El lado derecho se puede expresar como una función de $x - y$; es decir,

$$y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1} = -(x - y) - 1 + [(x - y) + 2]^{-1} ,$$

así que hacemos $z = x - y$. Para hallar dy/dx, derivamos $z = x - y$ con respecto de x para obtener $dz/dx = 1 - dy/dx$, de modo que $dy/dx = 1 - dz/dx$. Al sustituir esto en (8) se tiene

$$1 - \frac{dz}{dx} = -z - 1 + (z + 2)^{-1} ,$$

o

$$\frac{dz}{dx} = (z + 2) - (z + 2)^{-1} .$$

Al resolver esta ecuación separable, obtenemos

$$\int \frac{z + 2}{(z + 2)^2 - 1} dz = \int dx ,$$

$$\frac{1}{2} \ln|(z + 2)^2 - 1| = x + C_1 ,$$

de lo que se sigue

$$(z + 2)^2 = Ce^{2x} + 1 .$$

Por último, al reemplazar z por $x - y$ se tiene

$$(x - y + 2)^2 = Ce^{2x} + 1$$

como solución implícita de la ecuación (8). ■

Ecuaciones de Bernoulli

ECUACIÓN DE BERNOULLI

Definición 5. Una ecuación de primer orden que puede escribirse en la forma

(9) $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n ,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo (a, b) y n es un número real, es una **ecuación de Bernoulli**.†

Observe que cuando $n = 0$ o 1, la ecuación (9) es una ecuación lineal y se puede resol-

†***Nota histórica:*** Esta ecuación fue propuesta para ser resuelta por James Bernoulli en 1695. Fue resuelta por su hermano John Bernoulli. (James y John fueron dos de ocho matemáticos en la familia Bernoulli.) En 1696, Gottfried Leibniz mostró que la ecuación de Bernoulli se puede reducir a una ecuación lineal haciendo la sustitución $v = y^{1-n}$.

ver mediante el método analizado en la sección 2.3. Para otros valores de n, la sustitución

$$v = y^{1-n}$$

transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal, como ahora mostraremos.

Al dividir la ecuación (9) entre y^n se tiene

$$\textbf{(10)} \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \; .$$

Al hacer $v = y^{1-n}$ y usar la regla de la cadena, vemos que

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \; ,$$

de modo que la ecuación (10) se convierte en

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x) \; .$$

Como $1/(1-n)$ es sólo una constante, la última ecuación realmente es lineal.

EJEMPLO 3 Resolver

$$\textbf{(11)} \qquad \frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3 \; .$$

SOLUCIÓN Ésta es una ecuación de Bernoulli con $n = 3$, $P(x) = -5$ y $Q(x) = -5x/2$. Para transformar (11) en una ecuación lineal, primero dividimos entre y^3 para obtener

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x \; .$$

A continuación hacemos la sustitución $v = y^{-2}$. Como $dv/dx = -2y^{-3}dy/dx$, la ecuación transformada es

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x \; ,$$

$$\textbf{(12)} \qquad \frac{dv}{dx} + 10v = 5x \; .$$

La ecuación (12) es lineal, de modo que podemos resolverla en términos de v usando el método analizado en la sección 2.3. Al hacer esto, vemos que

$$v = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \; .$$

Al sustituir $v = y^{-2}$ se tiene la solución

$$y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \; .$$

En la última ecuación no se incluye la solución $y \equiv 0$ perdida en el proceso de división de (11) entre y^3. ■

Ecuaciones con coeficientes lineales

Hemos utilizado varias sustituciones de y para transformar la ecuación original en una nueva ecuación que se puede resolver. En algunos casos, debemos transformar x y y en nuevas variables, digamos, u y v. Éste es el caso para las **ecuaciones con coeficientes lineales**; es decir, ecuaciones de la forma

$$\textbf{(13)} \qquad (a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 ,$$

donde las a_i's, b_i's y c_i's son constantes. Dejaremos como ejercicio demostrar que si $a_1b_2 = a_2b_1$, la ecuación (13) se puede escribir en la forma $dy/dx = G(ax + by)$, que resolvimos mediante la sustitución $z = ax + by$.

Antes de considerar el caso general en que $a_1b_2 \neq a_2b_1$, analicemos primero la situación particular en que $c_1 = c_2 = 0$. La ecuación (13) se convierte entonces en

$$(a_1x + b_1y)dx + (a_2x + b_2y)dy = 0 ,$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y} = -\frac{a_1 + b_1(y/x)}{a_2 + b_2(y/x)} .$$

Esta ecuación es homogénea, de modo que podemos resolverla mediante el método que analizamos en esta sección.

El análisis anterior sugiere el siguiente procedimiento para resolver (13). Si $a_1b_2 \neq a_2b_1$, entonces buscamos una traslación de ejes de la forma

$$x = u + h \quad \text{y} \quad y = v + k ,$$

donde h y k son constantes, que cambie $a_1x + b_1y + c_1$ por $a_1u + b_1v$ y $a_2x + b_2y + c_2$ por $a_2u + b_2v$. Algo de álgebra elemental muestra que tal transformación existe si el sistema de ecuaciones

$$\textbf{(14)} \qquad \begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0 , \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución. Esto queda garantizado por la hipótesis $a_1b_2 \neq a_2b_1$, que geométricamente es equivalente a suponer que las dos rectas descritas por el sistema (14) se intersectan. Si (h, k) satisface (14), entonces las sustituciones $x = u + h$ y $y = v + k$ transforma la ecuación (13) en la ecuación homogénea

$$\textbf{(15)} \qquad \frac{dv}{du} = -\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v} = -\frac{a_1 + b_1(v/u)}{a_2 + b_2(v/u)} ,$$

que sabemos cómo resolver.

EJEMPLO 4 Resolver

$$\textbf{(16)} \qquad (-3x + y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0 .$$

SOLUCIÓN Como $a_1b_2 = (-3)(1) \neq (1)(1) = a_2b_1$, usaremos la traslación de ejes $x = u + h$, $y = v + k$,

donde h y k satisfacen el sistema

$$-3h + k + 6 = 0 \;,$$
$$h + k + 2 = 0 \;.$$

Al resolver el sistema anterior en términos de h y k tenemos que $h = 1$, $k = -3$. Por tanto, hacemos $x = u + 1$ y $y = v - 3$. Como $dy = dv$ y $dx = du$, al sustituir estas expresiones de x y y en la ecuación (16) se tiene

$$(-3u + v)du + (u + v)dv = 0$$

o

$$\frac{dv}{du} = \frac{3 - (v/u)}{1 + (v/u)} \;.$$

La ecuación anterior es homogénea, de modo que hacemos $z = v/u$. Entonces $dv/du = z + u(dz/du)$ y al sustituir en v/u, obtenemos

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{3 - z}{1 + z} \;.$$

Al separar variables tenemos

$$\int \frac{z + 1}{z^2 + 2z - 3}dz = -\int \frac{1}{u}du \;,$$
$$\frac{1}{2}\ln|z^2 + 2z - 3| = -\ln|u| + C_1 \;,$$

de lo que se sigue

$$z^2 + 2z - 3 = Cu^{-2} \;.$$

Al sustituir de nuevo en z, u y v, vemos que

$$(v/u)^2 + 2(v/u) - 3 = Cu^{-2} \;,$$
$$v^2 + 2uv - 3u^2 = C \;,$$
$$(y + 3)^2 + 2(x - 1)(y + 3) - 3(x - 1)^2 = C \;.$$

Esta última ecuación proporciona una solución implícita de (16). ■

EJERCICIOS 2.6

En los problemas 1 a 8, identifique la ecuación como homogénea, de Bernoulli, con coeficientes lineales o de la forma $y' = G(ax + by)$.

1. $(y - 4x - 1)^2\,dx - dy = 0$.
2. $2tx\,dx + (t^2 - x^2)dt = 0$.
3. $(t + x + 2)dx + (3t - x - 6)dt = 0$.
4. $dy/dx + y/x = x^3y^2$.
5. $(ye^{-2x} + y^3)dx - e^{-2x}\,dy = 0$.
6. $\theta\,dy - y\,d\theta = \sqrt{\theta y}\,d\theta$.
7. $(y^3 - \theta y^2)d\theta + 2\theta^2 y\,dy = 0$.
8. $\cos(x + y)dy = \operatorname{sen}(x + y)dx$.

Utilice el método que se analizó en la sección "Ecuaciones homogéneas" para resolver los problemas 9 a 16.

9. $(3x^2 - y^2)dx + (xy - x^3y^{-1})dy = 0$.

10. $(xy + y^2)dx - x^2\,dy = 0$.

11. $(y^2 - xy)dx + x^2\,dy = 0$.

12. $(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$.

13. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2 + t\sqrt{t^2 + x^2}}{tx}$.

14. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{\theta \sec(y/\theta) + y}{\theta}$.

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{3xy}$.

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}$.

Utilice el método que se analizó en la sección "Ecuaciones de la forma dy/dx = G(ax + by)" para resolver los problemas 17 a 20.

17. $dy/dx = \sqrt{x + y} - 1$.

18. $dy/dx = (x + y + 2)^2$.

19. $dy/dx = (x - y + 5)^2$.

20. $dy/dx = \operatorname{sen}(x - y)$.

Utilice el método que se analizó en la sección "Ecuaciones de Bernoulli" para resolver los problemas 21 a 28.

21. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$.

22. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$.

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} - x^2y^2$.

24. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x - 2} = 5(x - 2)y^{1/2}$.

25. $\dfrac{dx}{dt} + tx^3 + \dfrac{x}{t} = 0$.

26. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^xy^{-2}$.

27. $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^2 + 2r\theta}{\theta^2}$.

28. $\dfrac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$.

Utilice el método que se analizó en la sección "Ecuaciones con coeficientes lineales" para resolver los problemas 29 a 32.

29. $(-3x + y - 1)dx + (x + y + 3)dy = 0$.

30. $(x + y - 1)dx + (y - x - 5)dy = 0$.

31. $(2x - y)dx + (4x + y - 3)dy = 0$.

32. $(2x + y + 4)dx + (x - 2y - 2)dy = 0$.

En los problemas 33 a 40, resuelva la ecuación dada en:

33. El problema 1. **34.** El problema 2.

35. El problema 3. **36.** El problema 4.

37. El problema 5. **38.** El problema 6.

39. El problema 7. **40.** El problema 8.

41. Utilice la sustitución $v = x - y + 2$ para resolver la ecuación (8).

42. Utilice la sustitución $y = vx^2$ para resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \cos(y/x^2) \ .$$

43. **(a)** Muestre que la ecuación $dy/dx = f(x, y)$ es homogénea si y sólo si $f(tx, ty) = f(x, y)$. [*Sugerencia*: Sea $t = 1/x$].

(b) Una función $H(x, y)$ es **homogénea de orden *n*** si $H(tx, ty) = t^nf(x, y)$. Muestre que la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo orden.

44. Muestre que la ecuación (13) se reduce a una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = G(ax + by) \ ,$$

cuando $a_1b_2 = a_2b_1$. [*Sugerencia*: Si $a_1b_2 = a_2b_1$, entonces $a_2/a_1 = b_2/b_1 = k$, de modo que $a_2 = ka_1$ y $b_2 = kb_1$].

45. **Ecuaciones acopladas.** Al analizar ecuaciones acopladas de la forma

$$\frac{dy}{dt} = ax + by \ ,$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y \ ,$$

donde a, b, α y β son constantes, quisiéramos determinar la relación entre x y y en vez de las soluciones individuales $x(t)$, $y(t)$. Para esto, divida la primera ecuación entre la segunda para obtener

$$\textbf{(17)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{\alpha x + \beta y} \ .$$

Esta nueva ecuación es homogénea, de modo que podemos resolverla mediante la sustitución $v = y/x$. Nos referimos a las soluciones de (17) como **cur-**

vas integrales. Determine las curvas integrales del sistema

$$\frac{dy}{dt} = -4x - y \ ,$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y \ .$$

46. Ecuación de Riccati. Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{18}$$

es una ecuación de Riccati generalizada.†

(a) Si se conoce una solución de (18), digamos $u(x)$, muestre que la sustitución $y = u + 1/v$ reduce (18) a una ecuación lineal en v.

(b) Dado que $u(x) = x$ es una solución de

$$\frac{dy}{dx} = x^3(y - x)^2 + \frac{y}{x} \ ,$$

use el resultado de la parte (a) para hallar todas las demás soluciones a esta ecuación. (La solución particular $u(x) = x$ se puede hallar mediante inspección o usando un método de serie de Taylor; véase la sección 8.1).

†***Nota histórica:*** El conde Jacopo Riccati estudió un caso particular de esta ecuación en 1724, durante sus investigaciones de las curvas cuyos radios de curvatura sólo dependen de la variable y y no de la variable x.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo analizamos varios tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Las más importantes fueron las ecuaciones separables, lineales y exactas. A continuación resumimos sus principales características y métodos de solución.

Ecuaciones separables: $dy/dx = g(x)p(y)$. Separe las variables e integre.

Ecuaciones lineales: $dy/dx + P(x)y = Q(x)$. El factor integrante $\mu = \exp[\int P(x)dx]$ reduce la ecuación a $d(\mu y)/dx = \mu Q$, de modo que $\mu y = \int \mu Q\, dx + C$.

Ecuaciones exactas: $dF(x, y) = 0$. Las soluciones están dadas de manera implícita por $F(x, y) = C$. Si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, entonces $M\, dx + N\, dy = 0$ es exacta y F está dada por

$$F = \int M\, dx + g(y) \ , \quad \text{donde} \quad g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\, dx$$

o

$$F = \int N\, dy + h(x) \ , \quad \text{donde} \quad h'(x) = M - \frac{\partial}{\partial x}\int N\, dy \ .$$

Cuando una ecuación no es separable, lineal ni exacta, podría hallarse un factor integrante o realizar una sustitución que nos permita resolver la ecuación.

Factores integrantes especiales: $\mu M\, dx + \mu N\, dy = 0$ es exacta. Si $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ sólo depende de x, entonces

$$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right)dx\right]$$

es un factor integrante. Si $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ sólo depende de y, entonces

$$\mu(y) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right)dy\right]$$

es un factor integrante.

Ecuaciones homogéneas: $dy/dx = G(y/x)$. Sea $v = y/x$. Entonces $dy/dx = v + x(dv/dx)$ y la nueva ecuación en las variables v y x es separable.

Ecuaciones de la forma: $dy/dx = G(ax + by)$. Sea $z = ax + by$. Entonces $dz/dx = a + b(dy/dx)$ y la nueva ecuación en las variables z y x es separable.

Ecuaciones de Bernoulli: $dy/dx + P(x)y = Q(x)y^n$. Para $n \neq 0$ o 1, sea $v = y^{1-n}$. Entonces $dv/dx = (1 - n)y^{-n}(dy/dx)$ y la nueva ecuación en las variables v y x es lineal.

Coeficientes lineales: $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$. Para $a_1b_2 \neq a_2b_1$, sean $x = u + h$ y $y = v + k$, donde h y k satisfacen

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0 \ ,$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0 \ .$$

Entonces la nueva ecuación en las variables u y v es homogénea.

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 30, resuelva la ecuación.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{x+y}}{y-1}$.

2. $\dfrac{dy}{dx} - 4y = 32x^2$.

3. $(x^2 - 2y^{-3})dy + (2xy - 3x^2)dx = 0$.

4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} = x^2 - 4x + 3$.

5. $[\text{sen}(xy) + xy\cos(xy)]\,dx + [1 + x^2\cos(xy)]\,dy = 0$.

6. $2xy^3\,dx - (1 - x^2)dy = 0$.

7. $t^3y^2\,dt + t^4y^{-6}\,dy = 0$.

8. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = 2x^2y^2$.

9. $(x^2 + y^2)dx + 3xy\,dy = 0$.

10. $[1 + (1 + x^2 + 2xy + y^2)^{-1}]dx$
$+ [y^{-1/2} + (1 + x^2 + 2xy + y^2)^{-1}]dy = 0$.

11. $\dfrac{dx}{dt} = 1 + \cos^2(t - x)$.

12. $(y^3 + 4e^xy)dx + (2e^x + 3y^2)dy = 0$.

13. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2\text{sen}\,2x$.

14. $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{t-1} = t^2 + 2$.

15. $\dfrac{dy}{dx} = 2 - \sqrt{2x - y + 3}$.

16. $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x + \text{sen}\,x = 0$.

17. $\dfrac{dy}{d\theta} + 2y = y^2$.

18. $\dfrac{dy}{dx} = (2x + y - 1)^2$.

19. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$.

20. $\dfrac{dy}{d\theta} + \dfrac{y}{\theta} = -4\theta y^{-2}$.

21. $(y - 2x - 1)dx + (x + y - 4)dy = 0$.

22. $(2x - 2y - 8)dx + (x - 3y - 6)dy = 0$.

23. $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$.

24. $\left(\sqrt{y/x} + \cos x\right)dx + \left(\sqrt{x/y} + \text{sen}\,y\right)dy = 0$.

25. $y(x - y - 2)dx + x(y - x + 4)dy = 0$.

26. $\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

27. $(3x - y - 5)dx + (x - y + 1)dy = 0$.

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y - 1}{x + y + 5}$.

29. $(4xy^3 - 9y^2 + 4xy^2)dx$
$+ (3x^2y^2 - 6xy + 2x^2y)dy = 0$.

30. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2 - (x + y - 1)^2$.

En los problemas 31 a 40, resuelva el problema con valor inicial.

31. $(x^3 - y)dx + x\,dy = 0$, $y(1) = 3$.

32. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$, $y(1) = -4$.

33. $(t + x + 3)dt + dx = 0$, $x(0) = 1$.

34. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2\cos x$, $y(\pi) = 2$.

35. $(2y^2 + 4x^2)dx - xy\,dy = 0$, $y(1) = -2$.

36. $[2\cos(2x + y) - x^2]dx$
$+ [\cos(2x + y) + e^y]dy = 0$, $y(1) = 0$.

37. $(2x - y)dx + (x + y - 3)dy = 0$, $y(0) = 2$.

38. $\sqrt{y}\,dx + (x^2 + 4)dy = 0$, $y(0) = 4$.

39. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^{-1}y^{-1}$, $y(1) = 3$.

40. $\dfrac{dy}{dx} - 4y = 2xy^2$, $y(0) = -4$.

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. Un instructor de cierta universidad afirmó: "Lo único que necesitan saber acerca de las ecuaciones diferenciales de primer orden es cómo resolver aquellas que son exactas". Proporcione argumentos que apoyen y argumentos que desmientan la afirmación del instructor.

2. ¿Qué propiedades tienen las soluciones de ecuaciones lineales que no sean compartidas por las soluciones de ecuaciones separables o exactas? Dé algunos ejemplos específicos que apoyen sus conclusiones.

3. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ay + be^{-x} , \qquad y(0) = c ,$$

donde a, b y c son constantes. Describa lo que ocurre con el comportamiento asintótico de la solución cuando $x \to +\infty$ y varían las constantes a, b y c. Ilustre con figuras o gráficas.

A. *Ley de Torricelli para el flujo de fluidos*

Randall K. Campbell-Wright, Universidad de Tampa

¿Cuánto tiempo tarda el agua en salir por el agujero en el fondo de un tanque? Considere el tanque con agujero de la figura 2.12, que se drena a través de un pequeño agujero redondo. La **ley de Torricelli**† establece que cuando la superficie del agua está a una altura h, el agua se drena con la velocidad que tendría si cayera de manera libre desde una altura h (ignorando varias formas de fricción).

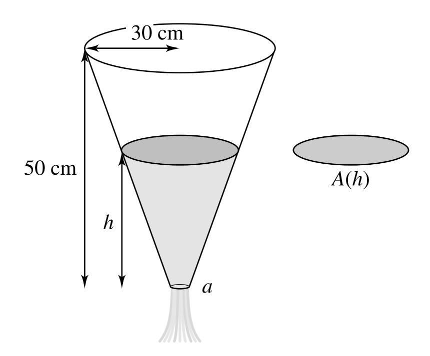


Figura 2.12 Tanque cónico

(a) Muestre que la ecuación diferencial de la gravedad estándar

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

conduce a la conclusión de que un objeto que cae desde una altura h aterrizará con una velocidad de $-\sqrt{2gh(0)}$.

(b) Sean $A(h)$ el área de la sección transversal del agua en el tanque a la altura h y a el área del agujero de drenado. La razón con que el agua sale del tanque en el instante t se puede expresar como el área de la sección transversal a la altura h por la razón de cambio de la altura del agua. En forma alternativa, la razón con la que el agua sale por el agujero se puede expresar como el área del agujero por la velocidad del agua drenada. Iguale estas expresiones e inserte la ley de Torricelli para deducir la ecuación diferencial

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh} \,. \qquad \textbf{(1)}$$

(c) El tanque cónico de la figura 2.12 tiene un radio de 30 cm cuando se llena hasta una profundidad inicial de 50 cm. Un pequeño agujero redondo en el fondo tiene un diá-

†***Nota histórica:*** Evangelista Torricelli (1608-1647) inventó el barómetro y trabajó para calcular el valor de la aceleración de la gravedad así como observar este principio del flujo de fluidos.

metro de 1 cm. Determine $A(h)$ y a y luego resuelva la ecuación diferencial en (1), describiendo así en forma explícita la altura del agua en este tanque en función del tiempo.

(d) Use su solución de (c) para predecir el tiempo que tardará el tanque en vaciarse completamente.

(e) ¿Qué se vaciará más rápido, el tanque con un agujero o un tanque cónico invertido con las mismas dimensiones, que se drena a través de un agujero del mismo tamaño? ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el tanque invertido?

(f) Busque un tanque de agua y calcule el tiempo que tarde en vaciarse. (Puede pedir prestado un embudo de su laboratorio de química o usar una hielera grande). El tanque debe ser lo bastante grande como para tardar varios minutos en vaciarse, y el agujero de drenado debe ser lo bastante grande como para que el agua fluya con libertad. La parte superior del tanque debe estar abierta (de modo que el agua no "succione"). Repita los pasos (c) y (d) para su tanque y compare la predicción de la ley de Torricelli con sus resultados experimentales.

B. *El problema de la barredora de nieve*

Para aplicar las técnicas que se analizan en este capítulo a problemas del mundo real, es necesario "traducir" estos problemas en preguntas que puedan resolverse desde el punto de vista matemático. El proceso de reformulación de un problema real como uno matemático requiere con frecuencia el establecimiento de ciertas hipótesis de simplificación. Para ilustrar este punto, considere el siguiente problema de la barredora de nieve:

> Una mañana comenzó a nevar muy fuerte y continuó nevando durante todo el día. Una barredora de nieve comenzó a funcionar a las 8:00 A.M. para limpiar un camino, limpió 2 millas hasta las 11:00 A.M. y una milla más hasta la 1:00 P.M. *¿A qué hora comenzó a nevar?*

Para resolver este problema, usted puede establecer dos hipótesis físicas en cuanto a la razón en que está nevando y la razón con la que la barredora puede limpiar el camino. Como no cesa de nevar, es razonable suponer que la nieve cae a una razón constante. Por los datos proporcionados (y nuestra experiencia), mientras más profunda sea la nieve, más lento se moverá la barredora. Con esto en mente, suponga que la velocidad (en millas/hora) con la que una barredora puede limpiar el camino es inversamente proporcional a la profundidad de la nieve.

C. *Dos barredoras de nieve*

Alar Toomre, Massachusetts Institute of Technology

Un día comenzó a nevar exactamente a mediodía con una velocidad grande y *constante*. Una barredora sale de su cochera a la 1:00 P.M. y otra sigue su rastro a las 2:00 P.M. (véase la figura 2.13).

(a) *¿En qué momento la segunda barredora choca con la primera?* Para responder esta pregunta, suponga, como en el proyecto A, que la velocidad (en millas/hora) con la que una barredora puede limpiar el camino es inversamente proporcional a la profundidad de la nieve (y por tanto al tiempo transcurrido desde que el camino no tenía nieve). [*Sugerencia*: Comience escribiendo las ecuaciones diferenciales para $x(t)$ y $y(t)$, las distancias que recorren la primera y segunda barredora, respectivamente, t

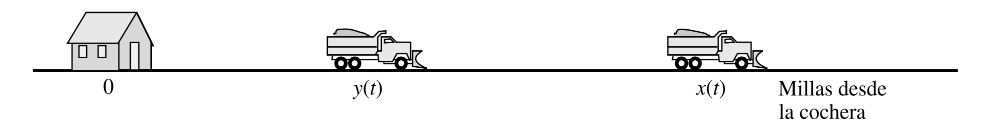


Figura 2.13 Método de las barredoras sucesivas

horas después del mediodía. Para resolver la ecuación diferencial que implica a y, ¡considere a t y no a y como la variable dependiente!]

(b) *¿Podría evitarse el choque si la segunda barredora sale a las 3:00 P.M.?*

D. *Ecuaciones de Clairaut y soluciones singulares*

Una ecuación de la forma

$$y = x\frac{dy}{dx} + f(dy/dx) \ , \qquad (2)$$

donde la función continuamente derivable $f(t)$ se evalúa en $t = dy/dx$, se llama **ecuación de Clairaut**.† El interés en estas ecuaciones se debe al hecho de que (2) tiene una familia a un parámetro de soluciones consistentes de *líneas rectas*. Además, la **envolvente** de esta familia (es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia) también es una solución de (2), y se conoce como **solución singular**.

Para resolver una ecuación de Clairaut:

(a) Derive la ecuación (2) con respecto de x, luego simplifique para mostrar que

$$[x + f'(dy/dx)]\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ , \qquad \text{donde} \qquad f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) \ . \qquad (3)$$

(b) Concluya de (3) que $dy/dx = c$ o $f'(dy/dx) = -x$. Suponga que $dy/dx = c$ y sustituya de nuevo en la ecuación (2) para obtener una familia de *líneas rectas solución*

$$y = cx + f(c) \ .$$

(c) Muestre que otra solución de (2) está dada de manera paramétrica por

$$x = -f'(p) \ ,$$

$$y = f(p) - pf'(p),$$

donde el parámetro $p = dy/dx$. Esta solución es la *solución singular*.

(d) Use el método anterior para determinar la familia de líneas rectas solución y la solución singular de la ecuación

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 .$$

En este caso, $f(t) = 2t^2$. Bosqueje varias de las líneas rectas solución junto con la solución singular en el mismo sistema de coordenadas. Observe que todas las líneas rectas solución son tangentes a la solución singular.

---

†***Nota histórica:*** Estas ecuaciones fueron estudiadas por Alexis Clairaut en 1734.

(e) Repita la parte (d) para la ecuación

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 = 0 \ .$$

E. *Comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones lineales*

Para ilustrar la forma en que el comportamiento asintótico del término de forzamiento $Q(x)$ afecta la solución de una ecuación lineal, considere la ecuación

$$\textbf{(4)} \qquad \frac{dy}{dx} + ay = Q(x) \ ,$$

donde la constante a es positiva y $Q(x)$ es continua en $[0, \infty)$.

(a) Muestre que la solución general de la ecuación (4) se puede escribir en la forma

$$y(x) = y(x_0)e^{-a(x-x_0)} + e^{-ax}\int_{x_0}^{x} e^{at}Q(t)dt \ ,$$

donde x_0 es una constante no negativa.

(b) Si $|Q(x)| \le k$ para $x \ge x_0$, donde k y x_0 son constantes no negativas, muestre que

$$|y(x)| \le |y(x_0)|e^{-a(x-x_0)} + \frac{k}{a}\left[1 - e^{-a(x-x_0)}\right] \quad \text{para } x \ge x_0 \ .$$

(c) Sea $z(x)$ una función que satisface la misma ecuación que (4), pero con función de forzamiento $\tilde{Q}(x)$. Es decir,

$$\frac{dz}{dx} + az = \tilde{Q}(x) \ ,$$

donde $\tilde{Q}(x)$ es continua en $[0, \infty)$. Muestre que si

$$|\tilde{Q}(x) - Q(x)| \le K \quad \text{para } x \ge x_0 \ ,$$

entonces

$$|z(x) - y(x)| \le |z(x_0) - y(x_0)|e^{-a(x-x_0)} + \frac{K}{a}\left[1 - e^{-a(x-x_0)}\right] \quad \text{para } x \ge x_0 \ .$$

(d) Ahora, muestre que si $Q(x) \to \beta$ cuando $x \to \infty$, entonces cualquier solución $y(x)$ de la ecuación (4) satisface que $y(x) \to \beta/a$ cuando $x \to \infty$. [*Sugerencia*: Considere $\tilde{Q}(x) \equiv \beta$ y $z(x) \equiv \beta/a$ en la parte (c)].

(e) Como una aplicación de la parte (d), suponga que una solución salina que contiene $q(t)$ kilogramos de sal por litro en el instante t se introduce en un tanque de agua a una velocidad fija y que la mezcla, que se mantiene uniforme revolviéndola, sale del tanque con la misma velocidad. Dado que $q(t) \to \beta$ cuando $t \to \infty$, use el resultado de la parte (d) para determinar la concentración límite de la sal en el tanque cuando $t \to \infty$ (véase el problema 35 de los ejercicios 2.3).

CAPÍTULO 3

Modelos matemáticos y métodos numéricos que implican ecuaciones de primer orden

3.1 MODELACIÓN MATEMÁTICA

Al adoptar las prácticas babilónicas de mediciones cuidadosas y observaciones detalladas, los antiguos griegos buscaban entender la naturaleza mediante el análisis lógico. Los convincentes argumentos de Aristóteles que indicaban que el mundo no es plano, sino esférico, condujeron a los intelectuales de la época a preguntarse: ¿cuál es la circunferencia de la Tierra? De manera sorprendente, Eratóstenes consiguió obtener una respuesta bastante precisa sin tener que salir de la antigua ciudad de Alejandría. Su método implicó ciertas hipótesis y simplificaciones: que la Tierra es una esfera perfecta, que los rayos del Sol viajan en trayectorias paralelas, que la ciudad de Siena estaba a 5000 estadios al sur de Alejandría, etc. Con estas idealizaciones, Eratóstenes creó un contexto matemático donde pudieran aplicarse los principios de la geometría.[†]

En la actualidad, como los científicos siguen tratando de profundizar en nuestro conocimiento de la naturaleza y los ingenieros siguen buscando, a un nivel más pragmático, respuestas a problemas técnicos, la técnica de representación de nuestro "mundo real" en términos matemáticos se ha convertido en una herramienta invaluable. Este proceso de imitación de la realidad mediante el lenguaje de las matemáticas se conoce como **modelación matemática**.

La formulación de problemas en términos matemáticos tiene varios beneficios. El primero es que nos exige establecer con claridad nuestras premisas. Con frecuencia, los problemas del mundo real son complejos e implican varios procesos distintos, posiblemente relacionados entre sí. Antes de proceder al tratamiento matemático, uno debe determinar las variables que sean significativas y las que pueden ser ignoradas. Con frecuencia, para las variables importantes, las relaciones se postulan en forma de leyes, fórmulas, teorías, etc. Estas hipótesis constituyen las **idealizaciones** del modelo.

Las matemáticas contienen muchos teoremas y técnicas para hacer deducciones lógicas y trabajar con las ecuaciones. Por lo tanto, proporcionan un contexto donde puede realizarse un análisis libre de conceptos preconcebidos sobre el resultado. También tiene gran impor-

[†]Para una lectura posterior, véase, por ejemplo, *The Mapmakers*, de John Noble Wilford (Vintage Books, Nueva York, 1982), capítulo 2.

tancia práctica el hecho de que las matemáticas proporcionen un formato para obtener respuestas numéricas mediante una computadora.

El proceso de construcción de un modelo matemático eficaz requiere cierta habilidad, imaginación y evaluación objetiva. Ciertamente, el conocimiento de varios modelos existentes que ilustren diversos aspectos de la modelación puede ayudar a tener una mejor idea del proceso. Varios libros y artículos excelentes están dedicados en forma exclusiva al tema.[†] En este capítulo nos concentraremos en ejemplos de modelos que impliquen ecuaciones diferenciales de primer orden. Al estudiar estos modelos y construir los suyos, podría ser útil el siguiente bosquejo general del proceso.

Formule el problema

Usted debe plantear el problema de modo que pueda "responderse" de manera matemática. Esto requiere el conocimiento del área del problema, al igual que las matemáticas. En esta etapa, usted tendrá que confirmar sus afirmaciones con expertos en el área y leer la bibliografía correspondiente.

Desarrolle el modelo

Aquí deben hacerse dos cosas. Primero, usted debe decidir cuáles variables son importantes y cuáles no. Luego, clasifique las primeras como variables independientes o variables dependientes. Las variables no importantes son aquellas que tienen poco o ningún efecto sobre el proceso. (Por ejemplo, al estudiar el movimiento de un cuerpo en caída, por lo general su color no es de interés). Las variables independientes son aquellas cuyo efecto es significativo y que servirán como entrada para el modelo.[††] Para el cuerpo que cae, su forma, masa, posición inicial, velocidad inicial y tiempo desde soltarlo son las posibles variables independientes. Las variables dependientes son aquellas que son afectadas por las variables independientes y que son importantes para resolver el problema. De nuevo, para un cuerpo que cae, su velocidad, posición y tiempo de impacto son posibles variables dependientes.

En segundo lugar, usted debe determinar o especificar las relaciones (por ejemplo, una ecuación diferencial) existentes entre las variables importantes. Esto requiere buenos conocimientos en el área y hacerse una idea del problema. Usted puede comenzar con un modelo básico y luego, con base en las pruebas, refinar el modelo según lo necesario. Por ejemplo, usted puede comenzar ignorando cualquier fricción que actúe sobre el cuerpo que cae. Entonces, si es necesario obtener una respuesta más aceptable, trate de tomar en cuenta cualquier fuerza de fricción que pueda afectar el movimiento.

Pruebe el modelo

Antes de tratar de "verificar" un modelo comparando su salida con los datos experimentales, hay que considerar las siguientes preguntas:

¿Son razonables las hipótesis?

¿Son dimensionalmente consistentes las ecuaciones? (Por ejemplo, no queremos sumar unidades de fuerza con unidades de velocidad).

[†]Véanse, por ejemplo, *A First Course in Mathematical Modeling*, 2a. edición, por F. R. Giordano y M. D. Weir (Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1997) o *Concepts of Mathematical Modeling*, por W. J. Meyer (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1984).

[††]En la formulación matemática del modelo, algunas de las variables independientes pueden ser llamadas **parámetros**.

¿Es el modelo internamente consistente, en el sentido de que las ecuaciones no se contradicen entre sí?

¿Tienen soluciones las ecuaciones importantes?

¿Son únicas las soluciones?

¿Qué tan difícil es obtener las soluciones?

¿Proporcionan estas soluciones una respuesta al problema en estudio?

De ser posible, trate de validar el modelo comparando sus predicciones con los datos experimentales. Comience con predicciones más bien sencillas que impliquen pocos cálculos o análisis. Entonces, al refinar el modelo, verifique si la precisión de las predicciones del modelo le parece aceptable. En algunos casos, es imposible la validación, o no es razonable desde un punto de vista social, político, económico o moral. Por ejemplo, ¿cómo validar un modelo que predice el momento en que el Sol se extinguirá?

Cada vez que se use el modelo para predecir el resultado de un proceso y con ello resolver un problema, esto proporciona una prueba del modelo que puede conducir a más refinamientos o simplificaciones. En muchos casos, un modelo se simplifica para obtener una respuesta más rápida o menos cara; manteniendo, por supuesto, la precisión suficiente.

Uno siempre debe recordar que un modelo *no* es la realidad, sino una representación de ésta. Los modelos más refinados *pueden* proporcionar una comprensión de los procesos naturales subyacentes. Por esta razón, los matemáticos aplicados luchan por modelos mejores y más refinados. Aun así, la prueba real de un modelo es su capacidad para determinar una respuesta aceptable para el problema planteado.

En este capítulo analizamos varios modelos que implican ecuaciones diferenciales. En la sección 3.2, Análisis por compartimentos, estudiamos problemas de mezclas y modelos de poblaciones. Las secciones 3.3 a 3.5 se basan en la física y examinan el calentamiento y el enfriamiento, la mecánica de Newton y los circuitos eléctricos. Por último, las secciones 3.6 y 3.7 contienen una breve introducción a algunas técnicas numéricas para resolver problemas de primer orden con valores iniciales. Esto nos permitirá estudiar modelos más realistas que no pueden resolverse mediante las técnicas del capítulo 2.

3.2 ANÁLISIS POR COMPARTIMENTOS

Muchos procesos complejos pueden descomponerse en varias etapas y todo el sistema se puede modelar describiendo las interacciones entre las distintas etapas. Tales sistemas se llaman sistemas por **compartimentos** y se exhiben en forma gráfica como **diagramas de bloque**. En esta sección estudiamos la unidad básica de estos sistemas, un único compartimento, y analizamos algunos procesos sencillos que pueden controlarse mediante tal modelo.

El sistema básico de un compartimento consta de una función $x(t)$ que representa la cantidad de una sustancia en el compartimento en el instante t, una razón de entrada con la que la sustancia entra al compartimento, y una razón de salida con la que la sustancia sale del compartimento (véase la figura 3.1 en la página 90).

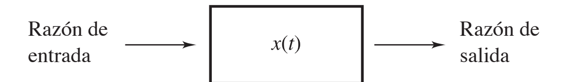


Figura 3.1 Representación esquemática de un sistema con un compartimento

Como la derivada de x con respecto de t se puede interpretar como la razón de cambio en la cantidad de la sustancia en el compartimento con respecto del tiempo, el sistema de un compartimento sugiere a

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{dx}{dt} = \textbf{razón de entrada} - \textbf{razón de salida}$$

como un modelo matemático para el proceso.

Problemas de mezclas

Un problema para el que el sistema de un compartimento proporciona una representación útil es la mezcla de fluidos en un tanque. Sea $x(t)$ la cantidad de una sustancia en un tanque (compartimento) en el instante t. Para usar el modelo de análisis por compartimentos, debemos determinar las razones con que esta sustancia entra y sale del tanque. En los problemas de mezclas, con frecuencia se tiene la razón con la que entra al tanque un fluido que contiene a la sustancia, junto con la concentración de la sustancia en ese fluido. Por lo tanto, al multiplicar la razón de flujo (volumen/tiempo) por la concentración (cantidad/volumen) se obtiene la razón de entrada (cantidad/tiempo).

En general, la razón de salida de la sustancia es más difícil de determinar. Si nos dan la razón de salida de la mezcla de fluidos en el tanque, ¿cómo determinamos la concentración de la sustancia en la mezcla? Una hipótesis de simplificación es que la concentración se mantenga uniforme en la mezcla. Entonces, podemos calcular la concentración de la sustancia en la mezcla, dividiendo la cantidad $x(t)$ entre el volumen de la mezcla en el tanque en el instante t. Al multiplicar esta concentración por la razón de salida se obtiene la deseada razón de salida de la sustancia. Este modelo se usa en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 En un gran tanque con 1000 litros de agua pura se comienza a verter una solución salina a una razón constante de 6 litros/minuto. La solución dentro del tanque se mantiene revuelta y sale del tanque a razón de 6 litros/minuto. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0.1 kg/litro, determinar el momento en que la concentración de sal en el tanque llegará a 0.05 kg/litro (véase la figura 3.2).

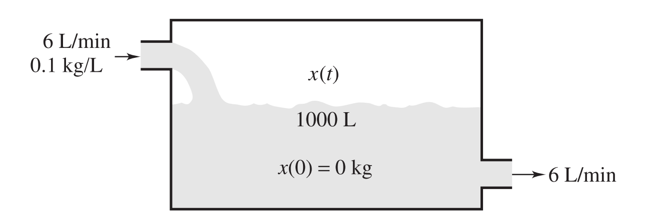


Figura 3.2 Problema de mezclas con razones de flujo iguales

SOLUCIÓN Podemos ver al tanque como un compartimento que contiene sal. Si $x(t)$ es la masa de sal en el tanque en el instante t, podemos determinar la concentración de sal en el tanque dividiendo $x(t)$ entre el volumen de fluido en el tanque en el instante t. Usaremos el modelo matemático descrito por la ecuación (1) para hallar $x(t)$.

Primero debemos determinar la razón con que la sal sale del tanque. Sabemos que la solución fluye hacia el tanque a razón de 6 litros/minuto. Como la concentración es 0.1 kg/litro, concluimos que la razón de entrada de sal al tanque es

(2) $$(6 \text{ L/min})(0.1 \text{ kg/L}) = 0.6 \text{ kg/min}.$$

Ahora debemos determinar la razón con que la sal entra al tanque. La solución salina en el tanque se mantiene bien revuelta, de modo que podemos suponer que la concentración de sal en el tanque es uniforme. Es decir, la concentración de sal en cualquier parte del tanque en el instante t es justamente $x(t)$ entre el volumen de fluido en el tanque. Como el tanque tenía en un principio 1000 litros y la razón de flujo hacia el tanque es igual a la razón de salida, el volumen es constante e igual a 1000 litros. Por lo tanto, la razón de salida de la sal es

(3) $$(6 \text{ L/min})\left[\frac{x(t)}{1000}\text{ kg/L}\right] = \frac{3x(t)}{500}\text{ kg/min}.$$

En un principio, el tanque contenía agua pura, de modo que $x(0) = 0$. Al sustituir las razones (2) y (3) en la ecuación (1) tenemos el problema con valor inicial

(4) $$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{500}, \qquad x(0) = 0,$$

como modelo matemático para el problema de mezclas.

La ecuación (4) es separable (y lineal) y fácil de resolver. Al usar la condición inicial $x(0) = 0$ para evaluar la constante arbitraria, obtenemos

(5) $$x(t) = 100(1 - e^{-3t/500}).$$

Así, la concentración de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{x(t)}{1000} = 0.1(1 - e^{-3t/500}) \text{ kg/L}.$$

Para determinar el momento en que la concentración de sal es 0.05 kg/litro, igualamos el lado derecho a 0.05 y despejamos t, con lo que tenemos

$$0.1(1 - e^{-3t/500}) = 0.05 \quad \text{o} \quad e^{-3t/500} = 0.5.$$

y por tanto

$$t = \frac{500 \ln 2}{3} \approx 115.52 \text{ min}.$$

En consecuencia, la concentración de sal en el tanque será igual a 0.05 kg/litro después de 115.52 minutos. ■

De la ecuación (5) observamos que la masa de sal en el tanque crece poco a poco y tiene el valor límite

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 1000(1 - e^{-3t/500}) = 100 \text{ kg.}$$

Así, la concentración límite de sal en el tanque es 0.1 kg/litro, que es igual a la concentración de sal en la solución que entra al tanque. ¡Es claro que esto coincide con nuestras expectativas!

Sería interesante saber qué pasaría con la concentración si la razón de flujo de entrada es mayor que la razón de flujo de salida.

EJEMPLO 2 Para el problema de mezclas descrito en el ejemplo 1, suponga ahora que la solución salina sale del tanque a razón de 5 litros/minuto en vez de 6 litros/minuto, manteniéndose el resto igual (véase la figura 3.3). Determine la concentración de sal en el tanque como función del tiempo.

SOLUCIÓN La diferencia entre la razón de flujo de entrada y la razón de flujo de salida es $6 - 5 = 1$ litro/minuto, de modo que el volumen de fluido en el tanque después de t minutos es $(1000 + t)$ litros. Por lo tanto, la razón con la que la sal deja el tanque es

$$(5 \text{ L/min})\left[\frac{x(t)}{1000 + t} \text{ kg/ L}\right] = \frac{5x(t)}{1000 + t} \text{ kg/min.}$$

Usamos esto en vez de (3) para la razón de salida, con lo que tenemos el problema con valor inicial

$$\textbf{(6)} \qquad \frac{dx}{dt} = 0.6 - \frac{5x}{1000 + t}, \quad x(0) = 0\,,$$

como modelo matemático para el problema de mezclas.

La ecuación diferencial (6) es lineal, de modo que podemos usar el procedimiento bosquejado en la página 51 para hallar $x(t)$. El factor integrante es $\mu(t) = (1000 + t)^5$. Así,

$$\frac{d}{dt}\left[(1000 + t)^5 x\right] = 0.6(1000 + t)^5\,,$$

$$(1000 + t)^5 x = 0.1(1000 + t)^6 + c\,,$$

$$x(t) = 0.1(1000 + t) + c(1000 + t)^{-5}$$

Al usar la condición inicial $x(0) = 0$, tenemos que $c = -0.1(1000)^6$, y con ello la solución de (6) es

$$x(t) = 0.1(1000 + t) - (1000)^6(1000 + t)^{-5}\,.$$

Figura 3.3 Problema de mezclas con razones de flujo distintas

Por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en el instante t es

(7) $$\frac{x(t)}{1000 + t} = 0.1[1 - (1000)^6(1000 + t)^{-6}] \text{ kg/L} . \quad \blacksquare$$

Como en el ejemplo 1, la concentración dada por (7) tiende a 0.1 kg/litro cuando $t \to \infty$. Sin embargo, en el ejemplo 2, el volumen de fluido en el tanque crece sin límite, y cuando el tanque comienza a desbordarse, el modelo en (6) ya no es adecuado.

Modelos de población

¿Cómo predecir el crecimiento de una población? Si estamos interesados en una única población, podemos pensar que la especie está contenida en un compartimento (una caja de Petri, una isla, un país, etc.) y estudiar el proceso de crecimiento como un sistema con un compartimento.

Sea $p(t)$ la población en el instante t. Aunque la población siempre es un entero, por lo general es tan grande que se introduce un error muy pequeño al suponer que $p(t)$ es una función continua. Queremos determinar la tasa de crecimiento (entrada) y la tasa de defunción (salida) para la población.

Consideremos una población de bacterias que se reproduce mediante la división celular sencilla. En nuestro modelo, suponemos que la tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Esta hipótesis es consistente con las observaciones del crecimiento de las bacterias. Mientras haya espacio y comida suficientes, también podemos suponer que la tasa de defunción es nula. (Recuerde que en la división celular, la célula madre no muere, sino que se convierte en dos nuevas células). Por lo tanto, un modelo matemático para una población de bacterias es

(8) $$\frac{dp}{dt} = k_1 p , \qquad p(0) = p_0 ,$$

donde $k_1 > 0$ es la constante de proporcionalidad para la tasa de crecimiento y p_0 es la población en el instante $t = 0$. Para poblaciones humanas, ¡es claro que la hipótesis de la tasa de defunción nula es falsa! Sin embargo, si suponemos que las personas sólo mueren de causas naturales, sería de esperar que la tasa de defunción también fuese proporcional al tamaño de la población. Es decir, revisamos (8) para tener

(9) $$\frac{dp}{dt} = k_1 p - k_2 p = (k_1 - k_2)p = kp ,$$

donde $k := k_1 - k_2$ y k_2 es la constante de proporcionalidad para la tasa de defunción. Supongamos que $k_1 > k_2$, de modo que $k > 0$. Esto produce el modelo matemático

(10) $$\frac{dp}{dt} = kp , \qquad p(0) = p_0 ,$$

llamado **ley exponencial** o **de Malthus**[†] para el crecimiento de poblaciones. Esta ecuación es separable, y al resolver el problema con valor inicial para $p(t)$ se tiene

(11) $$p(t) = p_0 e^{kt} \ .$$

Para verificar el modelo de Malthus, lo aplicaremos a la historia demográfica de Estados Unidos.

EJEMPLO 3 En 1790, la población de Estados Unidos era de 3.93 millones, y en 1890 era de 62.98 millones. Usar el modelo de Malthus para estimar la población de Estados Unidos como función del tiempo.

SOLUCIÓN Si hacemos que $t = 0$ sea el año 1790, entonces por la fórmula (11) tenemos

(12) $$p(t) = (3.93)e^{kt} \ ,$$

donde $p(t)$ es la población en millones. Una forma de obtener un valor de k sería ajustar el modelo mediante los datos de cierto año específico, como 1890 ($t = 100$ años).[††] Tenemos

$$p(100) = 62.98 = (3.93)e^{100k} \ .$$

Al despejar k tenemos

$$k = \frac{\ln(62.98) - \ln(3.93)}{100} \approx 0.027742 \ .$$

Al sustituir este valor en la ecuación (12) obtenemos

(13) $$p(t) = (3.93)e^{(0.027742)t} \ . \ \blacksquare$$

En la tabla 3.1 enumeramos la población de Estados Unidos dada por la Oficina de Censos, y la población predicha por el modelo de Malthus utilizando la ecuación (13). En la tabla vemos que las predicciones basadas en el modelo de Malthus coinciden de manera razonable con los datos de los censos hasta cerca de 1900. Después de 1900, la población predicha es muy grande, por lo que el modelo de Malthus no es aceptable.

Observemos que un modelo de Malthus se puede generar usando los datos de los censos para dos años distintos. Elegimos 1790 y 1890 para comparar con el modelo logístico que describimos a continuación.

[†]***Nota histórica:*** Thomas R. Malthus (1766-1834) fue un economista británico estudioso de los modelos de población.

[††]Por supuesto, la elección del año 1890 es puramente arbitraria; una forma más democrática (y mejor) de extraer los parámetros de los datos aparece después del ejemplo 4.

TABLA 3.1 UNA COMPARACIÓN DE LOS MODELOS DE MALTHUS Y LOGÍSTICO CON LOS DATOS DE LOS CENSOS EN ESTADOS UNIDOS (LA POBLACIÓN SE DA EN MILLONES)

Año	Censo de EUA	Malthus (ejemplo 3)	Logístico (ejemplo 4)	$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$	Logístico (mínimos cuadrados)
1790	**3.93**	**3.93**	**3.93**		4.08
1800	5.31	5.19	5.30	0.0312	5.41
1810	7.24	6.84	7.13	0.0299	7.17
1820	9.64	9.03	9.58	0.0292	9.48
1830	12.87	11.92	12.82	0.0289	12.49
1840	**17.07**	15.73	**17.07**	0.0302	16.42
1850	23.19	20.76	22.60	0.0310	21.49
1860	31.44	27.40	29.70	0.0265	27.98
1870	39.82	36.16	38.66	0.0235	36.18
1880	50.19	47.72	49.71	0.0231	46.40
1890	**62.98**	**62.98**	**62.98**	0.0207	58.90
1900	76.21	83.12	78.42	0.0192	73.82
1910	92.23	109.69	95.73	0.0162	91.15
1920	106.02	144.76	114.34	0.0146	110.68
1930	123.20	191.05	133.48	0.0106	131.19
1940	132.16	252.13	152.26	0.0106	154.08
1950	151.33	333.74	169.90	0.0156	176.35
1960	179.32	439.12	185.76	0.0145	197.82
1970	203.30	579.52	199.50	0.0116	217.72
1980	226.54	764.80	211.00	0.0100	235.51
1990	248.71	1009.33	220.38	0.0110	250.91
2000	281.42	1332.03	227.84		263.86
2010	?	1757.91	233.68		274.51

El modelo de Malthus sólo consideraba muertes por causas naturales. ¿Y qué hay de las muertes prematuras debidas a la desnutrición, falta de medicamentos, transmisión de enfermedades, crímenes, etc.? Estos hechos implican una competencia entre la población, de modo que podríamos suponer que existe otra componente de la tasa de defunción, proporcional al número de interacciones por parejas. Hay $p(p-1)/2$ de tales interacciones posibles para una población de tamaño p. Así, si combinamos la tasa de nacimiento (8) con la tasa de defunción y ordenamos las constantes, obtenemos el **modelo logístico**

$$\frac{dp}{dt} = k_1 p - k_3 \frac{p(p-1)}{2}$$

o

(14) $$\frac{dp}{dt} = -Ap(p - p_1) , \qquad p(0) = p_0 ,$$

donde $A = k_3/2$ y $p_1 = (2k_1/k_3) + 1$.

La ecuación (14) tiene dos soluciones de equilibrio: $p(t) = p_1$ y $p(t) = 0$. Las soluciones que no son de equilibrio se pueden determinar separando variables y usando la tabla de integrales del forro:

$$\int \frac{dp}{p(p-p_1)} = -A\int dt \quad \text{o} \quad \frac{1}{p_1}\ln\left|\frac{p-p_1}{p}\right| = -At + c_1 \quad \text{o} \quad \left|1-\frac{p_1}{p}\right| = c_2 e^{-Ap_1 t}$$

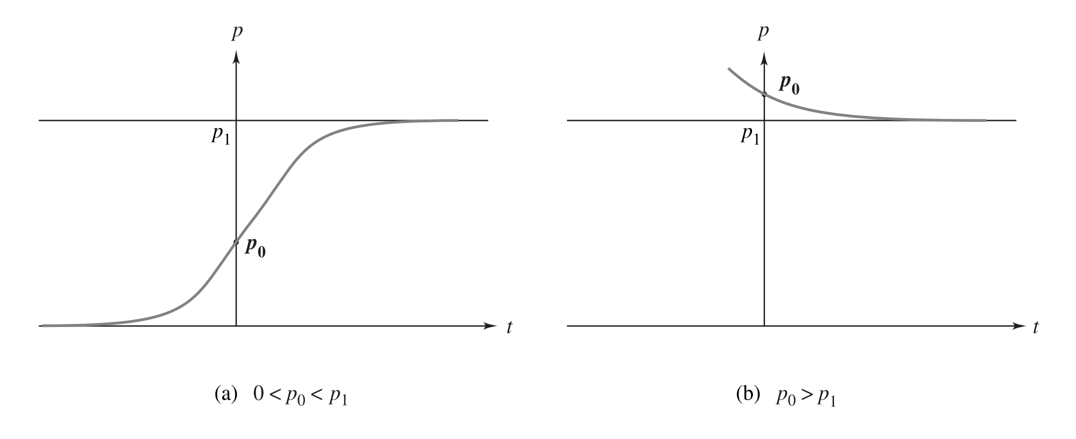
Si $p(t) = p_0$ en $t = 0$ y $c_3 = 1 - p_1/p_0$, al despejar $p(t)$ tenemos

$$\textbf{(15)} \qquad p(t) = \frac{p_1}{1 - c_3 e^{-Ap_1 t}} = \frac{p_0 p_1}{p_0 + (p_1 - p_0)e^{-Ap_1 t}}\,.$$

La función $p(t)$ dada en (15) es la **función logística**; en la figura 3.4 se muestran las gráficas de las curvas logísticas.†

Verifiquemos el modelo logístico con el crecimiento de la población de Estados Unidos.

EJEMPLO 4 Si la población en 1790 (3.93 millones) es la población inicial y se dan las poblaciones en 1840 y 1890 de 17.07 y 62.98 millones, respectivamente, utilizar el modelo logístico para estimar la población en el instante t.



(a) $0 < p_0 < p_1$ (b) $p_0 > p_1$

Figura 3.4 Las curvas logísticas

†***Nota histórica:*** El modelo logístico para el crecimiento de poblaciones fue desarrollado por vez primera por P. F. Verhulst cerca de 1840.

SOLUCIÓN Con $t = 0$ correspondiente al año 1790, sabemos que $p_0 = 3.93$. Ahora debemos determinar los parámetros A, p_1 en la ecuación (15). Para esto, usamos los hechos dados $p(50) = 17.07$ y $p(100) = 62.98$; es decir,

$$\textbf{(16)} \qquad 17.07 = \frac{3.93\, p_1}{3.93 + (p_1 - 3.93)e^{-50Ap_1}} \ ,$$

$$\textbf{(17)} \qquad 62.98 = \frac{3.93\, p_1}{3.93 + (p_1 - 3.93)e^{-100Ap_1}} \ .$$

Las ecuaciones (16) y (17) son dos ecuaciones no lineales en las dos incógnitas A, p_1. Para resolver tal sistema, por lo general recurrimos a un esquema de aproximación numérica, como el método de Newton. Sin embargo, para el caso en cuestión, es posible determinar las soluciones de manera directa, debido a que se tienen los datos para los instantes t_a y t_b con $t_b = 2t_a$ (véase el problema 12). Al hacer los cálculos algebraicos descritos en el problema 12, hallamos en última instancia que

$$\textbf{(18)} \qquad p_1 \approx 251.7812 \quad \text{y} \quad A \approx 0{,}0001210 \ .$$

Así, el modelo logístico para los datos dados es

$$\textbf{(19)} \qquad P(t) = \frac{989.50}{3.93 + (247.85)e^{-(0.030463)t}} \ . \quad \blacksquare$$

Los datos de población predichos por (19) se muestran en la cuarta columna de la tabla 3.1. Como puede ver, estas predicciones coinciden con los datos de los censos mejor que el modelo de Malthus. Y, por supuesto, la coincidencia es perfecta en los años 1790, 1840 y 1890. Sin embargo, la elección de estos años particulares para estimar los parámetros p_0, A y p_1 es un tanto arbitraria y es de esperar que un modelo más robusto utilice *todos* los datos, de cierta forma, para la estimación. Una forma de implantar esta idea es la siguiente.

Observe de la ecuación (14) que el modelo logístico predice una relación lineal entre $(dp/dt)/p$ y p:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = Ap_1 - Ap \ ,$$

con Ap_1 como la ordenada al origen y $-A$ como la pendiente. En la quinta columna de la tabla 3.1, enumeramos los valores de $(dp/dt)/p$, estimados a partir de diferencias centradas como

$$\textbf{(20)} \qquad \frac{1}{p(t)}\frac{dp}{dt}(t) \approx \frac{1}{p(t)}\frac{p(t+10) - p(t-10)}{20}$$

(véase el problema 16). En la figura 3.5 estos valores estimados de $(dp/dt)/p$ se grafican contra p en lo que se llama un *diagrama de dispersión*. La relación lineal predicha por el modelo logístico sugiere que aproximemos la gráfica mediante la línea recta. Una técnica común para hacer esto es el llamado *ajuste lineal por mínimos cuadrados*, que se analiza en el apéndice D. Esto produce la línea recta

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} \approx 0.0286448 - 0.00009166p \ .$$

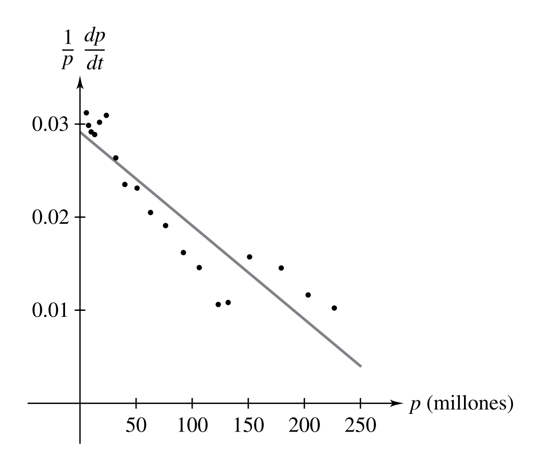


Figura 3.5 Datos de dispersión y ajuste mediante una línea recta

que también se muestra en la figura 3.5. Ahora, con $A = 0.00009166$ y $p_1 = (0.0286448/A) \approx 312.5$, podemos despejar p_0 en la ecuación (15):

$$p_0 = \frac{p(t)p_1e^{-Ap_1t}}{p_1 - p(t)\left[1 - e^{-Ap_1t}\right]} \quad (21)$$

Al promediar el lado derecho de (21) sobre todos los datos, obtenemos la estimación $p_0 \approx 4.083$. Por último, la inserción de estas estimaciones de los parámetros en la ecuación (15) conduce a las predicciones enumeradas en la sexta columna de la tabla 3.1.

Observe que este modelo produce $p_1 \approx 312.5$ millones como el límite de la población futura de Estados Unidos.

EJERCICIOS 3.2

1. Una solución salina entra a una razón constante de 8 litros/minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 100 litros de solución salina en que se habían disuelto 0.5 kg de sal. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque con la misma razón. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0.05 kg/litro, determine la masa de sal en el tanque después de t minutos. ¿Cuándo llegará la concentración de sal en el tanque a 0.02 kg/litro?
2. Una solución salina entra a una razón constante de 6 litros/minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 50 litros de solución salina en que se habían disuelto 0.5 kg de sal. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque con la misma razón. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0.05 kg/litro, determine la masa de sal en el tanque después de t minutos. ¿Cuándo llegará la concentración de sal en el tanque a 0.03 kg/litro?
3. Una solución de ácido nítrico entra a una razón constante de 6 litros/minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 200 litros de una solución de ácido nítrico al 0.5%. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque a razón de 8 litros/minuto. Si la solución que entra al tanque tiene ácido nítrico al 20%, determine el volumen de ácido nítrico en el tanque después de t minutos. ¿Cuándo llegará el porcentaje de ácido nítrico en el tanque a 10%?

4. Una solución salina entra a una razón constante de 4 litros/minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 100 litros de agua pura. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque a razón de 3 litros/minuto. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0.2 kg/litro, determine la masa de sal en el tanque después de t minutos. ¿Cuándo llegará la concentración de sal en el tanque a 0.1 kg/litro?

5. Una alberca cuyo volumen es de 10,000 galones contiene agua con cloro al 0.01%. A partir del instante $t = 0$, se bombea agua del servicio público con cloro al 0.001% hacia la alberca, a razón de 5 galones/minuto. El agua sale de la alberca con la misma razón. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la alberca después de 1 hora? ¿En qué momento el agua de la alberca tendrá 0.002% de cloro?

6. El aire de una pequeña habitación de 12 por 8 por 8 pies tiene 3% de monóxido de carbono. A partir de $t = 0$, se introduce aire fresco sin monóxido de carbono en la habitación, a razón de 100 pies cúbicos/minuto. Si el aire de la habitación sale por una ventila con la misma razón, ¿en qué momento tendrá el aire de la habitación 0.01% de monóxido de carbono?

7. Desde el instante $t = 0$ se bombea agua fresca a razón de 3 galones/minuto en un tanque de 60 galones lleno con una solución salina. La mezcla resultante se desborda con la misma razón en un segundo tanque de 60 galones que inicialmente contenía sólo agua pura, y de ahí se derrama al piso. Suponiendo una mezcla perfecta en ambos tanques, ¿en qué momento será más salada el agua del segundo tanque? ¿Y qué tan salada estará, comparada con la solución original?

8. La sangre conduce un medicamento a un órgano a razón de 3 cm^3/s y sale con la misma razón. El órgano tiene un volumen líquido de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra al órgano es de 0.2 g/cm^3, ¿cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t, si inicialmente no había rastros de dicho medicamento? ¿En qué momento llegará la concentración del medicamento en el órgano a 0.1 g/cm^3?

9. En 1980, el departamento de recursos naturales liberó 1000 ejemplares de una especie de pez en un lago. En 1987, la población de estos peces en el lago se estimó en 3000. Use la ley de Malthus para el crecimiento de poblaciones y estime la población de estos peces en el lago en el año 2010.

10. Utilice un bosquejo de la línea fase (véase Proyecto D, Capítulo 1) para argumentar que cualquier solución al modelo del problema de mezclas

$$\frac{dx}{dt} = a - bx \ ; \qquad a, b > 0 \ ,$$

tiende a la solución de equilibrio $x(t) \equiv a/b$ cuando t tiende a $+\infty$; es decir, a/b es un pozo.

11. Utilice un bosquejo de la línea fase (véase Proyecto D, Capítulo 1 para justificar que cualquier solución del modelo logístico

$$\frac{dp}{dt} = (a - bp)p \ ; \quad p(t_0) = p_0 \ ,$$

donde a, b y p_0 son constantes positivas, tiende a la solución de equilibrio $p(t) \equiv a/b$ cuando t tiende a $+\infty$.

12. Para la curva logística (15), suponga que $p_a := p(t_a)$ y $p_b := p(t_b)$ están dadas, con $t_b = 2t_a$ ($t_a > 0$). Muestre que

$$p_1 = \left[\frac{p_a p_b - 2p_0 p_b + p_0 p_a}{p_a^2 - p_0 p_b}\right] p_a \ ,$$

$$A = \frac{1}{p_1 t_a} \ln\left[\frac{p_b(p_a - p_0)}{p_0(p_b - p_a)}\right] \ .$$

[*Sugerencia*: Iguale las expresiones (21) para p_0 en los instantes t_a y t_b. Haga $\chi = \exp(-Ap_1 t_a)$ y $\chi^2 = \exp(-Ap_1 t_b)$ y despeje χ. Inserte en una de las expresiones anteriores y halle p_1].

13. En el problema 9, suponga que además sabemos que la población de peces en 1994 se estimaba en 5000. Use un modelo logístico para estimar la población de peces en el año 2010. ¿Cuál es la población límite predicha? [*Sugerencia*: Use las fórmulas del problema 12].

14. En 1970, la población de lagartos en los terrenos del Centro Espacial Kennedy se estimó en 300. En 1980, la población había aumentado hasta un estimado de 1500. Use la ley de Malthus para el crecimiento de poblaciones y estime la población de lagartos en dichos terrenos, en el año 2010.

15. En el problema 14, suponga que además sabemos que la población de lagartos en los terrenos del Centro Espacial Kennedy en 1975 se estimaba en 1200. Use un modelo logístico para estimar la población de lagartos en el año 2010. ¿Cuál es la predicción para la población límite? [*Sugerencia*: Use las fórmulas del problema 12].

16. Muestre que para una función diferenciable $p(t)$, tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t+h) - p(t-h)}{2h} = p'(t) \ ,$$

que es la base de la aproximaciones mediante diferencias centradas utilizadas en (20).

17. **(a)** Para los datos del censo de Estados Unidos, utilice la aproximación mediante diferencias hacia adelante para la derivada; es decir,

$$\frac{1}{p(t)} \frac{dp}{dt}(t) \approx \frac{1}{p(t)} \frac{p(t+10) - p(t)}{10} \ ,$$

y vuelva a calcular la quinta columna de la tabla 3.1.

(b) Use los datos de la parte (a) y determine las constantes A y p_1 en el ajuste por mínimos cuadrados

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \approx Ap_1 - Ap$$

(véase el apéndice D).

(c) Con los valores de A y p_1 hallados en la parte (b), determine p_0 promediando la fórmula (21) sobre todos los datos.

(d) Sustituya los valores determinados de A, p_1 y p_0 en la fórmula logística (15) y calcule las poblaciones predichas para cada uno de los años enumerados en la tabla 3.1.

(e) Compare este modelo con el modelo basado en las diferencias centradas de la sexta columna de la tabla 3.1.

18. Un modelo de poblaciones utilizado en las predicciones actuariales se basa en la **ecuación de Gompertz**

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln P) \ ,$$

donde a y b son constantes.

(a) Halle $P(t)$ en la ecuación de Gompertz.

(b) Si $P(0) = P_0 > 0$, dé una fórmula para $P(t)$ en términos de a, b, P_0 y t.

(c) Describa el comportamiento de $P(t)$ cuando $t \to +\infty$. [*Sugerencia*: Considere los casos para $b > 0$ y $b < 0$].

19. La masa inicial de cierta especie de pez es 7 millones de toneladas. Dicha masa, de dejarse sola, aumentaría a una razón proporcional a la masa, con una constante de proporcionalidad de 2/año. Sin embargo, la pesca comercial elimina una masa de peces a una razón constante de 15 millones de toneladas por año. ¿En qué momento se terminarán los peces? Si la razón de pesca se modifica de modo que la masa de peces permanezca constante, ¿cuál debería ser la razón?

20. Por consideraciones teóricas, se sabe que la luz de cierta estrella debe llegar a la Tierra con una intensidad I_0. Sin embargo, la trayectoria de la luz desde la estrella hasta la Tierra pasa por una nube de polvo, con un coeficiente de absorción de 0.1/año luz. La luz que llega a la Tierra tiene una intensidad $1/2\ I_0$. ¿Cuál es el espesor de la nube de polvo? (La razón de cambio de la intensidad de la luz con respecto del espesor es proporcional a la intensidad. Un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año).

21. Una bola de nieve se funde de modo que la razón de cambio en su volumen es proporcional al área de su superficie. Si la bola de nieve tenía inicialmente 4 pulgadas de diámetro y 30 minutos después tenía 3 pulgadas de diámetro, ¿en qué momento tendrá un diámetro de 2 pulgadas? Desde el punto de vista matemático, ¿en qué momento desaparecerá la bola de nieve?

22. Suponga que la bola de nieve del problema 21 se funde de modo que la razón de cambio en su *diámetro* es proporcional al área de su superficie. Use los mismos datos ya dados y determine el momento en que su diámetro será de 2 pulgadas. Desde el punto de vista matemático, ¿en qué momento desaparecerá la bola de nieve?

En los problemas 23 a 27, suponga que la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la sustancia.

23. Si en un principio se tienen 50 g de una sustancia radiactiva y después de 3 días sólo restan 10 g, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará después de 4 días?

24. Si en un principio se tienen 300 g de una sustancia radiactiva y después de 5 años restan 200 g, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que sólo queden 10 g?

25. Con frecuencia, el fechado por carbono se usa para determinar la edad de un fósil. Por ejemplo, en una cueva de Sudáfrica se halló un cráneo humano junto con los restos de una hoguera. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo sea igual a la edad de la hoguera. Se ha determinado que sólo queda 2% de la cantidad original de carbono 14 en los restos de ma-

dera en la hoguera. Estime la edad del cráneo, si la vida media del carbono 14 es de aproximadamente 5600 años.

26. Para ver lo sensible que puede ser la técnica de fechado por carbono del problema 25,

(a) Vuelva a resolver el problema 25, suponiendo que la vida media del carbono 14 es de 5550 años.

(b) Vuelva a resolver el problema 25, suponiendo que resta 3% de la masa original.

(c) Si cada una de las cifras de los incisos (a) y (b) representa un error del 1% al medir los dos parámetros (vida media y porcentaje de masa restante), ¿a cuál parámetro es más sensible el modelo?

27. Los únicos isótopos de los elementos desconocidos hohio e inercio (símbolos Hh e It) son radiactivos. El hohio decae en el inercio con una constante de decaimiento de 2/año, y el inercio decae en el isótopo radiactivo del bunkio (símbolo Bu) con una constante de decaimiento de 1/año. Una masa inicial de 1 kg de hohio se coloca en un recipiente no radiactivo, sin otras fuentes de hohio, inercio ni bunkio. ¿Qué cantidad de cada elemento habrá en el recipiente después de t años? (La **constante de decaimiento** es la constante de proporcionalidad en el enunciado de que la razón de pérdida de masa del elemento en cualquier instante es proporcional a la masa del elemento en ese instante).

3.3 CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO DE EDIFICIOS

Nuestro objetivo es formular un modelo matemático que describa el perfil de temperatura dentro de un edificio durante 24 horas, como función de la temperatura exterior, el calor generado dentro del edificio y el calefactor o el aire acondicionado. Con este modelo queremos contestar las tres preguntas siguientes:

(a) ¿Cuánto tiempo tarda en cambiar esencialmente la temperatura del edificio?

(b) ¿Cómo varía la temperatura del edificio durante la primavera y el otoño, cuando no se utiliza la calefacción ni el aire acondicionado?

(c) ¿Cómo varía la temperatura del edificio durante el verano, cuando se utiliza el aire acondicionado, o durante el invierno, cuando se usa la calefacción?

Un enfoque natural para modelar la temperatura dentro de un edificio es el uso del análisis por compartimentos. Sea $T(t)$ la temperatura dentro del edificio en el instante t y veamos al edificio como un único compartimento. Entonces la razón de cambio en la temperatura queda determinada por todos los factores que generan o disipan calor.

Tomaremos en cuenta tres factores principales que afectan la temperatura dentro del edificio. En primer lugar está el calor generado por las personas, las luces y las máquinas dentro del edificio. Esto causa una razón de incremento en la temperatura que denotaremos por $H(t)$. En segundo lugar está el calentamiento (o enfriamiento) proporcionado por la calefacción (o el aire acondicionado). Esta razón de incremento (o decremento) en temperatura será representada por $U(t)$. En general, la razón de calentamiento adicional $H(t)$ y la razón de calefacción (o enfriamiento) $U(t)$ quedan descritas en términos de energía por unidad de tiempo (como las unidades térmicas británicas por hora). Sin embargo, al multiplicar por la capacidad calórica del edificio (en unidades de cambio de temperatura por unidad de energía calórica), podemos expresar las dos cantidades $H(t)$ y $U(t)$ en términos de temperatura por unidad de tiempo.

El tercer factor es el efecto de la temperatura exterior $M(t)$ sobre la temperatura dentro del edificio. La evidencia experimental ha mostrado que este factor se puede modelar mediante la **ley de enfriamiento de Newton**. Esta ley establece que hay una razón de cambio de la temperatura $T(t)$ que es proporcional a la diferencia entre la temperatura exterior $M(t)$

y la temperatura interior $T(t)$. Es decir, la razón de cambio en temperatura del edificio debida a $M(t)$ es

$$K[M(t) - T(t)] \ .$$

La constante positiva K depende de las propiedades físicas del edificio, como la cantidad de puertas y ventanas y el tipo de aislamiento, pero K no depende de M, T o t. Por lo tanto, cuando la temperatura exterior es mayor que la temperatura interior, $M(t) - T(t) > 0$ y hay un incremento en la temperatura del edificio debido a $M(t)$. Por otro lado, cuando la temperatura exterior es menor que la temperatura interior, entonces $M(t) - T(t) < 0$ y la temperatura del edificio disminuye.

En resumen, vemos que

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + U(t) \ ,$$

cuando la razón de calentamiento adicional $H(t)$ siempre es no negativa y $U(t)$ es positiva para la calefacción y negativa para el aire acondicionado. Un modelo más detallado de la dinámica de temperatura del edificio implicaría más variables para representar diversas temperaturas en distintas habitaciones o zonas. Tal enfoque usaría el análisis por compartimentos, donde las habitaciones serían los distintos compartimentos (véanse los problemas 35-37, ejercicios 5.2).

Como la ecuación (1) es lineal, se puede resolver mediante el método analizado en la sección 2.3. Al escribir (1) en la forma canónica

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{dT}{dt}(t) + P(t)T(t) = Q(t) \ ,$$

donde

$$P(t) := K \ ,$$

$$\textbf{(3)} \qquad Q(t) := KM(t) + H(t) + U(t) \ ,$$

vemos que el factor integrante es

$$\mu(t) = \exp\left(\int K\,dt\right) = e^{Kt} \ .$$

Para resolver (2), multiplicamos cada lado por e^{Kt} e integramos:

$$e^{Kt}\frac{dT}{dt}(t) + Ke^{Kt}T(t) = e^{Kt}Q(t) \ ,$$

$$e^{Kt}T(t) = \int e^{Kt}Q(t)dt + C \ .$$

Al despejar $T(t)$ se tiene

$$\textbf{(4)} \qquad T(t) = e^{-Kt}\int e^{Kt}Q(t)dt + Ce^{-Kt}$$

$$= e^{-Kt}\left\{\int e^{Kt}[KM(t) + H(t) + U(t)]dt + C\right\} \ .$$

EJEMPLO 1 Suponga que al final del día (en el instante t_0), cuando las personas salen del edificio, la temperatura exterior permanece constante e igual a M_0, la razón de calentamiento adicional H dentro del edificio se anula y la razón de uso del calefactor o el aire acondicionado U también se anula. Determinar $T(t)$, dada la condición inicial $T(t_0) = T_0$.

SOLUCIÓN Con $M = M_0$, $H = 0$ y $U = 0$, la ecuación (4) se convierte en

$$T(t) = e^{-Kt}\left\{\int e^{Kt}KM_0\,dt + C\right\} = e^{-Kt}\left[M_0e^{Kt} + C\right]$$
$$= M_0 + Ce^{-Kt} \,.$$

Al hacer $t = t_0$ y usar el valor inicial T_0 de la temperatura, vemos que la constante C es $(T_0 - M_0)\exp(Kt_0)$. Por lo tanto,

(5) $$T(t) = M_0 + (T_0 - M_0)e^{-K(t-t_0)} \,. \quad \blacksquare$$

Cuando $M_0 < T_0$, la solución en (5) decrece de manera exponencial a partir de la temperatura inicial T_0 hasta la temperatura final M_0. Para determinar el tiempo que tarda la temperatura en cambiar "esencialmente", considere la sencilla ecuación lineal $dA/dt = -\alpha A$, cuyas soluciones tienen la forma $A(t) = A(0)e^{-\alpha t}$. Cuando $t \to +\infty$, la función $A(t)$ decae en forma exponencial ($\alpha > 0$) o crece de manera exponencial ($\alpha < 0$). En cualquier caso, el tiempo que tarda $A(t)$ en cambiar de $A(0)$ a $A(0)/e$ $\big(\approx 0.368\, A(0)\big)$ es justamente $1/\alpha$, pues

$$A\left(\frac{1}{\alpha}\right) = A(0)e^{-\alpha(1/\alpha)} = \frac{A(0)}{e} \,.$$

La cantidad $1/|\alpha|$, que no depende de $A(0)$, es la **constante de tiempo** para la ecuación. Para las ecuaciones lineales de la forma más general $dA/dt = -\alpha A + g(t)$, nos referimos de nuevo a $1/|\alpha|$ como la constante de tiempo.

De regreso al ejemplo 1, vemos que la temperatura $T(t)$ satisface la ecuación

$$\frac{dT}{dt}(t) = -KT(t) + KM_0 \,, \qquad \frac{d(T - M_0)}{dt}(t) = -K\left[T(t) - M_0\right] \,,$$

donde M_0 es una constante. En cualquier caso, la constante de tiempo es justamente $1/K$, lo que representa el tiempo que tarda la diferencia de temperaturas $T - M_0$ en cambiar de $T_0 - M_0$ a $(T_0 - M_0)/e$. También decimos que $1/K$ es la **constante de tiempo para el edificio** (sin calefacción o aire acondicionado). Un valor típico para la constante de tiempo de un edificio es de 2 a 4 horas, pero esta constante de tiempo puede ser menor si las ventanas están abiertas o si existe un ventilador de aire. También puede ser mayor si el edificio está bien aislado.

En el contexto del ejemplo 1, podemos usar el concepto de constante de tiempo para responder nuestra pregunta inicial (a): la temperatura del edificio cambia de manera exponencial, con una constante de tiempo igual a $1/K$. Una respuesta a la pregunta (b) acerca de la temperatura dentro del edificio durante la primavera o el otoño está dada en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Determinar la temperatura del edificio $T(t)$ si la razón de calentamiento adicional $H(t)$ es igual a la constante H_0, no hay calentamiento ni enfriamiento $(U(t) \equiv 0)$ y la temperatura exterior M varía como una onda senoidal en un periodo de 24 horas, con un mínimo en $t = 0$ (medianoche) y un máximo en $t = 12$ (mediodía). Es decir,

$$M(t) = M_0 - B\cos\omega t \,,$$

donde B es una constante positiva, M_0 es la temperatura exterior promedio y $\omega = 2\pi/24 = \pi/12$ radianes/hora. (Esto podría ocurrir durante la primavera o el otoño cuando no hay calefactor ni aire acondicionado).

SOLUCIÓN La función $Q(t)$ en (3) es ahora

$$Q(t) = K(M_0 - B\cos\omega t) + H_0 \ .$$

Al hacer $B_0 := M_0 + H_0/K$, podemos escribir Q como

(6) $$Q(t) = K(M_0 - B\cos\omega t) \ ,$$

donde KB_0 representa el valor promedio diario de $Q(t)$; es decir,

$$KB_0 = \frac{1}{24}\int_0^{24} Q(t)dt \ .$$

Cuando la función de forzamiento $Q(t)$ en (6) se sustituye en la expresión para la temperatura en la ecuación (4), el resultado (después de integrar por partes) es

$$T(t) = e^{-Kt}\left[\int e^{Kt}(KB_0 - KB\cos\omega t)dt + C\right]$$

(7) $$T(t) = B_0 - BF(t) + Ce^{-Kt} \ ,$$

donde

$$F(t) := \frac{\cos\omega t + (\omega/K)\text{sen}\ \omega t}{1 + (\omega/K)^2} \ .$$

Elegimos la constante C de modo que en medianoche ($t = 0$), el valor de temperatura T sea igual a cierta temperatura inicial T_0. Así,

$$C = T_0 - B_0 + BF(0) = T_0 - B_0 + \frac{B}{1 + (\omega/K)^2} \ . \quad \blacksquare$$

Observe que el tercer término de la solución (7) que implica a la constante C tiende a cero de manera exponencial. El término constante B_0 en (7) es igual a $M_0 + H_0/K$ y representa la temperatura promedio diaria dentro del edificio (despreciando el término exponencial). Cuando no hay una razón de calentamiento adicional dentro del edificio ($H_0 = 0$), esta temperatura promedio es igual a la temperatura exterior promedio M_0. El término $BF(t)$ en (7) representa la variación senoidal de la temperatura dentro del edificio correspondiente a la variación de la temperatura en el exterior. Como $F(t)$ se puede escribir en la forma

(8) $$F(t) = [1 + (\omega/K)^2]^{-1/2}\cos(\omega t - \phi) \ ,$$

donde $\tan\phi = \omega/K$ (véase el problema 16), la variación senoidal dentro del edificio se retrasa con respecto de la variación en el exterior por ϕ/ω horas. Además, la magnitud de la variación dentro del edificio es ligeramente menor, por un factor de $[1 + (\omega/K)^2]^{-1/2}$, que la variación en el exterior. La frecuencia angular de variación ω es $2\pi/24$ radianes/hora (que es aproximadamente $1/4$). Los valores usuales para la razón adimensional ω/K están entre $1/2$ y 1. Para este rango, el retraso entre la temperatura interior y la exterior es aproximadamente de 1.8 a 3 horas y la magnitud de la variación interior está entre 89 y 71% de la variación en

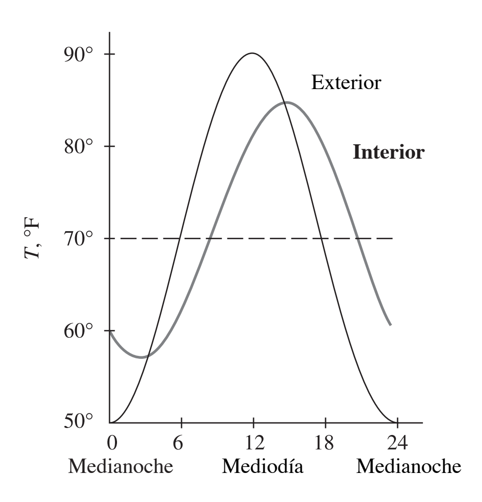


Figura 3.6 Variación de temperatura dentro y fuera de un edificio sin calefacción

el exterior. La figura 3.6 muestra la variación senoidal de 24 horas de la temperatura exterior para un día moderado típico así como las variaciones de temperatura dentro del edificio para una razón adimensional ω/K de la unidad, que corresponde a una constante de tiempo $1/K$ de aproximadamente 4 horas. Al trazar esta última curva, hemos supuesto que el término exponencial ha desaparecido.

EJEMPLO 3 Supóngase que en el edificio del ejemplo 2 se instala un termostato sencillo que se utiliza para comparar la temperatura real dentro del edificio con una temperatura deseada T_D. Si la temperatura real es menor que la temperatura deseada, el calefactor comienza a funcionar y en caso contrario se desconecta. Si la temperatura real es mayor que la temperatura deseada, el aire acondicionado comienza a enfriar y en caso contrario se desconecta. (En la práctica, hay una cierta zona muerta alrededor de la temperatura deseada en donde la diferencia de temperaturas no es suficiente para activar el termostato, pero que ignoraremos en este caso). Si la cantidad de calentamiento o enfriamiento es proporcional a la diferencia de temperatura; es decir,

$$U(t) = K_U[T_D - T(t)] \ ,$$

donde K_U es la constante de proporcionalidad (positiva), determinar $T(t)$.

SOLUCIÓN Si el control proporcional $U(t)$ se sustituye directamente en la ecuación diferencial (1) para la temperatura del edificio, obtenemos

$$\textbf{(9)} \qquad \frac{dT(t)}{dt} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + K_U[T_D - T(t)] \ .$$

Al comparar la ecuación (9) con la ecuación diferencial lineal de primer orden (2) vemos que para este ejemplo, la cantidad P es igual a $K + K_U$, mientras que la cantidad $Q(t)$ que representa la función de forzamiento incluye a la temperatura deseada T_D. Es decir,

$$P = K + K_U \ ,$$
$$Q(t) = KM(t) + H(t) + K_U T_D \ .$$

Cuando la razón de calentamiento adicional es una constante H_0 y la temperatura exterior M varía como una onda senoidal sobre un periodo de 24 horas de la misma forma que en el ejemplo 2, la función de forzamiento es

$$Q(t) = K(M_0 - B\cos\omega t) + H_0 + K_U T_D \ .$$

La función $Q(t)$ tiene un término constante y un término coseno, como en la ecuación (6). Esta equivalencia es más evidente al sustituir

(10) $$Q(t) = K_1(B_2 - B_1\cos\omega t) \ ,$$

donde

$$\omega := \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \ , \qquad K_1 := K + K_U \ ,$$

(11) $$B_2 := \frac{K_U T_D + KM_0 + H_0}{K_1} \ , \qquad B_1 := \frac{BK}{K_1} \ .$$

Las expresiones para la constante P y la función de forzamiento $Q(t)$ de la ecuación (10) son iguales a las expresiones del ejemplo 2, excepto que las constantes K, B_0 y B se reemplazan, respectivamente, por las constantes K_1, B_2 y B_1. Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial (9) será la misma que la solución de temperatura del ejemplo 2, excepto que se modifican los tres términos constantes. Así,

(12) $$T(t) = B_2 - B_1F_1(t) + C\exp(-K_1 t) \ ,$$

donde

$$F_1(t) := \frac{\cos\omega t + (\omega/K_1)\operatorname{sen}\omega t}{1 + (\omega/K_1)^2} \ .$$

Elegimos la constante C de modo que en el instante $t = 0$ el valor de la temperatura T es igual a T_0. Así,

$$C = T_0 - B_2 + B_1F_1(0) \ . \ \blacksquare$$

En el ejemplo anterior, la constante de tiempo para la ecuación (9) es $1/P = 1/K_1$, donde $K_1 = K + K_U$. En este caso, $1/K_1$ se conoce como la **constante de tiempo con calefacción y aire acondicionado**. Para un sistema típico de calefacción y aire acondicionado, K_U es un poco menor que 2; para un edificio común, la constante K está entre $1/2$ y $1/4$. Por lo tanto, la suma da un valor de K_1 cercano a 2, y la constante de tiempo para el edificio con calefacción y aire acondicionado es cercana a $1/2$ hora.

Al activar la calefacción o el aire, se necesitan casi 30 minutos para que el término exponencial de (12) desaparezca. Si despreciamos este término exponencial, la temperatura promedio dentro del edificio es B_2. Como K_1 es mucho mayor que K y H_0 es pequeño, (11) implica que B_2 es cercana a T_D, la temperatura deseada. En otras palabras, después de un periodo de tiempo, la temperatura dentro del edificio es cercana a T_D, con una pequeña variación senoidal. (La temperatura promedio M_0 y la razón de calentamiento adicional H_0 tienen sólo un efecto pequeño). Así, para ahorrar energía, el sistema de calefacción y aire acondicionado debe apagarse durante la noche. Al encenderse en la mañana, se necesitarán aproximadamente 30 minutos para que el interior del edificio alcance la temperatura deseada. Estas observaciones proporcionan una respuesta a la pregunta (c), en relación con la temperatura dentro del edificio durante el verano y el invierno, pregunta planteada al inicio de esta sección.

La hipótesis establecida en el ejemplo 3, en el sentido de que la cantidad de calentamiento o enfriamiento es $U(t) = K_U[T_D - T(t)]$ no siempre es adecuada. La usamos aquí y en los ejercicios para ilustrar el uso de la constante de tiempo. Los lectores más audaces podrían experimentar con otros modelos para $U(t)$, en particular si disponen de las técnicas numéricas analizadas en las secciones 3.6 y 3.7. El proyecto E de la página 147 analiza la regulación de la temperatura con controladores de razón fija.

EJERCICIOS 3.3

1. Una taza de café caliente, inicialmente a 95°C, se enfría hasta 80°C en 5 minutos, al estar en un cuarto con temperatura de 21°C. Use sólo la ley de enfriamiento de Newton y determine el momento en que la temperatura del café estará a unos agradables 50°C.

2. Una cerveza fría, inicialmente a 35°F, se calienta hasta 40°F en 3 minutos, estando en un cuarto con temperatura 70°F. ¿Qué tan caliente estará la cerveza si se deja ahí durante 20 minutos?

3. Un vino blanco a la temperatura ambiental de 70°F se enfría en hielo (32°F). Si se necesitan 15 minutos para que el vino se enfríe hasta 60°F, ¿cuánto tiempo se necesita para que el vino llegue a los 56°F?

4. Un vino tinto se saca de la cava, donde estaba a 10°C y se deja respirar en un cuarto con temperatura de 23°C. Si se necesitan 10 minutos para que el vino llegue a los 15°C, ¿en qué momento llegará la temperatura del vino a los 18°C?

5. Era el mediodía en un frío día de diciembre en Tampa: 16°C. El detective Taylor llegó a la escena del crimen para hallar al sargento sobre el cadáver. El sargento dijo que había varios sospechosos. Si supieran el momento exacto de la muerte, podrían reducir la lista de sospechosos. El detective Taylor sacó un termómetro y midió la temperatura del cuerpo: 34.5°C. Luego salió a comer. Al regresar, a la 1:00 P.M., halló que la temperatura del cuerpo era de 33.7°C. ¿En qué momento ocurrió el asesinato? [*Sugerencia*: La temperatura normal del cuerpo es de 37°C].

6. En una fresca mañana de sábado, mientras las personas trabajaban en el interior, el calefactor mantiene la temperatura interior del edificio en 21°C. A mediodía, el aparato se apaga y los empleados se van a casa. La temperatura exterior es constante e igual a 12°C durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo para el edificio es de 3 horas, ¿en qué momento llegará la temperatura del edificio a 16°C? Si algunas ventanas se dejan abiertas y la constante de tiempo se reduce a 2 horas, ¿en qué momento llegará la temperatura interior a 16°C?

7. En una calurosa mañana de sábado, cuando las personas trabajan dentro del edificio, el aire acondicionado mantiene la temperatura interior en 24°C. A mediodía, el aire acondicionado se apaga y las personas se van a casa. La temperatura exterior es constante e igual a 35°C durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo del edificio es de 4 horas, ¿cuál será la temperatura dentro del edificio a las 2:00 P.M.? ¿Y a las 6:00 P.M.? ¿En qué momento llegará la temperatura interior del edificio a 27°C?

8. Una cochera sin calefacción ni aire acondicionado tiene una constante de tiempo de 2 horas. Si la temperatura exterior varía como una onda senoidal con un mínimo de 50°F a las 2:00 A.M. y un máximo de 80°F a las 2:00 P.M., determine los instantes en que el edificio alcanza sus temperaturas máxima y mínima, suponiendo que el término exponencial se extingue.

9. Se va a construir un almacén sin calefacción ni aire acondicionado. Según la cantidad de aislamiento, la constante de tiempo para este edificio puede variar de 1 a 5 horas. Para ilustrar el efecto del aislamiento sobre la temperatura dentro del almacén, suponga que la temperatura exterior varía como una onda senoidal, con un mínimo de 16°C a las 2:00 A.M. y un máximo de 32°C a las 2:00 P.M. Suponiendo que el término exponencial (que implica la temperatura inicial T_0) se ha extinguido, ¿cuál es la temperatura mínima dentro del edificio, si la constante de tiempo es 1 hora? ¿Y si la constante de tiempo es 5 horas? ¿Cuál es la máxima temperatura dentro del edificio si la constante de tiempo es 1 hora? ¿Y si es 5 horas?

10. Un lunes temprano por la mañana, la temperatura en la sala de lectura ha descendido hasta 40°F, igual a la temperatura exterior. A las 7:00 A.M., el conserje enciende el calefactor con el termostato puesto en 70°F. La constante de tiempo para el edificio es $1/K = 2$ horas y la constante de tiempo para el edificio junto con su sistema de calentamiento es $1/K_1 = 1/2$ hora. Suponiendo que la temperatura exterior permanece constante, ¿cuál será la temperatura dentro de la sala

de lectura a las 8:00 A.M.? ¿En qué momento llegará la temperatura dentro de la sala a 65°F?

11. Durante el verano, la temperatura dentro de una camioneta llega a 55°C, mientras que en el exterior es constante e igual a 35°C. Cuando la conductora entra a la camioneta, enciende el aire acondicionado con el termostato en 16°C. Si la constante de tiempo para la camioneta es $1/K = 2$ horas y para la camioneta con el aire acondicionado es $1/K_1 = 1/3$ hora, ¿en qué momento llegará la temperatura dentro de la camioneta a los 27°C?

12. Dos amigos se sientan a platicar y disfrutar una taza de café. Al servir el café, el amigo impaciente agrega de inmediato una cucharada de crema a su café. El amigo relajado espera 5 minutos antes de añadir una cucharada de crema (que se ha mantenido a temperatura constante). Es entonces cuando ambos comienzan a tomar el café. *¿Quién tiene el café más caliente?* Suponga que la crema está más fría que el aire y use la ley de enfriamiento de Newton.

13. Un sistema de calentamiento de agua mediante energía solar consta de un tanque de agua caliente y un panel solar. El tanque está bien aislado y tiene una constante de tiempo de 64 horas. El panel solar genera 2000 Btu/hora durante el día, y el tanque tiene una capacidad calórica de 2°F por mil Btu. Si el agua en el tanque está inicialmente a 110°F y la temperatura del cuarto donde está el tanque es de 80°F, ¿cuál será la temperatura en el tanque después de 12 horas de luz solar?

14. En el problema 13 se usa ahora un tanque más grande con una capacidad calórica de 1°F por mil Btu y una constante de tiempo de 72 horas (con los demás factores idénticos). ¿Cuál será la temperatura en el tanque después de 12 horas?

15. **La ley de Stefan** para la radiación establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo a T grados Kelvin en un medio que está a M grados Kelvin es proporcional a $M^4 - T^4$. Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4) \ ,$$

donde k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación mediante separación de variables. Explique por qué las leyes de Newton y Stefan son casi iguales cuando T es cercana a M y M es constante. [*Sugerencia*: Factorice $M^4 - T^4$].

16. Muestre que $C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$ se puede escribir en la forma $A \cos(\omega t - \phi)$, donde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\tan \phi = C_2/C_1$. [*Sugerencia*: Use una identidad trigonométrica común, con $C_1 = A \cos \phi$, $C_2 = A \operatorname{sen} \phi$]. Use este hecho para verificar la representación alternativa (8) de $F(t)$ analizada en el ejemplo 2.

3.4 MECÁNICA DE NEWTON

La **mecánica** es el estudio del movimiento de los objetos y el efecto de las fuerzas que actúan sobre tales objetos. Es la base de varias ramas de la física y la ingeniería. La **mecánica de Newton**, o **clásica**, trata del movimiento de los objetos **comunes**, es decir, de los objetos que son grandes en comparación con un átomo y lentos en comparación con la velocidad de la luz. Un modelo de la mecánica de Newton se puede basar en las **leyes del movimiento de Newton**:[†]

1. Cuando un cuerpo se sujeta a una fuerza externa resultante nula, éste se mueve a velocidad constante.
2. Cuando un cuerpo se sujeta a una o más fuerzas externas, la razón de cambio temporal del momento del cuerpo es igual a la suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre él.

[†]Para un análisis de las leyes de movimiento de Newton, véase *University Physics*, 10a. edición, por F. W. Sears, M. W. Zemansky y H. D. Young (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1999).

3. Cuando un cuerpo interactúa con otro, la fuerza del primer cuerpo sobre el segundo es igual en magnitud, pero opuesta en dirección, a la fuerza del segundo cuerpo sobre el primero.

Los resultados experimentales obtenidos durante más de dos siglos verifican que estas leyes son extremadamente útiles para el estudio del movimiento de los objetos comunes en un **marco de referencia inercial**, es decir, un marco de referencia en donde un cuerpo no perturbado se mueve con velocidad constante. La segunda ley de Newton, que sólo se aplica a marcos de referencia inerciales, nos permite formular las ecuaciones de movimiento para un cuerpo. Podemos expresar la segunda ley de Newton como

$$\frac{dp}{dt} = F(t, x, v) \ ,$$

donde $F(x, t, v)$ es la fuerza resultante sobre el cuerpo en el instante t, posición x y velocidad v y $p(t)$ es el momento del cuerpo en el instante t. El momento es el producto de la masa del cuerpo y su velocidad, es decir,

$$p(t) = mv(t) \ ,$$

de modo que podemos expresar la segunda ley de Newton como

$$m\frac{dv}{dt} = ma = F(t, x, v) \ , \tag{1}$$

donde $a = dv/dt$ es la aceleración del cuerpo en el instante t.

Por lo general, uno sustituye $v = dx/dt$ en vez de la velocidad en (1) y obtiene una ecuación diferencial de segundo orden en la variable dependiente x. Sin embargo, en esta sección nos centraremos en situaciones donde la fuerza F no depende de x. Esto nos permite considerar (1) como una ecuación de *primer* orden

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = F(t, v)} \tag{2}$$

en $v(t)$.

Para aplicar las leyes de movimiento de Newton a un problema en mecánica, el siguiente procedimiento general puede ser útil.

PROCEDIMIENTO PARA MODELOS NEWTONIANOS

(a) Determine *todas* las fuerzas importantes que actúen sobre el objeto en estudio. Es útil trazar un sencillo diagrama del objeto que muestre estas fuerzas.
(b) Elija un eje de coordenadas adecuado en el cual represente el movimiento del objeto y las fuerzas que actúan sobre él. Recuerde que este sistema de coordenadas debe ser un marco de referencia inercial.
(c) Aplique la segunda ley de Newton expresada en la ecuación (2) para determinar las ecuaciones de movimiento del objeto.

En esta sección expresaremos la segunda ley de Newton en uno de dos sistemas de unidades: el U.S. Customary System (sistema inglés) o el sistema metro-kilogramo-segundo

(MKS). Las diversas unidades en estos sistemas se resumen en la tabla 3.2, junto con valores aproximados para la aceleración gravitacional (en la superficie de la Tierra).

TABLA 3.2 UNIDADES MECÁNICAS EN LOS SISTEMAS INGLÉS Y MKS

Unidad	Sistema inglés	Sistema MKS
Distancia	pies (ft)	metros (m)
Masa	slugs	kilogramos (kg)
Tiempo	segundos (s)	segundos (s)
Fuerza	libras (lb)	newtons (N)
g (Tierra)	32 pies/s^2	9.81 m/s^2

EJEMPLO 1 Un objeto de masa m recibe una velocidad inicial hacia abajo v_0 y se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Si la fuerza gravitacional es constante y la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, determinar la ecuación de movimiento para este objeto.

SOLUCIÓN Hay dos fuerzas actuando sobre el objeto: una fuerza constante debida al empuje hacia abajo de la gravedad y una fuerza debida a la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad del objeto y actúan en forma opuesta al movimiento del objeto. Por lo tanto, el movimiento del objeto se realizará a lo largo de un eje vertical. En este eje, elegimos el origen como el punto donde el objeto fue lanzado inicialmente y definimos $x(t)$ como la distancia que ha caído el objeto hasta el instante t (véase la figura 3.7).

Las fuerzas que actúan sobre el objeto a lo largo de este eje se pueden expresar como sigue. La fuerza debida a la gravedad es

$$F_1 = mg \; ,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra (véase la tabla 3.2). La fuerza debida a la resistencia del aire es

$$F_2 = -bv(t) \; ,$$

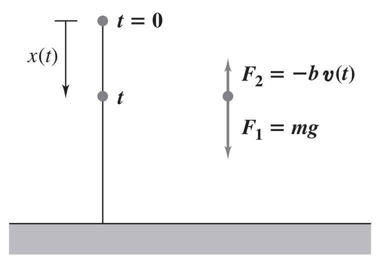


Figura 3.7 Fuerzas sobre un objeto que cae

donde $b(>0)$ es la constante de proporcionalidad[†] y el signo negativo está presente debido a que la resistencia del aire actúa en forma opuesta al movimiento del objeto. Por lo tanto, la fuerza neta que actúa en el objeto (véase la figura 3.7) es

(3) $$F = F_1 + F_2 = mg - bv(t) .$$

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton sustituyendo (3) en (2) para obtener

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv .$$

Como la velocidad inicial del objeto es v_0, un modelo para la velocidad del cuerpo que cae se expresa mediante el problema con valor inicial

(4) $$m\frac{dv}{dt} = mg - bv , \qquad v(0) = v_0 ,$$

donde g y b son constantes positivas.

El modelo (4) es el mismo que el obtenido en la sección 2.1. Al usar separación de variables o el método de la sección 2.3 para ecuaciones lineales, obtenemos

(5) $$\boldsymbol{v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-bt/m}} .$$

Como hemos considerado que $x = 0$ cuando $t = 0$, podemos determinar la ecuación de movimiento del objeto integrando $v = dx/dt$ con respecto de t. Así, de (5) obtenemos

$$x(t) = \int v(t)dt = \frac{mg}{b}t - \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-bt/m} + c ,$$

y haciendo $x = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$0 = -\frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + c ,$$

$$c = \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) .$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

(6) $$\boldsymbol{x(t) = \frac{mg}{b}t + \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)(1 - e^{-bt/m})} . \quad \blacksquare$$

En la figura 3.8 de la página 112 hemos bosquejado las gráficas de la velocidad y la posición como funciones de t. Observe que la velocidad $v(t)$ tiende a la asíntota horizontal

[†]Las unidades de b son lb-s/pie en el sistema inglés y N-s/m en el sistema MKS.

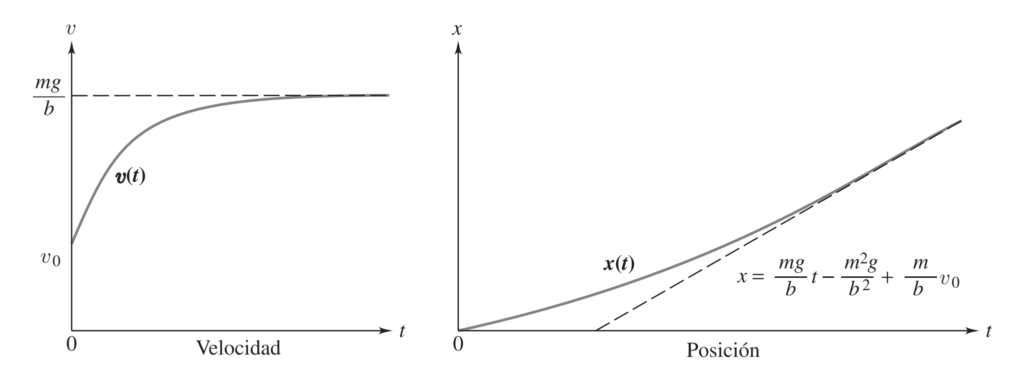


Figura 3.8 Gráficas de la posición y la velocidad de un cuerpo que cae, cuando $v_0 < mg/b$

$v = mg/b$ cuando $t \to +\infty$ y que la posición $x(t)$ tiende en forma asintótica a la recta

$$x = \frac{mg}{b}t - \frac{m^2g}{b^2} + \frac{m}{b}v_0$$

cuando $t \to +\infty$. El valor mg/b de la asíntota horizontal para $v(t)$ es la **velocidad límite**, o **terminal**, del objeto, y, de hecho, $v = mg/b =$ constante es una solución de (4). Como las dos fuerzas están en equilibrio, la llamamos una solución de "equilibrio".

Observe que la velocidad terminal depende de la masa pero no de la velocidad inicial del objeto; la velocidad de cualquier cuerpo en caída libre tiende al valor límite mg/b. Los objetos más pesados *realmente* caen, en presencia de fricción, más rápido que los ligeros, pero para un objeto dado, la velocidad terminal es la misma, sin importar que se lance hacia arriba o hacia abajo, o que simplemente se lance desde el reposo.

Ahora que hemos obtenido la ecuación de movimiento para un objeto que cae con resistencia del aire proporcional a v, podemos responder varias preguntas.

EJEMPLO 2 Un objeto de masa 3 kg se libera desde el reposo a 500 m sobre el piso y se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza gravitacional es constante, con $g = 9.81$ m/s^2 y que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto[†] con constante de proporcionalidad $b = 3$ N-s/m. Determinar el momento en que el objeto golpeará el suelo.

SOLUCIÓN Podemos usar el modelo analizado en el ejemplo 1, con $v_0 = 0$, $m = 3$, $b = 3$ y $g = 9.81$. De (6), la ecuación de movimiento en este caso es

$$x(t) = \frac{(3)(9.81)}{3}t - \frac{(3)^2(9.81)}{(3)^2}(1 - e^{-3t/3}) = (9.81)t - (9.81)(1 - e^{-t}) .$$

Como el objeto se libera a 500 m sobre el piso, podemos determinar el momento en que el

[†]Los efectos de modelos de resistencia del aire más sofisticados (como una ley cuadrática de arrastre) se analizan de manera numérica en los ejercicios 3.6, problema 20.

objeto golpea el suelo haciendo $x(t) = 500$ y despejando t. Así, escribimos

$$500 = (9.81)t - 9.81 + (9.81)e^{-t}$$

o

$$t + e^{-t} = \frac{509.81}{9.81} = 51.97 ,$$

donde hemos redondeado los cálculos a dos cifras decimales. Por desgracia, esta ecuación no se puede resolver de manera explícita en términos de t. Podríamos tratar de aproximar t mediante el método de aproximación de Newton (véase el apéndice A), pero en este caso, no es necesario. Como e^{-t} será muy pequeño para t cercano a 51.97 ($e^{-51.97} \approx 10^{-22}$), simplemente ignoramos el término e^{-t} y obtenemos como aproximación $t = 51.97$ segundos. ■

EJEMPLO 3 Una paracaidista cuya masa es de 75 kg se arroja desde un helicóptero que vuela a 4000 m sobre el suelo y cae hacia la tierra bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza gravitacional es constante. Suponga además que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad de la paracaidista, con la constante de proporcionalidad $b_1 =$ 15 N-s/m cuando el paracaídas se abre y con constante $b_2 = 105$ N-s/m cuando el paracaídas se cierra. Si el paracaídas no se abre sino hasta 1 minuto después de que la paracaidista deja el helicóptero, ¿después de cuántos segundos tocará el suelo?

SOLUCIÓN Sólo nos interesa el momento en que la paracaidista toca el suelo, no el lugar. Así, sólo consideramos el componente vertical de su descenso. Para esto, necesitamos usar dos ecuaciones: una para describir el movimiento antes de abrir el paracaídas y la otra para aplicarse después de abrirlo. Antes de abrirse el paracaídas, el modelo es igual al del ejemplo 1, con $v_0 = 0$, $m = 75$ kg, $b = b_1 = 15$ N-s/m y $g = 9.81$ m/s^2. Si $x_1(t)$ es la distancia de caída de la paracaidista durante t segundos y $v_1 = dx_1/dt$, entonces al sustituir esto en las ecuaciones (5) y (6), tenemos

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{(75)(9.81)}{15}\left(1 - e^{-(15/75)t}\right) \\ &= (49.05)\left(1 - e^{-0.2t}\right) , \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{(75)(9.81)}{15}t - \frac{(75)^2(9.81)}{(15)^2}\left(1 - e^{-(15/75)t}\right) \\ &= 49.05t - 245.25\left(1 - e^{-0.2t}\right) . \end{aligned}$$

Por lo tanto, después de un minuto, cuando $t = 60$, la paracaidista está cayendo a razón de

$$v_1(60) = (49.05)\left(1 - e^{-0.2(60)}\right) = 49.05 \text{ m/s} ,$$

y ha caído

$$x_1(60) = (49.05)(60) - (245.25)\left(1 - e^{-0.2(60)}\right) = 2697.75 \text{ m} .$$

(En éstos y otros cálculos de este problema, redondeamos nuestras respuestas a dos cifras decimales).

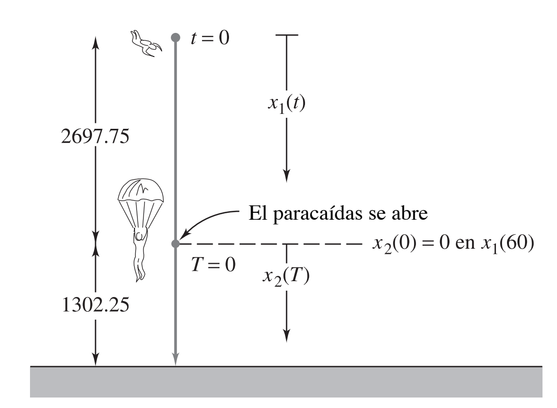


Figura 3.9 La caída de la paracaidista

Ahora, al abrirse el paracaídas, la paracaidista está a $4000 - 2697.75$, 0 1302.25 metros sobre el suelo y viaja a una velocidad de 49.05 m/s. Para determinar la ecuación de movimiento después de abrirse el paracaídas, sea $x_2(T)$ la posición de la paracaidista T segundos después de abrirse el paracaídas (de modo que $T = t - 60$), al hacer $x_2(0) = 0$ en $x_1(60)$ (véase la figura 3.9). Además, suponga que la velocidad inicial de la paracaidista después de abrir el paracaídas es igual a la velocidad final antes de abrirse; es decir, $x_2'(0) = x_1'(60) =$ 49.05 m/s. Como las fuerzas que actúan sobre la paracaidista son las mismas que actúan sobre el objeto del ejemplo 1, de nuevo podemos usar las ecuaciones (5) y (6). Con $v_0 = 49.05$, $m = 75$, $b = b_2 = 105$ y $g = 9.81$, tendremos de (6) que

$$x_2(T) = \frac{(75)(9.81)}{105}T + \frac{75}{105}\left[49.05 - \frac{(75)(9.81)}{105}\right]\left(1 - e^{-(105/75)T}\right)$$
$$= 7.01T + 30.03\left(1 - e^{-1.4T}\right) .$$

Para determinar el momento en que la paracaidista llega al suelo, hacemos $x_2(T) =$ 1302.25, la altura a la que estaba la paracaidista al abrir su paracaídas. Esto da como resultado

$$7.01T + 30.03 - 30.03e^{-1.4T} = 1302.25$$

(7) $$T - 4.28e^{-1.4T} - 181.49 = 0 .$$

De nuevo, no podemos despejar a T en forma explícita. Sin embargo, observe que $e^{-1.4T}$ es muy pequeño para T cercana a 181.49, de modo que ignoramos el término exponencial y obtenemos $T = 181.49$. Por lo tanto, la paracaidista golpeará el suelo 181.49 segundos después de abrir el paracaídas, o 241.49 segundos después de arrojarse desde el helicóptero. ■

En el cálculo para T en la ecuación (7), vimos que el término exponencial $e^{-1.4T}$ podía despreciarse. En consecuencia, ignorando el término exponencial correspondiente en la ecuación (5), vemos que la velocidad de la paracaidista al momento del impacto es

$$\frac{mg}{b_2} = \frac{(75)(9.81)}{105} = 7.01 \text{ m/s} \quad ,$$

que es la velocidad límite para su caída con el paracaídas abierto.

EJEMPLO 4 En algunas situaciones, la fuerza de arrastre resistente sobre un objeto es proporcional a una potencia de $|v|$ con exponente distinto de 1. Entonces, cuando la velocidad es positiva, la segunda ley de Newton para un objeto en caída se generaliza como

$$\textbf{(8)} \qquad m = \frac{dv}{dt} = mg - bv^r ,$$

donde m y g tienen su interpretación usual y b (>0) y el exponente r son constantes experimentales. [Más en general, la fuerza de arrastre sería $-b|v|^r$ signo(v)]. Exprese la solución a (8) para el caso $r = 2$.

SOLUCIÓN La solución de equilibrio (positiva), con las fuerzas balanceadas, es $v = v_0 = \sqrt{mg/b}$. En caso contrario, escribimos (8) como $v' = b(v_0^2 - v^2)/m$, una ecuación separable que podemos resolver usando fracciones parciales o las tablas de integrales en el forro:

$$\int \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{1}{2v_0} \ln \left| \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right| = \frac{b}{m} t + c_1 ,$$

$$\left| \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right| = c_2 e^{2v_0 bt/m} ,$$

y después de un poco de álgebra,

$$v = v_0 \frac{c_3 - e^{-2v_0 bt/m}}{c_3 + e^{-2v_0 bt/m}} .$$

Aquí, $c_3 = c_2$ signo$[(v_0 + v)/(v_0 - v)]$ queda determinada por las condiciones iniciales. De nuevo, vemos que v tiende a la velocidad terminal v_0 cuando $t \to \infty$.

EJERCICIOS 3.4

A menos que se indique lo contrario, en los siguientes problemas suponemos que la fuerza gravitacional es constante, con $g = 9.81$ m/s^2 en el sistema MKS y $g = 32$ pies/s^2 en el sistema inglés.

1. Un objeto de masa 5 kg se libera desde el reposo a 1000 m sobre el suelo y se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponiendo que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, con constante de proporcionalidad $b = 50$ N-s/m, determine la ecuación de movimiento del objeto. ¿Cuándo tocará el objeto al suelo?

2. Un objeto de 400 libras se libera desde el reposo a 500 pies sobre el suelo y se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponiendo que la fuerza en libras debida a la resistencia del aire es $-10v$, donde v es la velocidad del objeto en pies/s, determine la ecuación de movimiento del objeto. ¿En qué momento tocará el objeto al suelo?

3. Si el objeto del problema 1 tiene una masa de 500 kg en vez de 5 kg, ¿cuándo tocará al suelo? [*Sugerencia*: En este caso, el término exponencial es demasiado grande como para ignorarlo. Use el método de Newton para aproximar el instante t en que el objeto golpea el suelo (véase el apéndice A)].

4. Si el objeto del problema 2 se libera desde el reposo a 30 pies sobre el suelo en vez de 500 pies, ¿cuándo golpeará el suelo? [*Sugerencia*: Utilice el método de Newton para hallar t].

5. Un objeto de masa 5 kg recibe una velocidad inicial hacia abajo de 50 m/s y luego se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza en newtons debida a la resistencia del aire es $-10v$, donde v es la velocidad del objeto en m/s. Determine la ecuación de movimiento del objeto. Si el objeto está inicialmente a 500 m sobre el suelo, determine el momento en que el objeto golpeará el suelo.

6. Un objeto de masa 8 kg recibe una velocidad inicial hacia arriba de 20 m/s y luego se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza en newtons debida a la resistencia del aire es $-16v$, donde v es la velocidad del objeto en m/s. Determine la ecuación de movimiento del objeto. Si el objeto está en un principio a 100 m sobre el suelo, determine el momento en que el objeto golpeará el suelo.

7. Una paracaidista cuya masa es de 75 kg se arroja de un helicóptero que vuela a 2000 m sobre el suelo y cae hacia éste bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad de la paracaidista, con la constante de proporcionalidad $b_1 = 30$ N-s/m cuando el paracaídas está cerrado y $b_2 = 90$ N-s/m cuando se abre. Si el paracaídas no se abre hasta que la velocidad de la paracaidista es de 20 m/s, ¿después de cuántos segundos llegará ella al suelo?

8. Un paracaidista cuya masa es de 100 kg se arroja de un helicóptero que vuela a 3000 m sobre el suelo y cae bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista, con la constante de proporcionalidad $b_3 = 20$ N-s/m cuando el paracaídas está cerrado y $b_4 = 100$ N-s/m cuando se abre. Si el paracaídas no se abre hasta 30 segundos después de que el paracaidista sale del helicóptero, ¿después de cuántos segundos llegará él al suelo? Si el paracaídas no se abre hasta 1 minuto después de que el paracaidista sale del helicóptero, ¿después de cuántos segundos llegará él al suelo?

9. Un objeto con masa de 100 kg se lanza desde el reposo de una lancha hacia el agua y se deja hundir. Aunque la gravedad jala el objeto hacia abajo, una fuerza de flotación de $1/40$ veces el peso del objeto lo empuja hacia arriba (peso $= mg$). Si suponemos que la resistencia del agua ejerce sobre el objeto una fuerza proporcional a la velocidad del objeto, con constante de proporcionalidad 10 N-s/m, determine la ecuación de movimiento del objeto. ¿Después de cuántos segundos ocurrirá que la velocidad del objeto es igual a 70 m/s?

10. Un objeto con masa de 2 kg se lanza desde el reposo de una plataforma a 30 m sobre el agua y se deja caer bajo la influencia de la gravedad. Después de que el objeto golpea el agua, comienza a hundirse, con la gravedad jalándolo hacia abajo y una fuerza de flotación empujándolo hacia arriba. Suponga que la fuerza de gravedad es constante, que no hay cambios en el momento del objeto al golpear el agua, que la fuerza de flotación es $1/2$ del peso (peso $= mg$), y que la fuerza debida a la resistencia del aire o del agua es proporcional a la velocidad del objeto, con constante de proporcionalidad $b_1 = 10$ N-s/m en el aire y $b_2 = 100$ N-s/m en el agua. Determine la ecuación de movimiento del objeto. ¿Cuál es la velocidad del objeto 1 minuto después de ser arrojado?

11. En el ejemplo 1 hallamos la velocidad del objeto en función del tiempo (ecuación (5)). En ocasiones es útil tener una expresión independiente de t que relacione v con x. Halle esta relación para el movimiento del ejemplo 1. [*Sugerencia*: Si $v(t) = V(x(t))$, entonces $dv/dt = (dV/dx)V$].

12. Un proyectil con masa de 2 kg se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 200 m/s. La magnitud de la fuerza sobre el proyectil debida a la resistencia del aire es $|v|/20$. ¿En qué momento alcanzará el proyectil su máxima altura sobre el suelo? ¿Cuál es esa máxima altura?

13. Cuando la velocidad v de un objeto es muy grande, la magnitud de la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a v^2 y la fuerza actúa en dirección opuesta al movimiento del objeto. Un proyectil con masa de 3 kg se lanza desde el suelo, hacia arriba y con una velocidad inicial de 500 m/s. Si la magnitud de la fuerza debida a la resistencia del aire es $(0.1)v^2$, ¿en qué momento alcanzará el proyectil su máxima altura sobre el suelo? ¿Cuál es esa máxima altura?

14. Un objeto de masa m se libera desde el reposo y cae bajo la influencia de la gravedad. Si la magnitud de la fuerza debida a la resistencia del aire es bv^n, donde b y n son constantes positivas, determine la velocidad límite del objeto (suponiendo que este límite existe). [*Sugerencia*: Justifique que la existencia de una velocidad límite (finita) implica que $dv/dt \to 0$ cuando $t \to +\infty$].

15. Un volante gira gracias a un motor que ejerce un momento de torsión constante T (véase la figura 3.10).

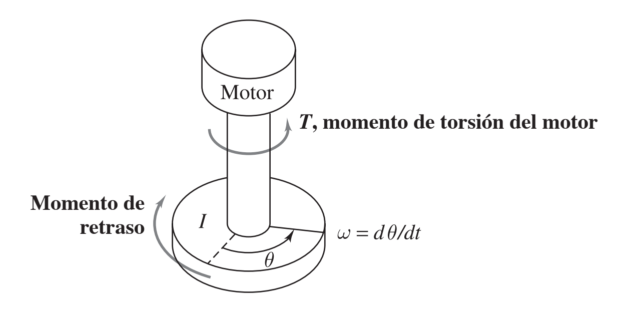


Figura 3.10 Volante controlado por un motor

Un momento de retraso debido a la fricción es proporcional a la velocidad angular ω. Si el momento de inercia del volante es I y su velocidad angular inicial es ω_0, determine la ecuación para la velocidad angular ω en función del tiempo. [*Sugerencia*: Use la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación; es decir, momento de inercia $\times$ aceleración angular $=$ suma de los momentos de torsión].

16. Determine la ecuación para la velocidad angular ω en el problema 15, suponiendo que el momento de retraso es proporcional a $\sqrt{\omega}$.

17. En el problema 16, sean $I = 50$ kg-m^2 y el momento de retraso igual a $5\sqrt{\omega}$ N-m. Si el motor se apaga con la velocidad angular en 225 radianes/segundo, determine el tiempo que tardará en detenerse por completo el volante.

18. Cuando un objeto se desliza en una superficie, encuentra una fuerza de resistencia llamada **fricción**. Esta fuerza tiene magnitud μN, donde μ es el **coeficiente de fricción cinética** y N es la magnitud de la fuerza normal aplicada por la superficie al objeto. Suponga que un objeto de masa 30 kg se libera desde la parte superior de un plano inclinado 30° con la horizontal (véase la figura 3.11). Suponga que la fuerza gravitacional es constante, que la resistencia del aire es despreciable y que el coeficiente de fricción cinética es $\mu = 0.2$. Determine la ecuación de movimiento para el objeto conforme se desliza en el plano. Si la superficie superior del plano tiene una longitud de 5 m, ¿cuál es la velocidad del objeto al llegar al fondo?

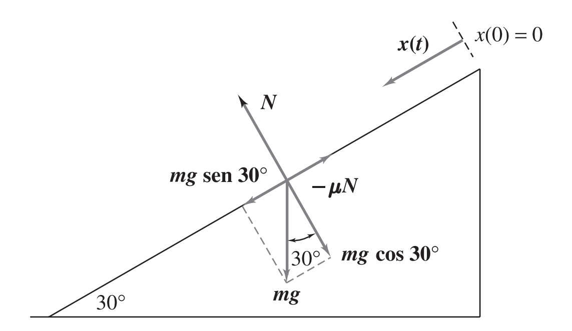


Figura 3.11 Fuerzas sobre un objeto en un plano inclinado

19. Un objeto con masa de 60 kg parte del reposo en la parte superior de un plano inclinado a 45°. Suponga que el coeficiente de fricción cinética es 0.05 (véase el problema 18). Si la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, digamos, $-3v$, determine la ecuación de movimiento del objeto. ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar a la parte inferior del plano inclinado si la rampa mide 10 m de largo?

20. Un objeto en reposo en un plano inclinado no se deslizará hasta que la componente de la fuerza gravitacional hacia abajo de la rampa sea suficiente para superar la fuerza debida a la **fricción estática**. La fricción estática queda descrita mediante una ley experimental similar al caso de la fricción cinética (problema 18); tiene una magnitud de *a lo más* μN, donde μ es el coeficiente de fricción estática y N es, de nuevo, la magnitud de la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el objeto. Si el plano está inclinado un ángulo α, determine el valor crítico α_0 tal que el objeto se deslizará si $\alpha > \alpha_0$ pero no se moverá para $\alpha < \alpha_0$.

21. Un velero ha navegado (en línea recta) bajo un viento ligero a 1 m/s. De pronto, el viento comienza a arreciar, soplando lo suficiente como para aplicar una fuerza constante de 600 N al velero. La única otra fuerza que actúa sobre el bote es la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad de la embarcación. Si la constante de proporcionalidad para la resistencia del agua es $b = 100$ N-s/m y la masa del velero es de 50 kg, determine la ecuación de movimiento del velero. ¿Cuál es la velocidad límite del velero bajo este viento?

22. En el problema 21, se observa que cuando la velocidad del velero alcanza los 5 m/s, el bote comienza a elevarse sobre el agua y a "planear". Al ocurrir esto, la constante de proporcionalidad para la resistencia del agua cae hasta $b_0 = 60$ N-s/m. Determine la nueva ecuación de movimiento del velero. ¿Cuál es la velocidad límite del velero bajo este viento cuando está planeando?

23. Los veleros A y B tienen cada uno una masa de 60 kg y cruzan la línea de salida al mismo tiempo en el primer tramo de una carrera. Cada uno tiene una velocidad inicial de 2 m/s. El viento aplica una fuerza constante de 650 N a cada bote, y la fuerza debida a la resistencia del agua es proporcional a la velocidad del bote. Para el velero A, las constantes de proporcionalidad son $b_1 = 80$ N-s/m antes de planear, cuando la velocidad es menor que 5 m/s, y $b_2 = 60$ N-s/m cuando la velocidad es mayor que 5 m/s. Para el velero B, las constantes de proporcionalidad son $b_3 = 100$ N-s/m cuando la velocidad es menor que 6 m/s y $b_4 = 50$ N-s/m cuando la velocidad es mayor de 6 m/s. Si el primer tramo de la carrera es de 500 m de longitud, ¿cuál velero estará de líder al final del primer tramo?

24. Vuelo de un cohete. Un cohete con masa inicial m_0 kg se lanza de manera vertical desde el suelo. El cohete arroja gas a la razón constante de α kg/s y a una velocidad constante de β m/s con respecto del cohete. Suponga que la magnitud de la fuerza gravitacional es proporcional a la masa, con constante de proporcionalidad g. Como la masa no es constante, la segunda ley de Newton conduce a la ecuación

$$(m_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} - \alpha\beta = -g(m_0 - \alpha t) ,$$

donde $v = dx/dt$ es la velocidad del cohete, x es la altura sobre el suelo y $m_0 - \alpha t$ es la masa del cohete t segundos después del lanzamiento. Si la velocidad inicial es cero, resuelva la ecuación anterior para determinar la velocidad del cohete y su altura sobre el suelo para $0 \le t < m_0/\alpha$.

25. Velocidad de escape. De acuerdo con la ley de gravitación de Newton, la fuerza de atracción entre dos objetos varía de manera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Es decir, $F_g = GM_1M_2/r^2$, donde M_1 y M_2 son las masas de los objetos, r es la distancia entre ellos (de centro a centro), F_g es la fuerza de atracción y G es la constante de proporcionalidad. Considere un proyectil de masa constante m lanzado en forma vertical desde la Tierra (figura 3.12). Sea t el tiempo y v la velocidad del proyectil.

(a) Muestre que el movimiento del proyectil bajo la fuerza gravitacional de la Tierra, queda descrito mediante la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gR^2}{r^2} ,$$

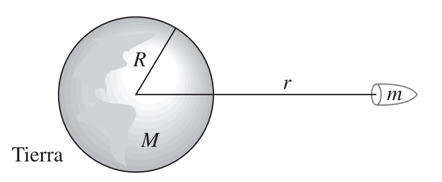


Figura 3.12 Proyectil escapando de la Tierra

donde r es la distancia entre el proyectil y el centro de la Tierra, R es el radio de la Tierra, M es la masa de la Tierra y $g = GM/R^2$.

(b) Use el hecho de que $dr/dt = v$ para obtener

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2} .$$

(c) Si el proyectil sale de la superficie de la Tierra con velocidad v_0, muestre que

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR .$$

(d) Use el resultado de la parte (c) para mostrar que la velocidad del proyectil sigue siendo positiva si y sólo si $v_0^2 - 2gR > 0$. La velocidad $v_e = \sqrt{2gR}$ es la **velocidad de escape** de la Tierra.

(e) Si $g = 9.81$ m/s^2 y $R = 6370$ km para la Tierra, ¿cuál es la velocidad de escape de la Tierra?

(f) Si la aceleración debida a la gravedad para la Luna es de $g_m = g/6$ y el radio de la Luna es $R_m = 1738$ km, ¿cuál es la velocidad de escape de la Luna?

3.5 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En esta sección consideraremos la aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden a circuitos eléctricos sencillos que están formados por una fuente de voltaje (por ejemplo, baterías o generadores), una resistencia y un inductor o un condensador. En la figura 3.13 aparecen los circuitos llamados RL y RC. En la sección 5.6 se analizarán circuitos más generales.

Los principios físicos que gobiernan los circuitos eléctricos fueron establecidos por G. R. Kirchhoff[†] en 1859. Los principios son los siguientes:

1. **Ley de la corriente de Kirchhoff**: La suma algebraica de las corrientes que fluyen en cualquier punto de unión debe anularse.

[†] ***Nota histórica:*** Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) fue un físico alemán que destacó por sus investigaciones en análisis espectral, óptica y electricidad.

2. **Ley del voltaje de Kirchhoff**: La suma algebracia de los cambios instantáneos del potencial (caídas de voltaje) en torno de cualquier lazo cerrado debe anularse.

La ley de la corriente de Kirchhoff implica que la misma corriente pasa por cada elemento del circuito de la figura 3.13.

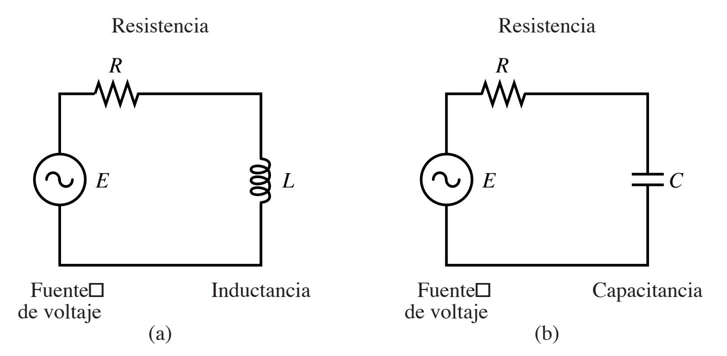


Figura 3.13 (a) Circuito *RL* y (b) circuito *RC*

Para aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff, debemos conocer la caída de voltaje a través de cada elemento del circuito. Estas fórmulas para el voltaje aparecen a continuación (usted puede consultar un texto de introducción a la física para más detalles).

(a) De acuerdo con la ley de Ohm, la caída de voltaje E_R a través de una resistencia es proporcional a la corriente I que pasa por la resistencia:

$$E_R = RI.$$

La constante de proporcionalidad R se llama la **resistencia**.

(b) Se puede mostrar mediante las leyes de Faraday y Lenz que la caída de voltaje E_L a través de un inductor es proporcional a la razón de cambio instantánea de la corriente I:

$$E_L = L\frac{dl}{dt}.$$

La constante de proporcionalidad L se llama la **inductancia**.

(c) La caída de voltaje E_C a través de un condensador es proporcional a la carga eléctrica q sobre el condensador:

$$E_C = \frac{1}{C}q\ .$$

La constante C es llamada la **capacitancia.**

Las unidades y símbolos comunes utilizados para los circuitos eléctricos aparecen en la tabla 3.3.

TABLA 3.3 UNIDADES Y SÍMBOLOS COMUNES UTILIZADOS EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Cantidad	Representación literal	Unidades	Representación simbólica
Fuente de voltaje	E	voltio (V)	—○— Generador —|├ Batería
Resistencia	R	ohm (Ω)	-\/\/\/-
Inductancia	L	henrio (H)	-ꝏꝏ-
Capacitancia	C	faradio (F)	—|├—
Carga	q	coulomb (C)	
Corriente	I	amperio (A)	

Suponemos que una fuente de voltaje *suma* voltaje o energía potencial al circuito. Si $E(t)$ denota el voltaje que se proporciona al circuito en el instante t, entonces la ley del voltaje de Kirchhoff aplicada al circuito RL en la figura 3.13(a) da

(1) $$E_L + E_R = E(t) \ .$$

Al sustituir en (1) las expresiones para E_L y E_R tenemos

(2) $$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \ .$$

Observe que esta ecuación es lineal (compare la sección 2.3); al escribirla en forma canónica obtenemos el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int (R/L)dt} = e^{Rt/L} \ ,$$

que conduce a la solución general [véase la ecuación (8), sección 2.3]

(3) $$I(t) = e^{-Rt/L}\left[\int e^{Rt/L}\frac{E(t)}{L}\,dt + K\right] \ .$$

Para el circuito RL, por lo general se da la corriente inicial $I(0)$ como condición inicial.

EJEMPLO 1 Un circuito RL con una resistencia de 1 Ω y un inductor de 0.01 H es controlado por un voltaje $E(t) = \text{sen } 100t$ V. Si la corriente inicial en el inductor es nula, determinar los voltajes subsecuentes en la resistencia y en el inductor, así como la corriente.

SOLUCIÓN De la ecuación (3) y las tablas de las integrales, vemos que la solución general de la ecuación lineal (2) está dada por

$$I(t) = e^{-100t}\left(\int e^{100t}\frac{\text{sen } 100t}{0.01}\,dt + K\right)$$

$$= e^{-100t}\left[100\,\frac{e^{100t}(100 \text{ sen } 100t - 100 \cos 100t)}{10{,}000 + 10{,}000} + K\right]$$

$$= \frac{\text{sen } 100t - \cos 100t}{2} + Ke^{-100t} \ .$$

Para $I(0) = 0$, obtenemos $-1/2 + K = 0$, de modo que $K = 1/2$ y la corriente es

$$I(t) = 0.5(\text{sen } 100t - \cos 100t + e^{-100t}) \ .$$

Entonces, los voltajes en el inductor y la resistencia están dados por

$$E_R(t) = RI(t) \equiv I(t) \ ,$$

$$E_L(t) = L\frac{dI}{dt} = (0.5)(\cos 100t + \text{sen } 100t - e^{-100t}) \ . \ \blacksquare$$

Ahora regresemos al circuito RC de la figura 3.13(b). Al aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff se tiene

$$RI + q/C = E(t) \ .$$

Sin embargo, la corriente en el condensador es la razón de cambio de su carga: $I = dq/dt$. Así,

(4) $$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

es la ecuación diferencial para el circuito RC. La condición inicial para un condensador es su carga q en $t = 0$.

EJEMPLO 2 Suponga que un condensador de C faradios soporta una carga inicial de Q coulombs. Para alterar la carga, se aplica una fuente de voltaje constante de V voltios a través de una resistencia de R ohms. Describir la carga del condensador para $t > 0$.

SOLUCIÓN Como $E(t) = V$ es constante en la ecuación (4), ésta es separable y lineal; su solución general se encuentra fácilmente:

$$q(t) = CV + Ke^{-t/RC} \ .$$

La solución que cumple la condición inicial prescrita es

$$q(t) = CV + (Q - CV)e^{-t/RC} \ .$$

La carga en el condensador cambia de manera exponencial de Q a CV al aumentar el tiempo. ■

Si hacemos $V = 0$ en el ejemplo 2, vemos que la *constante de tiempo* (es decir, el tiempo necesario para que la carga en el condensador caiga a $1/e$ por su valor inicial) es RC. Así, un condensador es un dispositivo de almacenamiento de energía con fugas; inclusive la muy alta resistencia del aire circundante puede disipar su carga, particularmente en un día húmedo. Los condensadores se utilizan en los teléfonos celulares para almacenar la energía eléctrica de la batería cuando el teléfono se encuentra en un estado (más o menos) inactivo de recepción y luego ayudar a la batería a proporcionar energía durante el modo de transmisión.

La constante de tiempo para la corriente en el inductor del circuito RL se puede deducir en el ejemplo 1 como L/R. Una aplicación del circuito RL es a las bujías en un motor de combustión. Si una fuente de voltaje establece una corriente no nula en un inductor y la fuente se desconecta súbitamente, el rápido cambio en lacorriente produce un alto dI/dt y, de acuerdo con la fórmula $E_L = L\,dI/dt$, el inductor genera un pico de voltaje suficiente para causar una chispa a través de las terminales, provocando la ignición de la gasolina.

Si un inductor y un condensador aparecen *juntos* en un circuito, la ecuación diferencial correspondiente será de segundo orden. Regresaremos a los circuitos RLC en la sección 5.6.

EJERCICIOS 3.5

1. Un circuito RL con una resistencia de 5 Ω y un inductor de 0.05 H tiene una corriente de 1 A en $t = 0$, cuando se aplica una fuente de voltaje $E(t) = 5 \cos 120t$ V. Determine la corriente y el voltaje subsecuentes en el inductor.
2. Un circuito RC con una resistencia de 1 Ω y un condensador de 0.000001 F tiene un voltaje $E(t) = \text{sen}\ 100t$ V. Si el voltaje inicial en el condensador es nulo, determine el voltaje en la resistencia, el voltaje en el inductor y la corriente subsecuentes.
3. La trayectoria de una señal eléctrica binaria entre compuertas en un circuito integrado se puede modelar como un circuito RC, como en la figura 3.13(b); la fuente de voltaje modela la compuerta de transmisión y el condensador modela la compuerta de recepción. Por lo general, la resistencia es 100 Ω y la capacitancia es muy pequeña, digamos 10^{-12} F (1 picofaradio, pF). Si el condensador no tiene carga inicialmente y la compuerta de transmisión cambia de manera instantánea de 0 a 5 V, ¿cuánto tiempo tarda el voltaje en la compuerta de recepción en alcanzar (digamos) 3 V? (Éste es el tiempo necesario para transmitir un “1” lógico).
4. Si la resistencia en el circuito RL de la figura 3.13(a) es igual a cero, muestre que la corriente $I(t)$ es directamente proporcional a la integral del voltaje aplicado $E(t)$. De manera similar, muestre que si la resistencia en el circuito RC de la figura 3.13(b) es cero, la corriente es directamente proporcional a la derivada del voltaje aplicado. (En las aplicaciones a la ingeniería, con frecuencia es necesario generar un *voltaje*, en vez de una corriente, que es la integral o derivada de otro voltaje. El proyecto D muestra cómo lograr esto con un *amplificador operacional*).
5. La *potencia* generada o disipada por un elemento de un circuito es igual al voltaje a través del elemento por la corriente que pasa por el elemento. Muestre que la potencia disipada por una resistencia es igual a I^2R, que la potencia asociada a un inductor es igual a la derivada de $(1/2)LI^2$, y que la potencia asociada a un condensador es igual a la derivada de $(1/2)CE_C^2$.
6. Deduzca una ecuación de equilibrio de la potencia para los circuitos RL y RC. (Ver problema 5). Analice el significado de los signos de los tres términos de potencia.
7. Un electroimán industrial se puede modelar como un circuito RL, cuando se energiza mediante una fuente de voltaje. Si la inductancia es 10 H y el embobinado contiene 3 Ω de resistencia, ¿cuánto tiempo tarda un voltaje constante aplicado en energizar el electroimán hasta 90% de su valor final (es decir, que la corriente sea igual a 90% de su valor asintótico)?
8. Un condensador de 10^{-8} F (10 nanofaradios) se carga hasta 50 V y luego se desconecta. Se puede modelar la fuga de la carga del condensador con un circuito RC sin fuente de voltage y la resistencia del aire entre las placas del condensador. En un día frío y seco, el brinco en la resistencia del aire es 5×10^{13} Ω; en un día húmedo, la resistencia es 7×10^6 Ω. ¿Cuánto tiempo tardará el voltaje del condensador en disiparse hasta la mitad de su valor original en cada día?

3.6 MÉTODO DE EULER MEJORADO

Aunque las técnicas analíticas presentadas en el capítulo 2 fueron útiles para la gama de modelos matemáticos presentados anteriormente en este capítulo, *la mayor parte de las ecuaciones diferenciales que aparecen en las aplicaciones no se pueden resolver de manera explícita o implícita*. Esto es particularmente cierto para las ecuaciones de orden superior y los sistemas de ecuaciones, que estudiaremos en capítulos posteriores. En esta sección y la siguiente analizaremos métodos para obtener una *aproximación* numérica de la solución de un problema con valores iniciales para una ecuación diferencial de primer orden. Nuestro objetivo es desarrollar algoritmos que usted pueda utilizar con una calculadora o una computadora. Estos algoritmos también se extienden de manera natural a ecuaciones de orden su-

perior (véase la sección 5.3). Describiremos la justificación detrás de cada método, pero dejaremos el análisis más detallado para textos de análisis numérico.†

Consideremos el problema con valor inicial

$$\textbf{(1)} \qquad y' = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \ .$$

Para garantizar que (1) tiene una única solución, suponemos que f y $\partial f/\partial y$ son continuas en un rectángulo $R := \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ que contiene a (x_0, y_0). El teorema 1 del capítulo 1 implica que el problema con valor inicial (1) tiene una solución única $\phi(x)$ en algún intervalo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, donde δ es un número positivo. Como δ no se conoce *a priori*, no hay garantía de que la solución exista en un punto particular $x(\neq x_0)$, aunque x esté en el intervalo (a, b). Sin embargo, si $\partial f/\partial y$ es continua y *acotada*†† en la franja vertical

$$S := \{(x, y): a < x < b, -\infty < y < \infty\} \ ,$$

se puede ver que (1) tiene una única solución en todo el intervalo (a, b). Al describir los métodos numéricos, supondremos que esta última condición se satisface y que f tiene tantas derivadas parciales continuas como sea necesario.

En la sección 1.4 usamos el concepto de campos de direcciones para motivar un esquema para aproximar la solución del problema con valor inicial (1). Este esquema, llamado **método de Euler**, es uno de los más básicos, por lo que vale la pena analizar sus ventajas, desventajas y posibles mejoras. Comenzaremos deduciendo el método de Euler de una manera ligeramente distinta a la presentada en la sección 1.4.

Sea $h > 0$ fijo (h es el **tamaño de paso**) y consideremos los puntos equidistantes

$$\textbf{(2)} \qquad x_n := x_0 + nh \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Queremos obtener una aproximación de la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial (1) en los puntos x_n que están en el intervalo (a, b). Describiremos un método que genere valores $y_0, y_1, y_2, \ldots$ que aproximen a $\phi(x)$ en los puntos respectivos $x_0, x_1, x_2, \ldots$; es decir,

$$y_n \approx \phi(x_n) \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Por supuesto, el primer "aproximante" y_0 es exacto, pues $y_0 = \phi(x_0)$ está dado. Así, debemos describir la forma de calcular $y_1, y_2, \ldots$.

Para el método de Euler, comenzamos integrando ambos lados de la ecuación (1), de x_n a x_{n+1} para obtener

$$\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi'(t)\,dt = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(t, \phi(t)\big)\,dt \ ,$$

donde hemos sustituido $\phi(x)$ en vez de y. Al despejar $\phi(x_{n+1})$, tenemos

$$\textbf{(3)} \qquad \phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(t, \phi(t)\big)\,dt \ .$$

---

†Véase, por ejemplo, *Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations*, por L. Shampine (Chapman & Hall, Nueva York, 1994) o *Numerical Analysis*, 7a. edición, por R. L. Burden y J. D. Faires (Brooks/Cole, 2001).

††Una función $g(x, y)$ está acotada en S si existe un número M tal que $|g(x, y)| \leq M$ para toda (x, y) en S.

Sin conocer $\phi(t)$, no podemos integrar $f(t, \phi(t))$. Por lo tanto, debemos aproximar la integral en (3). Supóngase que ya hemos hallado $y_n \approx \phi(x_n)$; entonces, el método más sencillo consiste en aproximar el área bajo la función $f(t, \phi(t))$ mediante el rectángulo con base $[x_n, x_{n+1}]$ y altura $f(x_n, \phi(x_n))$ —véase la figura 3.13—. Esto da como resultado

$$\phi(x_{n+1}) \approx \phi(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, \phi(x_n)) .$$

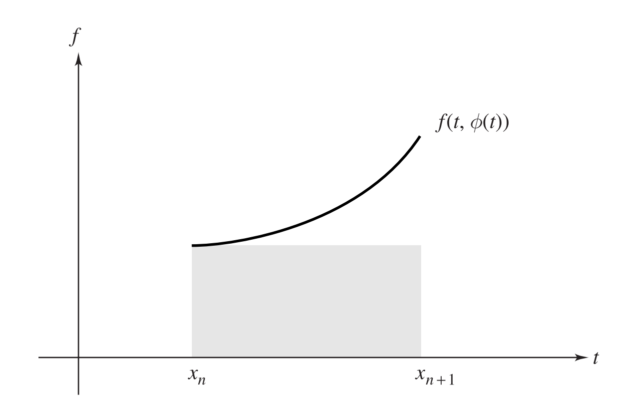


Figura 3.14 Aproximación mediante un rectángulo

Al sustituir h en vez de $x_{n+1} - x_n$ y la aproximación y_n en vez de $\phi(x_n)$, obtenemos el esquema numérico

(4) $$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) , \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,}$$

que es el método de Euler.

Si partimos del valor dado y_0, usamos (4) para calcular $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, luego usamos $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, y así sucesivamente. En la sección 1.4 aparecen varios ejemplos del método de Euler.

Como analizamos en la sección 1.4, si quisiéramos utilizar el método de Euler para aproximar la solución de un problema con valor inicial (1) en un punto particular de x, digamos, $x = c$, entonces debemos determinar primero un tamaño de paso adecuado h tal que $x_0 + Nh = c$ para algún entero N. Por ejemplo, podemos considerar $N = 1$ y $h = c - x_0$ para alcanzar la aproximación justo después de un paso:

$$\phi(c) = \phi(x_0 + h) \approx y_1 .$$

Si en vez de esto queremos usar 10 pasos en el método de Euler, elegimos $h = (c - x_0)/10$ y obtenemos en última instancia

$$\phi(c) = \phi(x_0 + 10h) = \phi(x_{10}) \approx y_{10} .$$

En general, según el tamaño de h, obtendremos distintas aproximaciones de $\phi(c)$. Es razonable esperar que cuando h se haga más pequeño (o, de manera equivalente, N crezca), las aproximaciones de Euler tenderán al valor exacto $\phi(c)$. Por otro lado, al disminuir h, el número (y costo) de los cálculos crecerá, y con ello también aumentarán los errores surgidos del redondeo. Así, es importante analizar la forma en que el error en el esquema de aproximación varía con h.

Si se usa el método de Euler para aproximar la solución $\phi(x) = e^x$ del problema

(5) $$y' = y , \quad y(0) = 1 ,$$

en $x = 1$, entonces obtenemos aproximaciones de la constante $e = \phi(1)$. Se puede ver que estas aproximaciones adoptan una forma particularmente sencilla que nos permite calcular el error en la aproximación con el tamaño de paso h. De hecho, al hacer $f(x, y) = y$ en (4) se tiene

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1 + h)y_n , \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Como $y_0 = 1$, obtenemos

$$y_1 = (1 + h)y_0 = 1 + h$$
$$y_2 = (1 + h)y_1 = (1 + h)(1 + h) = (1 + h)^2$$
$$y_3 = (1 + h)y_2 = (1 + h)(1 + h)^2 = (1 + h)^3$$

y, en general,

(6) $$y_n = (1 + h)^n , \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Para el problema (5) tenemos $x_0 = 0$, de modo que para obtener aproximaciones en $x = 1$ debemos hacer $nh = 1$. Es decir, h debe ser el recíproco de un entero $(h = 1/n)$. Al reemplazar n por $1/h$ en (6), vemos que el método de Euler nos proporciona la (conocida) aproximación $(1 + h)^{1/h}$ a la constante e. En la tabla 3.4 enumeramos esta aproximación para $h = 1$, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} y 10^{-4}, junto con los errores correspondientes

$$e - (1 + h)^{1/h} .$$

La segunda y tercera columnas de la tabla 3.4 muestran que la aproximación gana alrededor de una cifra decimal de precisión cuando h disminuye en un factor de 10; es decir, el error es aproximadamente proporcional a h. Esta observación se confirma mediante los datos de la última columna de la tabla 3.4. De hecho (véase el problema 13 de los ejercicios 1.4), se pueden utilizar métodos de cálculo para mostrar que

(7) $$\lim_{h \to 0} \frac{\text{error}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e - (1 + h)^{1/h}}{h} = \frac{e}{2} \approx 1.35914 .$$

TABLA 3.4 APROXIMACIONES DE EULER A $e = 2.71828\ldots$

h	Aproximación de Euler $(1 + h)^{1/h}$	Error $e - (1 + h)^{1/h}$	$\frac{\text{Error}}{h}$
1	2.00000	0.71828	0.71828
10^{-1}	2.59374	0.12454	1.24539
10^{-2}	2.70481	0.01347	1.34680
10^{-3}	2.71692	0.00136	1.35790
10^{-4}	2.71815	0.00014	1.35902

La situación general es similar: al usar el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial (1), el error en la aproximación es, en el peor de los casos, una constante por el tamaño de paso h. Además, en vista de (7), esto es lo mejor que uno puede decir.

Los analistas numéricos tienen una notación conveniente para describir el comportamiento de convergencia de un esquema numérico. Para x fijo, denotamos por $y(x; h)$ la aproximación de la solución $\phi(x)$ de (1) obtenida mediante el esquema correspondiente con un tamaño de paso h. Decimos que el esquema **converge** en x si

$$\lim_{h\to 0} y(x; h) = \phi(x) .$$

En otras palabras, cuando el tamaño de paso h decrece a cero, las aproximaciones para un esquema convergente tienden al valor exacto $\phi(x)$. La razón con que $y(x; h)$ tiende a $\phi(x)$se expresa con frecuencia en términos de una potencia adecuada de h. Si el error $\phi(x) - y(x; h)$ tiende a cero como una constante por h^p, escribimos

$$\phi(x) - y(x; h) = O(h^p)$$

y decimos que el **método es de orden *p***. Por supuesto, mientras mayor sea la potencia p, más rápida será la razón de convergencia cuando $h \to 0$.

Como hemos visto en nuestro análisis anterior, la razón de convergencia del método de Euler es $O(h)$; es decir, *el método de Euler es de orden* $p = 1$. De hecho, el límite en (7) muestra que para la ecuación (5), el error es aproximadamente $1.36h$ para h pequeña. Esto significa que para tener un error menor a 0.01 necesitamos que $h < 0.01/1.36$, o $n = 1/h > 136$ pasos de cálculo. Así, el método de Euler converge demasiado lentamente como para tener usos prácticos.

¿Cómo mejorar el método de Euler? Para responder esta pregunta, regresemos a la deducción expresada en las fórmulas (3) y (4) y analicemos los "errores" introducidos para obtener la aproximación. El paso crucial en este proceso fue aproximar la integral

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(t, \phi(t)\big)\,dt$$

usando un rectángulo (recuerde la figura 3.14). Este paso da lugar a lo que se llama *error de truncamiento local* en el método. Por el cálculo, sabemos que un mejor enfoque (más preciso) para aproximar la integral consiste en usar un trapecio; es decir, aplicar la regla del trapecio (véase la figura 3.15). Esto implica que

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(t, \phi(t)\big)\,dt \approx \frac{h}{2}\Big[f\big(x_n, \phi(x_n)\big) + f\big(x_{n+1}, \phi(x_{n+1})\big)\Big] ,$$

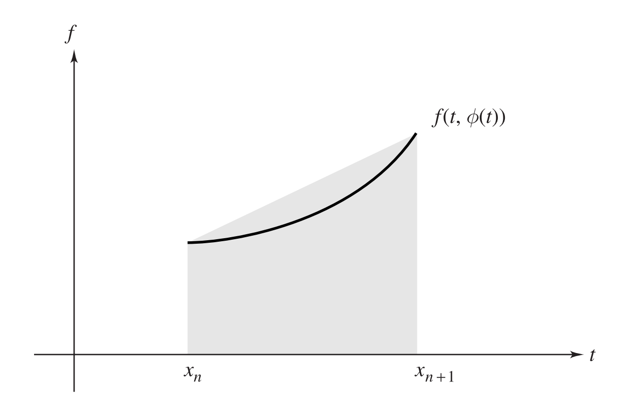


Figura 3.15 Aproximación mediante un trapecio

lo que conduce al esquema numérico

(8) $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right] , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Llamamos a la ecuación (8) el **esquema del trapecio**. Es un ejemplo de **método implícito**. Es decir, a diferencia del método de Euler, la ecuación (8) sólo da una fórmula implícita para y_{n+1}, pues y_{n+1} aparece como argumento de f. Suponiendo que ya hemos calculado y_n, podríamos necesitar una técnica de cálculo de raíces, como el método de Newton (véase el apéndice A), para calcular y_{n+1}. A pesar de la inconveniencia de trabajar con un método implícito, el esquema del trapecio tiene dos ventajas sobre el método de Euler. En primer lugar, es un método de orden $p = 2$; es decir, converge con una razón proporcional a h^2 y por tanto es más rápido que el método de Euler. En segundo lugar, como se describe en el proyecto G, el esquema del trapecio tiene la deseable característica de ser **estable**.

¿Podríamos modificar el esquema del trapecio para obtener un método explícito? Una idea consiste en obtener primero una estimación y^*_{n+1} del valor y_{n+1} mediante el método de Euler y luego usar la fórmula (8) cambiando y_{n+1} por y^*_{n+1} del lado derecho. Este proceso de dos etapas es un ejemplo de **método de predicción-corrección**: predecimos y_{n+1} usando el método de Euler y luego usamos ese valor en (8) para obtener una aproximación "más correcta". Si hacemos $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ en el lado derecho de (8), obtenemos

(9) $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\right] , \qquad n = 0, 1, \ldots ,$$

donde $x_{n+1} = x_n + h$. Este esquema explícito se conoce como el **método de Euler mejorado**.

EJEMPLO 1 Calcular la aproximación mediante el método de Euler mejorado de la solución $\phi(x) = e^x$ de

$$y' = y , \qquad y(0) = 1$$

en $x = 1$, usando tamaños de paso de $h = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ y 10^{-4}.

SOLUCIÓN Los valores de partida son $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. Como $f(x, y) = y$, la fórmula (9) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y_n + (y_n + hy_n)\right] = y_n + hy_n + \frac{h^2}{2}y_n ,$$

es decir,

(10) $$y_{n+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)y_n .$$

Como $y_0 = 1$, vemos inductivamente que

$$y_n = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Para obtener aproximaciones en $x = 1$, debemos tener $1 = x_0 + nh = nh$, de modo que $n = 1/h$. Por lo tanto, las aproximaciones mediante el método de Euler mejorado de $e = \phi(1)$ son justamente

$$\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h} .$$

En la tabla 3.5 hemos calculado esta aproximación para los valores dados de h, junto con los errores correspondientes

$$e - \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h} .$$

TABLA 3.5 APROXIMACIONES DE EULER MEJORADO A e = 2.71828. . .

h	Aproximación $\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h}$	Error	$\frac{\text{Error}}{h^2}$
1	2.50000	0.21828	0.21828
10^{-1}	2.71408	0.00420	0.42010
10^{-2}	2.71824	0.00004	0.44966
10^{-3}	2.71828	**0.00000**	**0.45271**
10^{-4}	2.71828	**0.00000**	**0.45313**

Al comparar los datos de esta tabla con los de la tabla 3.4, observamos que el método de Euler mejorado converge mucho más rápido que el método de Euler original. De hecho, de las primeras entradas de la segunda y tercera columnas de la tabla 3.5, parece que la aproximación gana dos cifras decimales de precisión cada vez que h disminuye en un factor de 10. En otras palabras, el error es aproximadamente proporcional a h^2 (véase la última columna de la tabla y también el problema 4). Las entradas de los dos últimos renglones de la tabla deben tomarse con precaución. De hecho, cuando $h = 10^{-3}$ o $h = 10^{-4}$, el error real es tan pequeño que nuestra calculadora lo ha redondeado a cero, hasta cinco cifras decimales. Las entradas en color en la última columna pueden ser poco precisas debido a la falta de cifras significativas en la aritmética de la calculadora. ■

Como sugiere el ejemplo anterior, el método de Euler mejorado converge con la razón $O(h^2)$ y, de hecho, se puede demostrar que, en general, *este método es de orden* $p = 2$.

A continuación damos un bosquejo de una subrutina que implanta el método de Euler en un intervalo dado $[x_0, c]$. Para fines de programación, por lo general es más conveniente dar

SUBRUTINA DEL MÉTODO DE EULER MEJORADO

Propósito Aproximar la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \ ,$$

para $x_0 \leq x \leq c$.

ENTRADA x_0, y_0, c, N (número de pasos), PRNTR (=1 para imprimir la tabla)

Paso 1 Establezca el tamaño de paso $h = (c - x_0)/N$, $x = x_0$, $y = y_0$

Paso 2 Para $i = 1$ hasta N, realice los pasos 3-5

Paso 3 Haga

$$F = f(x, y)$$
$$G = f(x + h, y + hF)$$

Paso 4 Haga

$$x = x + h$$
$$y = y + h(F + G)/2$$

Paso 5 Si PRNTR = 1, imprimir x, y

el número de pasos N en el intervalo que el propio tamaño de paso h. Para un intervalo que comienza en $x = x_0$ y termina en $x = c$, la relación entre h y N es

(11) $$Nh = c - x_0 \ .$$

(Observe que la subrutina incluye una opción para imprimir x y y). Por supuesto, la implantación de este algoritmo con N pasos en el intervalo $[x_0, c]$ sólo produce aproximaciones a la solución real en $N + 1$ puntos equidistantes. Si quisiéramos usar estos puntos como apoyo para graficar una solución aproximada en todo el intervalo $[x_0, c]$, entonces debemos "rellenar" de alguna manera los espacios entre estos puntos. Un método burdo consiste simplemente en unir los puntos mediante segmentos de recta, produciendo una aproximación poligonal de $\phi(x)$. En los códigos profesionales se utilizan técnicas más sofisticadas para prescribir los puntos intermedios.

Ahora queremos diseñar un programa que calcule $\phi(c)$ *con cierta precisión deseada*. Como hemos visto, la precisión de la aproximación depende del tamaño de paso h. Nuestra estrategia será estimar $\phi(c)$ para un tamaño de paso dado, luego dividir el tamaño de paso y volver a calcular la estimación, y así sucesivamente. Cuando dos estimaciones consecutivas de $\phi(c)$ difieren por menos de alguna cierta tolerancia dada ε, consideramos la última estimación como nuestra aproximación de $\phi(c)$. Admitimos que esto no garantiza que $\phi(c)$ se conozca dentro del rango ε, pero proporciona un procedimiento razonable en la práctica.[†] El siguiente procedimiento también contiene un salvavidas, para detenerse si la tolerancia deseada no se alcanza después de M subdivisiones de h.

MÉTODO DE EULER MEJORADO CON TOLERANCIA

Propósito Aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \ ,$$

en $x = c$, con tolerancia ε

ENTRADA	x_0, y_0, c, ε , M (número máximo de subdivisiones del tamaño de paso)
Paso 1	Haga $z = y_0$, PTNTR = 0
Paso 2	Para $m = 0$ a M, realice los pasos 3-7[††]
Paso 3	Haga $N = 2^m$
Paso 4	Llame a la SUBRUTINA DEL MÉTODO DE EULER MEJORADO
Paso 5	Imprima h, y
Paso 6	Si $\lvert y - z \rvert < \varepsilon$, vaya al paso 10
Paso 7	Haga $z = y$
Paso 8	Imprima "$\phi(c)$ es aproximadamente"; y; "pero podría no estar dentro de la tolerancia"; ε
Paso 9	Vaya al paso 11
Paso 10	Imprima "$\phi(c)$ es aproximadamente"; y; "con tolerancia"; ε
Paso 11	DETENERSE
SALIDA	Aproximaciones de la solución al problema de valor inicial en $x = c$ usando 2^m pasos

[†]Los códigos profesionales examinan la precisión con mucho más cuidado y varían el tamaño de paso adaptándose con este fin.

[††]Para ahorrar tiempo, se puede comenzar con $m = K < M$ en vez de $m = 0$.

Si desea un procedimiento de conclusión que simule el **error relativo**

$$\left|\frac{\text{aproximación} - \text{valor real}}{\text{valor real}}\right| ,$$

reemplace el paso 6 por

Paso 6′ Si $\left|\frac{z - y}{y}\right| < \varepsilon$, vaya al paso 10.

EJEMPLO 2 Utilizar el método de Euler mejorado con tolerancia para aproximar la solución del problema con valor inicial

(12) $y' = x + 2y , \quad y(0) = 0.25 ,$

en $x = 2$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.001$, utilizar un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

SOLUCIÓN Los valores de partida son $x_0 = 0$, $y_0 = 0.25$. Como estamos calculando la aproximación para $c = 2$, el valor inicial para h es

$$h = (2 = 0)2^{-0} = 2 .$$

Para la ecuación (12), tenemos que $f(x, y) = x + 2y$, de modo que los números F y G en la subrutina son

$$F = x + 2y$$
$$G = (x + h) + 2(x + hF) = x + 2y + h(1 + 2x + 4y) ,$$

y tenemos que

$$x = x + h$$
$$y = y + \frac{h}{2}(F + G) = y + \frac{h}{2}(2x + 4y) + \frac{h^2}{2}(1 + 2x + 4y) .$$

Así, con $x_0 = 0$, $y_0 = 0.25$ y $h = 2$, obtenemos para la primera aproximación

$$y = 0.25 + (0 + 1) + 2(1 + 1) = 5.25 .$$

Para describir las demás salidas del algoritmo, usamos la notación $y(2; h)$ para la aproximación con tamaño de paso h. Así, $y(2; 2) = 5.25$, y vemos del algoritmo que

$$\begin{aligned} y(2; 1) &= 11.25000 & y(2; 2^{-5}) &= 25.98132 \\ y(2; 2^{-1}) &= 18.28125 & y(2; 2^{-6}) &= 26.03172 \\ y(2; 2^{-2}) &= 23.06067 & y(2; 2^{-7}) &= 26.04468 \\ y(2; 2^{-3}) &= 25.12012 & y(2; 2^{-8}) &= 26.04797 \\ y(2; 2^{-4}) &= 25.79127 & y(2; 2^{-9}) &= 26.04880 . \end{aligned}$$

Como $|y(2; 2^{-9}) - y(2; 2^{-8})| = 0.00083$, que es menor que $\varepsilon = 0.001$, nos detenemos.

La solución exacta de (12) es $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - x - \frac{1}{2}\right)$, de modo que hemos determinado que

$$\phi(2) = \frac{1}{2}\left(e^4 - \frac{5}{2}\right) \approx 26.04880 . \quad ■$$

En la siguiente sección analizaremos métodos con razones de convergencia más altas que las de los métodos de Euler y Euler mejorado.

EJERCICIOS 3.6


En muchos de los problemas siguientes, será útil disponer de una calculadora o computadora. El lector puede usar un paquete de software o escribir un programa para resolver los problemas con valores iniciales mediante los algoritmos del método de Euler mejorado de las páginas 128 y 129. (Recuerde que todos los cálculos trigonométricos se realizan en radianes).

1. Muestre que al usar el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 5y\,, \quad y(0) = 1\,,$$

en $x = 1$, entonces la aproximación con tamaño de paso h es $(1 + 5h)^{1/h}$.

2. Muestre que al usar el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = -\frac{1}{2}y\,, \qquad y(0) = 3\,,$$

en $x = 2$, entonces la aproximación con tamaño de paso h es

$$3\left(1 - \frac{h}{2}\right)^{2/h}.$$

3. Muestre que al usar el esquema del trapecio dado en la fórmula (8) para aproximar la solución $\phi(x) = e^x$ de

$$y' = y\,, \quad y(0) = 1\,,$$

en $x = 1$, entonces obtenemos

$$y_{n+1} = \left(\frac{1 + h/2}{1 - h/2}\right)y_n\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

lo que conduce a la aproximación

$$\left(\frac{1 + h/2}{1 - h/2}\right)^{1/h}$$

para la constante e. Calcule esta aproximación para $h = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ y 10^{-4} y compare sus resultados con los de las tablas 3.4 y 3.5.

4. En el ejemplo 1 se mostró que la aproximación de e usando el método de Euler mejorado con tamaño de paso h es

$$\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h}.$$

Demuestre primero que el error $:= e - (1 + h + h^2/2)^{1/h}$ tiende a cero cuando $h \to 0$. Luego use la regla de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{error}}{h^2} = \frac{e}{6} \approx 0.45305\,.$$

Compare esta constante con las entradas en la última columna de la tabla 3.5.

5. Muestre que al usar el método de Euler mejorado para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 4y\,, \qquad y(0) = \frac{1}{3}\,,$$

en $x = 1/2$, entonces la aproximación con tamaño de paso h es

$$\frac{1}{3}(1 + 4h + 8h^2)^{1/(2h)}\,.$$

6. Como la integral $y(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ con límite superior variable satisface (para f continua) el problema con valor inicial

$$y' = f(t)\,, \quad y(0) = 0\,,$$

cualquier esquema numérico que sea utilizado para aproximar la solución en $x = 1$ dará una aproximación de la integral definida

$$\int_0^1 f(t)\,dt\,.$$

Deduzca una fórmula para esta aproximación de la integral usando

(a) el método de Euler.
(b) el esquema del trapecio.
(c) el método de Euler mejorado.

7. Utilice la subrutina del método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.1$ para aproximar la solución al problema con valor inicial

$$y' = x - y^2\,, \quad y(1) = 0\,,$$

en los puntos $x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ y 1.5. (Así, la entrada $N = 5$). Compare estas aproximaciones con las obtenidas mediante el método de Euler (véase el problema 6 de los ejercicios 1.4).

8. Utilice la subrutina del método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.2$ para aproximar la solución al problema con valor inicial

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 + y)\,, \qquad y(1) = 1\,,$$

en los puntos $x = 1.2, 1.4, 1.6$ y 1.8. (Así, la entrada $N = 8$). Compare estas aproximaciones con las obtenidas mediante el método de Euler (véase el problema 5 de los ejercicios 1.4).

9. Utilice la subrutina del método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.2$ para aproximar la solución de

$$y' = x + 3\cos(xy), \quad y(0) = 0,$$

en los puntos $x = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 2.0$. Use sus respuestas para hacer un bosquejo de la solución en $[0, 2]$.

10. Utilice la subrutina del método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.1$ para aproximar la solución de

$$y' = 4\cos(x + y), \quad y(0) = 1,$$

en los puntos $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$. Use sus respuestas para hacer un bosquejo de la solución en $[0, 1]$.

11. Utilice el método de Euler mejorado con tolerancia para aproximar la solución de

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t\,\text{sen}(tx), \quad x(0) = 0,$$

en $t = 1$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.01$, use un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

12. Utilice el método de Euler mejorado con tolerancia para aproximar la solución de

$$y' = 1 - \text{sen}\, y, \quad y(0) = 0,$$

en $x = \pi$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.01$, use un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

13. Utilice el método de Euler mejorado con tolerancia para aproximar la solución de

$$y' = 1 - y + y^3, \quad y(0) = 0,$$

en $x = 1$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.003$, use un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

14. Experimente con la subrutina del método de Euler mejorado y determine el valor máximo en el intervalo $[0, 2]$ de la solución del problema con valor inicial

$$y' = \text{sen}(x + y), \quad y(0) = 2.$$

¿Dónde aparece este valor máximo? Dé sus respuestas con dos cifras decimales.

15. La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 2)^2, \quad y(0) = -2$$

corta el eje x en un punto del intervalo $[0, 1.4]$. Experimente con la subrutina del método de Euler mejorado para determinar este punto con dos cifras decimales.

16. La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3y^2, \quad y(1) = 3$$

tiene una asíntota vertical ("explota") en algún punto del intervalo $[1, 2]$. Experimente con la subrutina del método de Euler mejorado para determinar este punto con dos cifras decimales.

17. Utilice el método de Euler (4) con $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = -20y, \quad y(0) = 1,$$

en el intervalo $0 \le x \le 1$ (es decir, en $x = 0, 0.1, \ldots, 1.0$). Compare sus respuestas con la solución real $y = e^{-20x}$. ¿Qué falló? A continuación, trate con el tamaño de paso $h = 0.025$ y con $h = 0.2$. ¿Qué conclusiones puede extraer en relación con la elección del tamaño de paso?

18. **Errores locales *versus* errores globales.** Al deducir la fórmula (4) para el método de Euler, se usó un rectángulo para aproximar el área bajo una curva (véase la figura 3.14). Con $g(t) := f(t, \phi(t))$, esta aproximación se puede escribir como

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} g(t)\,dt \approx hg(x_n), \quad \text{donde} \quad h = x_{n+1} - x_n.$$

(a) Muestre que si g tiene una derivada continua que está acotada en valor absoluto por B, entonces la aproximación del rectángulo tiene un error $O(h^2)$, es decir, para cierta constante M,

$$\left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(t)\,dt - hg(x_n) \right| \le Mh^2.$$

Esto se conoce como *error local de truncamiento* del esquema. [*Sugerencia*: Escriba

$$\int_{x_n}^{x_{n-1}} g(t)\,dt - hg(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} [g(t) - g(x_n)]\,dt.$$

A continuación, use el teorema del valor medio para mostrar que $|g(t) - g(x_n)| \le B|t - x_n|$. Luego integre para obtener la cota para el error $(B/2)h^2$].

(b) Al aplicar el método de Euler, hay errores locales de truncamiento en cada paso del proceso y que se propagan en todos los cálculos posteriores. Muestre que la *suma* de los errores locales

de la parte (a) que surgen después de n pasos es $O(h)$. Éste es el *error global*, que es igual a la razón de convergencia del método de Euler.

19. Modelo logístico. En la sección 3.2 analizamos la ecuación logística

$$\frac{dp}{dt} = Ap_1p - Ap^2 , \qquad p(0) = p_0 ,$$

y su uso para modelar el crecimiento de poblaciones. Un modelo más general implica la ecuación

(13) $$\frac{dp}{dt} = Ap_1p - Ap^r , \qquad p(0) = p_0 ,$$

donde $r > 1$. Para ver el efecto de modificación del parámetro r en (13), haga $p_1 = 3$, $A = 1$ y $p_0 = 1$. Luego utilice la subrutina del método de Euler mejorado con $h = 0.25$ para aproximar la solución de (13) en el intervalo $0 \leq t \leq 5$ para $r = 1.5$, 2 y 3. ¿Cuál es la población límite en cada caso? Para $r > 1$, determine una fórmula general para la población límite.

20. Cuerpo en caída. En el ejemplo 1 de la sección 3.4 modelamos la velocidad de un cuerpo que cae mediante el problema con valor inicial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv , \qquad v(0) = v_0 ,$$

bajo la hipótesis de que la fuerza debida a la resistencia del aire es $-bv$. Sin embargo, hay ocasiones en que la fuerza debida a la resistencia del aire se comporta más como $-bv^r$, donde r (>1) es una constante. Esto conduce al modelo

(14) $$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^r , \qquad v(0) = v_0 .$$

Para ver el efecto de modificación del parámetro r en (14), haga $m = 1$, $g = 9.81$, $b = 2$ y $v_0 = 0$. Luego utilice la subrutina del método de Euler mejorado con $h = 0.2$ para aproximar la solución de (14) en el intervalo $0 \leq t \leq 5$ para $r = 1.0$, 1.5 y 2.0. ¿Cuál es la relación entre estas soluciones y la solución constante $v(t) \equiv (9.81/2)^{1/r}$?

21. Temperatura de un edificio. En la sección 3.3 modelamos la temperatura dentro de un edificio mediante el problema con valor inicial

(15) $$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + U(t) , \qquad T(t_0) = T_0 ,$$

donde M es la temperatura fuera del edificio, T es la temperatura dentro del edificio, H es la razón de calentamiento adicional, U es la razón de calentamiento (mediante un calefactor) o de enfriamiento (mediante un aire acondicionado), K es una constante positiva y T_0 es la temperatura inicial en el instante t_0. En un modelo típico, $t_0 = 0$ (media noche), $T_0 = 65°F$, $H(t) = 0.1$, $U(t) = 1.5[70 - T(t)]$ y

$$M(t) = 75 - 20\cos(\pi t/12) .$$

Por lo general, la constante K está entre $1/4$ y $1/2$, según factores como el aislamiento. Para estudiar el efecto del aislamiento sobre este edificio, considere el edificio típico descrito anteriormente y use la subrutina del método de Euler mejorado con $h = 2/3$ para aproximar la solución de (15) en el intervalo $0 \leq t \leq 24$ (un día) para $K = 0.2$, 0.4 y 0.6.

3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS DE ORDEN SUPERIOR: TAYLOR Y RUNGE-KUTTA

En las secciones 1.4 y 3.6 analizamos un procedimiento numérico sencillo, el método de Euler, para obtener una aproximación numérica de la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial

(1) $$y' = f(x, y) , \qquad y(x_0) = y_0 .$$

El método de Euler es fácil de implantar, pues sólo implica aproximaciones lineales a la solución $\phi(x)$. Pero padece de una convergencia lenta, al ser un método de orden 1; es decir, el error es $O(h)$. Aun el método de Euler mejorado, analizado en la sección 3.6, sólo tiene orden 2. En esta sección presentaremos algunos métodos numéricos con razones de convergencia más rápidas: los **métodos de Taylor**, que son extensiones naturales del procedimiento de Euler,

y los **métodos de Runge-Kutta**, que son los esquemas más populares para resolver problemas con valor inicial, pues tienen razones de convergencia rápidas y se programan con facilidad.

Como en la sección anterior, suponemos que f y $\partial f/\partial y$ son continuas y acotadas en la franja vertical $\{(x, y): a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ y que f tiene tantas derivadas parciales continuas como sea necesario.

Para deducir los métodos de Taylor, sea $\phi_n(x)$ la solución *exacta* del problema con valor inicial

(2) $$\phi_n'(x) = f(x, \phi_n) , \quad \phi_n(x_n) = y_n .$$

La serie de Taylor para $\phi_n(x)$ en torno del punto x_n es

$$\phi_n(x) = \phi_n(x_n) + h\phi_n'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\phi_n''(x_n) + \cdots ,$$

donde $h = x - x_n$. Como ϕ_n satisface (2), podemos escribir esta serie en la forma

(3) $$\phi_n(x) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}\phi_n''(x_n) + \cdots .$$

Observe que la fórmula recursiva para y_{n+1} en el método de Euler se obtiene truncando la serie de Taylor después del término lineal. Para una mejor aproximación, usaremos más términos en la serie de Taylor. Para esto hay que expresar las derivadas de orden superior de la solución en términos de la función $f(x, y)$.

Si y satisface $y' = f(x, y)$, podemos calcular y'' por medio de la regla de la cadena:

(4) $$\begin{aligned} y'' &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, y' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) f(x, y) \\ &=: f_2(x, y) . \end{aligned}$$

De manera similar, definimos $f_3, f_4, \ldots$, correspondientes a las expresiones $y'''(x)$, $y^{(4)}(x)$, etc. Si truncamos el desarrollo (3) después del término h^p, entonces, con la notación anterior, las fórmulas recursivas para el **método de Taylor de orden *p*** son

(5) $$x_{n+1} = x_n + h ,$$

(6) $$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f_2(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f_p(x_n, y_n) .$$

Como antes, $y_n \approx \phi(x_n)$, donde $\phi(x)$ es la solución del problema con valor inicial (1). Se puede mostrar† que **el método de Taylor de orden *p* tiene la razón de convergencia $O(h^p)$.**

EJEMPLO 1 Determinar la fórmula recursiva para el método de Taylor de orden 2 para el problema con valor inicial

(7) $$y' = \operatorname{sen}(xy) , \quad y(0) = \pi .$$

†Véase *Introduction to Numerical Analysis* por J. Stoer y R. Bulirsch (Springer-Verlag, Nueva York, 1980).

SOLUCIÓN Debemos calcular $f_2(x, y)$ según lo definido en (4). Como $f(x, y) = \text{sen}(xy)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\cos(xy) \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\cos(xy) \ .$$

Al sustituir en (4), tenemos

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)f(x, y) \\ &= y\cos(xy) + x\cos(xy)\,\text{sen}(xy) \\ &= y\cos(xy) + \frac{x}{2}\text{sen}(2xy) \ , \end{aligned}$$

y las fórmulas recursivas (5) y (6) se convierten en

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \ , \\ y_{n+1} &= y_n + h\,\text{sen}\,(x_n y_n) + \frac{h^2}{2}\left[y_n\cos(x_n y_n) + \frac{x_n}{2}\text{sen}\,(2x_n y_n)\right] \ , \end{aligned}$$

donde $x_0 = 0$, $y_0 = \pi$ son los valores de partida. ■

La razón de convergencia $O(h^p)$ del método de Taylor de orden p plantea una pregunta interesante: si pudiéramos hacer tender p a infinito, ¿obtendríamos las soluciones **exactas** para el intervalo $[x_0, x_0 + h]$? Esta posibilidad se explora con detalle en el capítulo 8. Por supuesto, una dificultad práctica al utilizar los métodos de Taylor de orden superior es el tedioso cálculo de las derivadas parciales necesarias para determinar f_p (por lo general, estos cálculos aumentan de manera exponencial con p). Una forma de superar esta dificultad es utilizar uno de los **métodos de Runge-Kutta**.†

Observe que el método general de Taylor tiene la forma

(8) $$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n; h) \ ,$$

donde la elección de F depende de p. En particular [véase (6)], para

(9) $$\begin{aligned} p &= 1 \ , \qquad F = T_1(x, y; h) := f(x, y) \ , \\ p &= 2 \ , \qquad F = T_2(x, y; h) := f(x, y) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)f(x, y)\right] \ . \end{aligned}$$

La idea detrás del método de Runge-Kutta de orden 2 consiste en elegir F en (8) de la forma

(10) $$F = K_2(x, y; h) := f\big(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)\big) \ ,$$

donde las constantes α, β se eligen de modo que (8) tenga la razón de convergencia $O(h^2)$. La ventaja en este caso es que K_2 se calcula mediante dos evaluaciones de la función original $f(x, y)$ y no implica las derivadas de $f(x, y)$.

Para garantizar la convergencia $O(h^2)$, comparamos este nuevo esquema con el método de Taylor de orden 2 y pedimos que

$$T_2(x, y; h) - K_2(x, y; h) = O(h^2) \ , \quad \text{cuando} \quad h \to 0 \ .$$

†***Nota histórica:*** Estos métodos fueron desarrollados por C. Runge en 1895 y W. Kutta en 1901.

Es decir, elegimos α, β de modo que los desarrollos de Taylor para T_2 y K_2 coincidan hasta los términos de orden h. Para (x, y) fijo, al desarrollar $K_2 = K_2(h)$ dado en (10), alrededor de $h = 0$, vemos que

$$K_2(h) = K_2(0) + \frac{dK_2}{dh}(0)h + O(h^2) \tag{11}$$

$$= f(x, y) + \left[\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)f(x, y)\right]h + O(h^2) ,$$

donde la expresión en corchetes para dK_2/dh, evaluada en $h = 0$, es consecuencia de la regla de la cadena. Al comparar (11) con (9), vemos que para que T_2 y K_2 coincidan hasta los términos de orden h, debemos tener $\alpha = \beta = 1/2$. Así,

$$K_2(x, y; h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x, y)\right) .$$

El método de Runge-Kutta que hemos obtenido se llama el **método del punto medio** y tiene las fórmulas recursivas

$$x_{n+1} = x_n + h , \tag{12}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) . \tag{13}$$

Por construcción, el método del punto medio tiene la misma razón de convergencia que el método de Taylor de orden 2; es decir, $O(h^2)$. Ésta es la misma razón que la del método de Euler mejorado.

De manera similar, se puede trabajar con el método de Taylor de orden 4 y, después de algunos cálculos laboriosos, obtener el **método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden**. Las fórmulas recursivas para este método son

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h , \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) , \end{aligned} \tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) , \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) , \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) , \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) . \end{aligned}$$

El método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden es uno de los métodos populares debido a que su razón de convergencia es $O(h^4)$ y a que es fácil de programar. Por lo general, produce aproximaciones muy precisas, aunque el número de iteraciones es razonablemente pequeño. Sin embargo, al aumentar el número de iteraciones, pueden aparecer otros tipos de errores.

A continuación bosquejamos programas para el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Como en el caso de los algoritmos para el método de Euler mejorado, el primer progra-

ma (la subrutina Runge-Kutta) es útil para aproximar la solución en un intervalo $[x_0, c]$; su entrada es la cantidad de pasos en el intervalo. Como en la sección 3.6, el número de pasos N se relaciona con el tamaño de paso h y el intervalo $[x_0, c]$ de la siguiente forma:

$$Nh = c - x_0 \ .$$

La subrutina tiene la opción de imprimir una tabla de valores de x y y. El segundo algoritmo (Runge-Kutta con tolerancia) de la página 138 se utiliza para aproximar, para una tolerancia dada, la solución en un valor de entrada $x = c$. Este algoritmo[†] divide a la mitad los tamaños de paso en forma sucesiva, hasta que las dos aproximaciones $y(c; h)$ y $y(c; h/2)$ difieren en menos que la tolerancia prescrita ε. Para tener un procedimiento de conclusión con base en el error relativo, el paso 6 del algoritmo debe reemplazarse por

Paso 6′ Si $\left|\frac{y - z}{y}\right| < \varepsilon$, vaya al paso 10.

SUBRUTINA DEL MÉTODO CLÁSICO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

Propósito Aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = f(x, y) \ , \quad y(x_0) = y_0$$

para $x_0 \le x \le c$

ENTRADA x_0, y_0, c, N (número de pasos), PRNTR (= 1 para imprimir la tabla)

Paso 1 Establezca el tamaño de paso $h = (c - x_0)/N$, $x = x_0$, $y = y_0$

Paso 2 Para $i = 1$ hasta N, realice los pasos 3-5

Paso 3 Haga

$$k_1 = hf(x, y)$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x + h, y + k_3)$$

Paso 4 Haga

$$x = x + h$$

$$y = y + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Paso 5 Si PRNTR = 1, imprimir x, y

[†]Observe que la forma de este algoritmo es la misma que la del método de Euler mejorado de la página 129, excepto en el paso 4, donde se llama a la subrutina Runge-Kutta. En los códigos para problemas de producción se usan procedimientos de conclusión más sofisticados.

ALGORITMO CLÁSICO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN CON TOLERANCIA

Propósito	Aproximar la solución del problema con valor inicial $$y' = f(x, y) \ , \quad y(x_0) = y_0$$ en $x = c$, con tolerancia ε
ENTRADA	$x_0, y_0, c, \varepsilon, M$ (número máximo de iteraciones)
Paso 1	Haga $z = y_0$, PTNTR = 0
Paso 2	Para $m = 0$ a M, realice los pasos 3-7 (o para ahorrar tiempo, comience con $m > 0$)
Paso 3	Haga $N = 2^m$
Paso 4	Llame a la SUBRUTINA DEL MÉTODO CLÁSICO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN
Paso 5	Imprima h, y
Paso 6	Si $\lvert z - y \rvert < \varepsilon$, vaya al paso 10
Paso 7	Haga $z = y$
Paso 8	Imprima "$\phi(c)$ es aproximadamente"; y; "pero podría no estar dentro de la tolerancia"; ε
Paso 9	Vaya al paso 11
Paso 10	Imprima "$\phi(c)$ es aproximadamente"; y; "con tolerancia"; ε
Paso 11	DETENERSE
SALIDA	Aproximaciones de la solución al problema de valor inicial en $x = c$, usando 2^m pasos.

EJEMPLO 2 Usar el algoritmo clásico de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial

$$y' = y \ , \quad y(0) = 1 \ ,$$

en $x = 1$ con tolerancia de 0.001.

SOLUCIÓN Las entradas son $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $c = 1$, $\varepsilon = 0.001$ y $M = 25$ (digamos). Como $f(x, y) = y$, las fórmulas del paso 3 de la subrutina se convierten en

$$k_1 = hy \ , \quad k_2 = h\left(y + \frac{k_1}{2}\right) \ , \quad k_3 = h\left(y + \frac{k_2}{2}\right) \ , \quad k_4 = h(y + k_3) \ .$$

El valor inicial para N en este algoritmo es $N = 1$, de modo que

$$h = (1 - 0)/1 = 1 \ .$$

Así, en el paso 3 de la subrutina, calculamos

$$k_1 = (1)(1) = 1 \ , \qquad k_2 = (1)(1 + 0.5) = 1.5 \ ,$$

$$k_3 = (1)(1 + 0.75) = 1.75 \ , \quad k_4 = (1)(1 + 1.75) = 2.75 \ ,$$

y, en el paso 4 de la subrutina, obtenemos para la primera aproximación

$$y = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}[1 + 2(1.5) + 2(1.75) + 2.75]$$

$$= 2.70833 \ ,$$

donde hemos redondeado a cinco cifras decimales. Como

$$|z - y| = |y_0 - y| = |1 - 2.70833| = 1.70833 > \varepsilon ,$$

comenzamos de nuevo y hacemos $N = 2$, $h = 0.5$.

Al realizar los pasos 3 y 4 para $i = 1$ y 2, obtenemos en última instancia (para $i = 2$) la aproximación

$$y = 2.71735 .$$

Como $|z - y| = |2.70833 - 2.71821| = 0.00902 > \varepsilon$, comenzamos de nuevo y hacemos $N = 4$, $h = 0.25$. Esto conduce a la aproximación

$$y = 2.71821 ,$$

de modo que

$$|z - y| = |2.71735 - 2.71821| = 0.00086 ,$$

que es menor que $\varepsilon = 0.001$. Por lo tanto, $\phi(1) = e \approx 2.71821$. ■

En el ejemplo 2 obtuvimos una mejor aproximación de $\phi(1) = e$ con $h = 0.25$ que la obtenida en la sección 3.6 mediante el método de Euler con $h = 0.001$ (véase la tabla 3.4) y casi la misma precisión que la obtenida en la sección 3.6 mediante el método de Euler mejorado con $h = 0.01$ (véase la tabla 3.5).

EJEMPLO 3 Usar la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial

$$\textbf{(15)} \qquad y' = y^2 , \quad y(0) = 1 ,$$

en el intervalo $0 \le x \le 2$ usando $N = 8$ pasos (es decir, $h = 0.25$).

SOLUCIÓN En este caso, los valores de partida son $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. Como $f(x, y) = y^2$, las fórmulas del paso 3 de la subrutina son

$$k_1 = hy^2 , \qquad k_2 = h\left(y + \frac{k_1}{2}\right)^2 ,$$

$$k_3 = h\left(y + \frac{k_2}{2}\right)^2 , \qquad k_4 = h(y + k_3)^2 .$$

La salida muestra que

$$x = 0.25 \qquad y = 1.33322 ,$$
$$x = 0.50 \qquad y = 1.99884 ,$$
$$x = 0.75 \qquad y = 3.97238 ,$$
$$x = 1.00 \qquad y = 32.82820 ,$$
$$x = 1.25 \qquad y = 4.09664 \times 10^{11} ,$$
$$x = 1.50 \qquad y = \textbf{desbordamiento.}$$

¿Qué ocurrió? Por fortuna, la ecuación (15) es separable, y al resolverla, para $\phi(x)$, obtenemos $\phi(x) = (1 - x)^{-1}$. Ahora es claro dónde está el problema: la solución real $\phi(x)$ no está definida en $x = 1$. De haber sido más cuidadosos, habríamos observado que $\partial f/\partial y = 2y$ *no* está

acotada para toda y. Por lo tanto, la existencia de una única solución no queda garantizada para toda x entre 0 y 2, y en este caso, el método *no* proporciona aproximaciones significativas para x cercanas a (o mayores que) 1. ■

EJEMPLO 4 Usar el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución $\phi(x)$ del problema con valor inicial

$$y' = x - y^2 , \quad y(0) = 1 ,$$

en $x = 2$ con tolerancia de 0.0001.

SOLUCIÓN Esta vez verificamos si $\partial f/\partial y$ está acotada. En este caso, $\partial f/\partial y = -2y$, que ciertamente no está acotada en cualquier franja vertical. Sin embargo, consideremos el comportamiento cualitativo de la solución $\phi(x)$. La curva solución comienza en (0, 1), donde $\phi'(0) = 0 - 1 < 0$, de modo que $\phi(x)$ comienza decreciendo y continúa de esta forma hasta cruzar la curva $y = \sqrt{x}$. Después de cruzar esta curva, $\phi(x)$ comienza a crecer, pues $\phi'(x) = x - \phi^2(x) > 0$. Al crecer $\phi(x)$, permanece debajo de la curva $y = \sqrt{x}$. Esto es así porque si la solución estuviese "cerca" de la curva $y = \sqrt{x}$, entonces la derivada de $\phi(x)$ tendería a cero, de modo que no es posible superar la función $\sqrt{x}$.

Por lo tanto, aunque el teorema de existencia y unicidad no garantiza una solución, estamos tentados a usar el algoritmo de cualquier manera. El argumento anterior muestra que tal vez $\phi(x)$ exista para $x > 0$, de modo que nos parece razonablemente seguro que el método de Runge-Kutta de cuarto orden dé una buena aproximación de la solución real $\phi(x)$. Al proceder con el algoritmo, usamos los valores de partida $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. Como $f(x, y) = x - y^2$, las fórmulas en el paso 3 de la subrutina se convierten en

$$k_1 = h(x - y^2) , \qquad k_2 = h\left[\left(x + \frac{h}{2}\right) - \left(y + \frac{k_1}{2}\right)^2\right] ,$$

$$k_3 = h\left[\left(x + \frac{h}{2}\right) - \left(y + \frac{k_2}{2}\right)^2\right] , \qquad k_4 = h\left[(x + h) - (y + k_3)^2\right] .$$

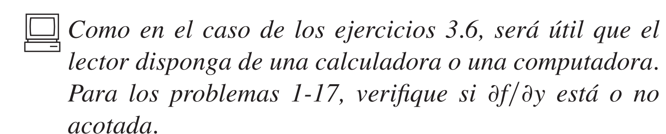
En la tabla 3.6 damos las aproximaciones $y(2; 2^{-m+1})$ para $\phi(2)$, con $m = 0, 1, 2, 3$ y 4. El algoritmo se detiene en $m = 4$, pues

$$|y(2; 0.125) - y(2; 0.25)| = 0.00000 .$$

Por lo tanto, $\phi(2) \approx 1.25132$ con una tolerancia de 0.0001. ■

TABLA 3.6 APROXIMACIÓN CLÁSICA DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN PARA $\phi(2)$

m	h	Aproximación para $\phi(2)$	$\lvert y(2; h) - y(2; 2h)\rvert$
0	2.0	−8.33333	
1	1.0	1.27504	9.60837
2	0.5	1.25170	0.02334
3	0.25	1.25132	0.00038
4	0.125	1.25132	0.00000



EJERCICIOS 3.7

Como en el caso de los ejercicios 3.6, será útil que el lector disponga de una calculadora o una computadora. Para los problemas 1-17, verifique si $\partial f/\partial y$ está o no acotada.

1. Determine las fórmulas recursivas para el método de Taylor de orden 2 para el problema con valor inicial

$$y' = \cos(x + y)\,, \quad y(0) = \pi\,.$$

2. Determine las fórmulas recursivas para el método de Taylor de orden 2 para el problema con valor inicial

$$y' = xy - y^2\,, \quad y(0) = -1\,.$$

3. Determine las fórmulas recursivas para el método de Taylor de orden 4 para el problema con valor inicial

$$y' = x - y\,, \quad y(0) = 0\,.$$

4. Determine las fórmulas recursivas para el método de Taylor de orden 4 para el problema con valor inicial

$$y' = x^2 + y\,, \quad y(0) = 0\,.$$

5. Use los métodos de Taylor de órdenes 2 y 4 con $h = 0.25$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + 1 - y\,, \quad y(0) = 1\,,$$

en $x = 1$. Compare estas aproximaciones con la solución real $y = x + e^{-x}$ evaluada en $x = 1$.

6. Use los métodos de Taylor de órdenes 2 y 4 con $h = 0.25$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 - y\,, \quad y(0) = 0\,,$$

en $x = 1$. Compare estas aproximaciones con la solución real $y = 1 - e^{-x}$ evaluada en $x = 1$.

7. Use la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.25$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 2y - 6\,, \quad y(0) = 1\,,$$

en $x = 1$. (Así, la entrada $N = 4$). Compare esta aproximación con la solución real $y = 3 - 2e^{2x}$ evaluada en $x = 1$.

8. Use la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.25$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 - y\,, \quad y(0) = 0\,,$$

en $x = 1$. Compare esta aproximación con la obtenida en el problema 6 mediante el método de Taylor de orden 4.

9. Use la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.25$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + 1 - y\,, \quad y(0) = 1\,,$$

en $x = 1$. Compare esta aproximación con la obtenida en el problema 5 mediante el método de Taylor de orden 4.

10. Use el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 - xy\,, \quad y(1) = 1\,,$$

en $x = 2$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.001$, use un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

11. La solución del problema con valor inicial

$$y' = \frac{2}{x^4} - y^2\,, \quad y(1) = -0.414$$

cruza el eje x en un punto del intervalo $[1, 2]$. Experimente con la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden y determine este punto con dos cifras decimales.

12. Experimente con la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden y determine el valor máximo sobre el intervalo $[1, 2]$ de la solución del problema con valor inicial

$$y' = \frac{1.8}{x^4} - y^2\,, \quad y(1) = -1\,.$$

¿Dónde aparece este máximo? Proporcione sus respuestas con dos cifras decimales.

13. La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x\,, \quad y(0) = 3$$

tiene una asíntota vertical ("explota") en algún punto en el intervalo $[0, 2]$. Experimente con la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden y determine este punto con dos cifras decimales.

14. Use el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = y\cos x\,, \quad y(0) = 1\,,$$

en $x = \pi$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.01$, use un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

15. Use la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$ para aproximar la solución de

$$y' = \cos(5y) - x\,, \quad y(0) = 0\,,$$

en los puntos $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 3.0$. Utilice sus respuestas para hacer un bosquejo de la solución en el intervalo $[0, 3]$.

16. Utilice la subrutina de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$ para aproximar la solución de

$$y' = 3\cos(y - 5x), \quad y(0) = 0,$$

en los puntos $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 4.0$. Utilice sus respuestas para hacer un bosquejo de la solución en el intervalo $[0, 4]$.

17. El método de Taylor de orden 2 se puede utilizar para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

en $x = 1$. Muestre que la aproximación y_n obtenida usando el método de Taylor de orden 2 con el tamaño de paso $1/n$ está dada por la fórmula

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

La solución del problema con valor inicial es $y = e^x$, de modo que y_n es una aproximación de la constante e.

18. Si el método de Taylor de orden p se usa en el problema 17, muestre que

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \cdots + \frac{1}{p!n^p}\right)^n,$$
$$n = 1, 2, \ldots.$$

19. Flujo de fluidos. En el estudio del flujo no isotérmico de un fluido newtoniano entre placas paralelas, se halla la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2e^y = 0, \quad x > 0,$$

mediante varias sustituciones, esta ecuación se puede transformar en la ecuación de primer orden

$$\frac{dv}{du} = u\left(\frac{u}{2} + 1\right)v^3 + \left(u + \frac{5}{2}\right)v^2.$$

Utilice el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar $v(3)$ si $v(u)$ satisface $v(2) = 0.1$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.0001$, use un procedimiento de conclusión con base en el error relativo.

20. Reacciones químicas. La reacción entre el óxido nitroso y el oxígeno para formar dióxido de nitrógeno está dada por la ecuación química balanceada $2NO + O_2 = 2NO_2$. A temperaturas altas, la dependencia de la razón de esta sección con respecto de las concentraciones de NO, O_2 y NO_2 es compleja. Sin embargo, a 25°C, la razón con que se forma el NO_2 obedece la ley de acción de la masa y está dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)^2\left(\beta - \frac{x}{2}\right),$$

donde $x(t)$ denota la concentración de NO_2 en el instante t, k es la constante de la razón, α es la concentración inicial de NO y β es la concentración inicial de O de O_2. A 25°C, la constante k es 7.13×10^3 (litros)^2/(moles)^2(segundo). Sean $\alpha = 0.0010$ moles/litro, $\beta = 0.0041$ moles/litro y $x(0) = 0$ moles/litro. Use el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar $x(10)$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.000001$, utilice un procedimiento de conclusión con base en el error relativo.

21. Líneas de transmisión. En el estudio del campo eléctrico inducido por dos líneas de transmisión cercanas, surge una ecuación de la forma

$$\frac{dz}{dx} + g(x)z^2 = f(x).$$

Sean $f(x) = 5x + 2$ y $g(x) = x^2$. Si $z(0) = 1$, utilice el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar $z(1)$. Para una tolerancia de $\varepsilon = 0.0001$, usamos un procedimiento de conclusión con base en el error absoluto.

PROYECTOS DE GRUPO PARA EL CAPÍTULO 3

A. *Acuacultura*

La acuacultura es el arte de cultivar plantas y animales originarios del agua. En el ejemplo aquí considerado, se cultiva un lote de bagres en un estanque. Nos interesa determinar el mejor momento para recolectar los peces de modo que el costo (por libra) por el cultivo de los peces se minimice.

Una ecuación diferencial que describa el crecimiento de los peces puede ser

(1) $$\frac{dW}{dt} = KW^{\alpha} ,$$

donde $W(t)$ es el peso de los peces en el instante t, y K y α son constantes de crecimiento determinadas en forma empírica. La forma funcional de esta relación es similar a la de los modelos de crecimiento para otras especies. La modelación de la tasa de crecimiento o la tasa de metabolismo mediante un término W^{α} es una hipótesis común. Con frecuencia, los biólogos se refieren a la ecuación (1) como la **ecuación alométrica** y puede ser apoyada por argumentos plausibles como que la tasa de crecimiento depende del área de la superficie de las entrañas (que varían como $W^{2/3}$) o depende del volumen del animal (que varía como W).

(a) Resuelva la ecuación (1) cuando $\alpha \neq 1$.

(b) La solución obtenida en la parte (a) crece sin límite, pero en la práctica hay un peso máximo límite $W_{\text{máx}}$ para el pez. Este peso límite se puede incluir en la ecuación diferencial que describe el crecimiento insertando una variable adimensional S que puede variar entre 0 y 1 e implica un parámetro μ determinado en forma empírica. A saber, ahora suponemos que

(2) $$\frac{dW}{dt} = KW^{\alpha}S ,$$

donde $S := 1 - (W/W_{\text{máx}})^{\mu}$. Cuando $\mu = 1 - \alpha$, la ecuación (2) tiene una solución con forma cerrada. Resuelva la ecuación (2) cuando $K = 10$, $\alpha = 3/4$, $\mu = 1/4$, $W_{\text{máx}} = 81$ (onzas) y $W(0) = 1$ (onza). Las constantes dadas para t se miden en meses.

(c) La ecuación diferencial que describe el costo total $C(t)$ en dólares por criar un pez durante t meses tiene un término constante K_1 que especifica el costo mensual (debido a costos tales como los intereses, la depreciación y la mano de obra) y una segunda constante K_2 que multiplica la tasa de crecimiento (debido a que la cantidad de alimento consumida por el pez es aproximadamente proporcional a la tasa de crecimiento). Es decir,

(3) $$\frac{dC}{dt} = K_1 + K_2\frac{dW}{dt} .$$

Resuelva la ecuación (3) cuando $K_1 = 0.4$, $K_2 = 0.1$, $C(0) = 1.1$ (dólares) y $W(t)$ queda determinada según la parte (b).

(d) Bosqueje la curva obtenida en la parte (b) que represente el peso del pez en función del tiempo. A continuación, bosqueje la curva obtenida en la parte (c) que represente el costo total de criar al pez en función del tiempo.

(e) Para determinar el tiempo óptimo para recolectar el pez, bosqueje el cociente $C(t)/W(t)$. Este cociente representa el costo total por onza en función del tiempo. Cuando este cociente alcanza su mínimo (es decir, cuando el costo total por onza es mínimo), es el instante óptimo para recolectar los peces. Determine este instante óptimo redondeado a meses.

B. *Curva de persecución*

Obtenemos un modelo geométrico interesante al tratar de determinar la trayectoria de un perseguidor que caza una presa. Esta trayectoria se conoce como **curva de persecución**. Estos problemas fueron analizados usando métodos de cálculo cerca del año 1730 (más de dos siglos después de que Leonardo da Vinci los estudiara). El problema más sencillo consiste en determinar la curva a lo largo de la cual un barco se mueve al perseguir a otro que navega a lo largo de una línea recta, suponiendo que las velocidades de los dos barcos son constantes.

Supongamos que el barco A viaja a velocidad α persiguiendo al barco B, que navega con una velocidad β. Además, el barco A parte (en el instante $t = 0$) del origen y el barco B parte del punto $(1, 0)$ recorriendo la recta $x = 1$. Después de t horas, el barco A se localiza en el punto (x, y) y el barco B está en el punto $Q = (1, \beta t)$ (véase la figura 3.16). El objetivo es describir el lugar geométrico de los puntos P; es decir, determinar a y como función de x.

(a) El barco A persigue al barco B, de modo que en el instante t, el barco A debe apuntar directamente hacia el barco B. Es decir, la recta tangente a la curva de persecución en P debe pasar por el punto Q (véase la figura 3.16). Para que esto sea cierto, muestre que

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \beta t}{x - 1} .$$

(b) Conocemos la velocidad con la que viaja el barco A, de modo que sabemos que la distancia recorrida hasta el instante t es αt. Esta distancia también es la longitud de la curva de persecución de $(0, 0)$ hasta (x, y). Use la fórmula para la longitud de arco del cálculo y muestre que

(5) $$\alpha t = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(u)]^2}\, du .$$

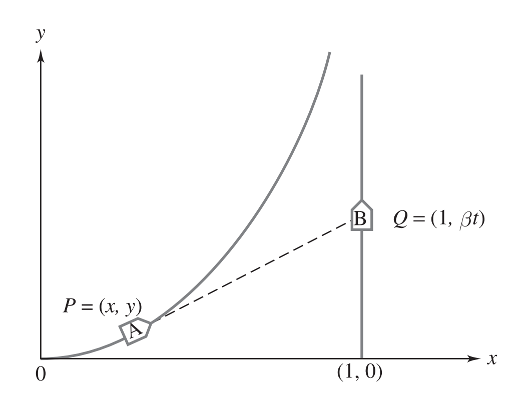


Figura 3.16 La trayectoria del barco A al perseguir el barco B

Al despejar t en las ecuaciones (6) y (7), concluya que

(6) $$\frac{y-(x-1)(dy/dx)}{\beta}=\frac{1}{\alpha}\int_0^x \sqrt{1+[y'(u)]^2}\,du\ .$$

(c) Derive ambos lados de (6) con respecto de x para obtener la ecuación de primer orden

$$(x-1)\frac{dw}{dx}=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1+w^2}\ ,$$

donde $w := dy/dx$.

(d) Use separación de variables y las condiciones iniciales $x = 0$ y $w = dy/dx = 0$ cuando $t = 0$ para mostrar que

(7) $$\frac{dy}{dx}=w=\frac{1}{2}\left[(1-x)^{-\beta/\alpha}-(1-x)^{\beta/\alpha}\right]\ .$$

(e) Para $\alpha > \beta$ (es decir, cuando el barco A navega más rápido que el barco B), utilice la ecuación (7) y las condiciones iniciales $x = 0$ y $y = 0$ cuando $t = 0$ para deducir la ecuación de la curva de persecución

(8) $$y=\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x)^{1+\beta/\alpha}}{1+\beta/\alpha}-\frac{(1-x)^{1-\beta/\alpha}}{1-\beta/\alpha}\right]+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\ .$$

(f) Determine la posición donde el barco A alcanza al barco B, si $\alpha > \beta$.

(g) Muestre que si $\alpha = \beta$, entonces la curva de persecución está dada por

(9) $$y=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[(1-x)^2-1\right]-\ln(1-x)\right\}\ .$$

¿Alcanzará el barco A al barco B en algún momento?

C. *Control de una aeronave en un viento cruzado*

T. L. Pearson, Acadia University, Nueva Escocia

Un avión que vuela bajo la guía de un faro no direccional (un transmisor de radio fijo, abreviado NDB, por sus siglas en inglés) se mueve de modo que su eje longitudinal apunte siempre hacia el faro (véase la figura 3.17). Un piloto se dirige hacia un NDB desde un punto donde el viento forma ángulo recto con la dirección inicial del avión; el viento mantiene esa dirección todo el tiempo. Suponga que la velocidad del viento y la del avión en el aire (su "velocidad en el aire") se mantienen constantes. (Recuerde que esta última velocidad no es lo mismo que la velocidad del avión con respecto del suelo).

(a) Localice el vuelo en el plano xy, colocando el inicio del viaje en $(2, 0)$ y el destino en $(0, 0)$. Escriba la ecuación diferencial que describe la trayectoria del avión sobre el suelo. [*Sugerencia*: $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$].

(b) Haga una sustitución adecuada y resuelva esta ecuación. [*Sugerencia*: Véase la sección 2.6].

(c) Use el hecho de que $x = 2$ y $y = 0$ en $t = 0$ para determinar el valor adecuado de la constante arbitraria en el conjunto de soluciones.

(d) Obtenga a y explícitamente en términos de x. Escriba su solución en términos de una función hiperbólica.

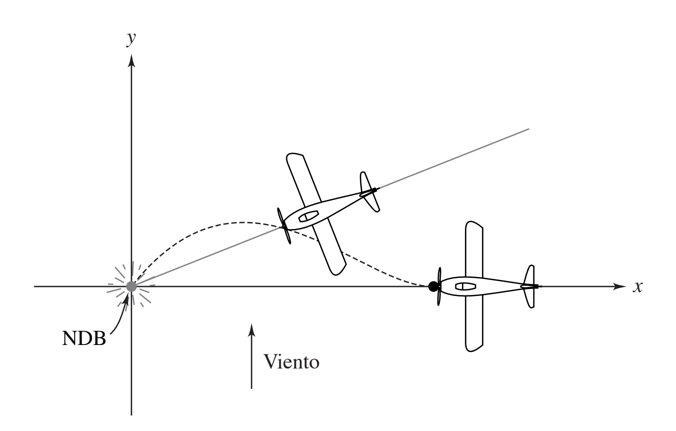


Figura 3.17 Avión guiado a distancia

(e) Sea γ el cociente de la velocidad del viento y la velocidad del avión en el aire. Use un paquete de cómputo para graficar las soluciones en los casos $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5$ y 0.7, todas en el mismo conjunto de ejes. Interprete estas gráficas.

(f) Analice los (¡terroríficos!) casos $\gamma = 1$ y $\gamma > 1$.

D. *Retroalimentación y el amplificador operacional*

El amplificador operacional que aparece en la figura 3.18(a) es un dispositivo no lineal. Gracias a las fuerzas de poder internas, los transistores concatenados, etcétera, proporciona un enorme voltaje negativo en la terminal de salida O siempre que el voltaje en su terminal inversora ($-$) exceda al correspondiente en la terminal no inversora (+) y un enorme voltaje positivo al invertir la situación. Se puede expresar $E_{\text{salida}} \approx G(E^{+}_{\text{entrada}} - E^{-}_{\text{entrada}})$ con una *ganancia G* grande (a veces de 1000 o más), pero la aproximación sería muy poco confiable para muchas aplicaciones. Los ingenieros han logrado mejorar este dispositivo utilizando la *retroalimentación negativa*, como se ilustra en la figura 3.18(b). Al conectar la salida con la

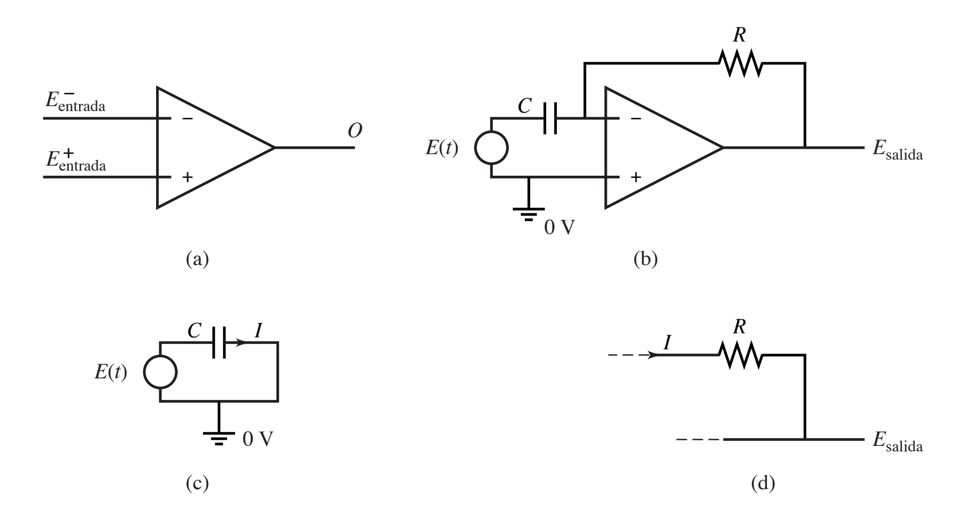


Figura 3.18 Derivador con amplificador operacional

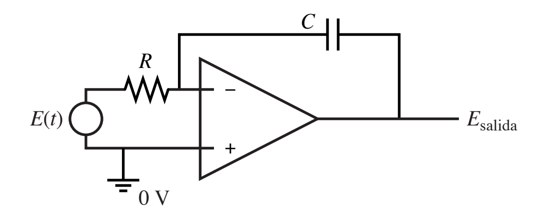


Figura 3.19 Integrador con amplificador operacional

terminal de entrada *inversora*, el amplificador operacional actúa como un vigilante, evitando un desequilibrio entre los voltajes de entrada inversor y no inversor. Con tal conexión, ambos voltajes se mantienen en el mismo valor: 0 V (*tierra* eléctrica) para la situación que se muestra.

Además, las terminales de entrada del amplificador operacional no extraen corriente: toda la corriente enviada a la terminal inversora se dirige de forma inmediata a la trayectoria de retroalimentación. Como resultado, la corriente extraída de la fuente indicada $E(t)$ queda descrita por el circuito equivalente que aparece en la figura 3.18(c):

$$E(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt \quad \text{o} \quad I(t) = C\frac{dE}{dt} \ ,$$

y esta corriente I fluye por la resistencia R de la figura 3.18(d), causando una caída de voltaje de 0 a $-RI$. En otras palabras, el voltaje de salida $E_{\text{salida}} = -RI = -RC(dE/dt)$ es una réplica a escala e invertida de la derivada del voltaje de la fuente. El circuito es un **derivador con amplificador operacional**.

(a) Imite este análisis para mostrar que el circuito en la figura 3.19 es un **integrador con amplificador operacional**, con

$$E_{\text{salida}} = -\frac{1}{RC}\int E(t)dt \ ,$$

salvo una constante que depende de la carga inicial sobre el condensador.

(b) Diseñe integradores y derivadores con amplificadores operacionales y retroalimentación negativa, pero con inductores en vez de condensadores. (En la mayor parte de las situaciones, los condensadores son menos caros que los inductores, de modo que son preferibles los diseños anteriores).

E. Controles bang-bang

En el ejemplo 3 de la sección 3.3 (página 105), supusimos que la cantidad de calentamiento o enfriamiento proporcionados por un calefactor o el aire acondicionado es proporcional a la diferencia entre la temperatura actual y la temperatura deseada; recuerde la ecuación

$$U(t) = K_U[T_D - T(t)] \ .$$

En muchos hogares, los mecanismos de calefacción/enfriamiento proporcionan una razón *constante* de flujo de calor, digamos

$$U(t) = \begin{cases} K_1 \ , & \text{si} \quad T(t) > T_D \ , \\ K_2 \ , & \text{si} \quad T(t) < T_D \end{cases}$$

(con $K_1 < 0$).

(a) Modifique la ecuación diferencial (9) del ejemplo 3 de modo que describa la temperatura de un hogar con esta ley de control “bang-bang”.

(b) Suponga que la temperatura inicial $T(0)$ es mayor que T_D. Modifique las constantes en la solución (12) de la página 106 de modo que la fórmula sea válida siempre que $T(t) > T_D$.

(c) Si la temperatura inicial $T(0)$ es menor que T_D, ¿cuáles valores deben tener las constantes en (12) de modo que la fórmula sea válida para $T(t) < T_D$?

(d) ¿Cómo se deben unir las soluciones en (b) y (c) para obtener una descripción completa (en términos del tiempo) de la temperatura $T(t)$?

F. *Precio, oferta y demanda*

Es claro que la demanda de cualquier artículo (petróleo, ropa o automóviles) depende de su precio (entre otras cosas). Los artículos con mayor precio son por lo general menos atractivos, a menos que el precio esté aumentando y los consumidores quieran adquirirlo a un "precio bajo por introducción". Así, para modelar matemáticamente la demanda $D(t)$ de un producto en el instante t, una estimación cruda que ignora todos los factores excepto el precio tomaría la forma

$$D(t) = d_0 - d_1 p(t) + d_2 p'(t) \ ,$$

donde $p(t)$ es el precio unitario y las constantes d_i son positivas. Quienes ofrecen el artículo tratarían naturalmente de capitalizarse con base en artículos con valor creciente, de modo que un modelo crudo de función de oferta tomaría la forma

$$S(t) = s_0 + s_1 p(t) + s_2 p'(t) \ ,$$

donde s_2 es positiva.

Si la demanda excede a la oferta, una estrategia para obtener ganancias indicaría que el precio debe aumentar; si la oferta excede a la demanda, no habrá más alternativa que reducir los precios. Se llegará a un equilibrio económico si el precio fuese tal que la oferta equilibre exactamente a la demanda: $D(t) = S(t)$, $p'(t) = 0$ y $p(t) = p_{eq} = (d_0 - s_0)/(d_1 + s_1)$. Veamos una cuestión más interesante: ¿Cómo evoluciona un precio (que no es de equilibrio) $p(t)$ durante un periodo en que la oferta sigue a la demanda, $S(t) = D(t)$?

(a) Iguale $D(t)$ y $S(t)$ y resuelva la ecuación diferencial resultante (suponiendo que $s_2 \neq d_2$) para $p(t)$ en términos de su valor inicial $p_0 = p(0)$.

(b) *Estabilidad de precios* Muestre que si $(d_1 + s_1)/(d_2 - s_2) < 0$,entonces $p(t)$ tiende al precio de equilibrio cuando $t \to \infty$. ¿Qué condiciones sobre las constantes garantizan que el precio de equilibrio sea positivo (y por tanto realista)?

(c) *Inestabilidad de precios* Muestre que si $(d_1 + s_1)/(d_2 - s_2) > 0$ y $p_0 > p_{eq}$, entonces $p(t)$ crece sin límite cuando $t \to \infty$. (Por supuesto, las fórmulas crudas deben revisarse al crecer t).

(d) Si el precio unitario de un artículo $p(t)$ es \$5 en $t = 0$ (meses) y la oferta y la demanda por miles de unidades se modelan como

$$S(t) = 20 + p(t) + 6p'(t) \ ,$$

$$D(t) = 30 - 2p(t) + 4p'(t) \ ,$$

¿cuál será el precio unitario después de 10 meses? ¿Hay estabilidad o inestabilidad de los precios al aumentar t?

G. *Estabilidad de métodos numéricos*

Con frecuencia, los métodos numéricos se verifican con sencillos problemas con valores iniciales de la forma

(8) $$y' + \lambda y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad (\lambda = \text{constante})\,,$$

que tiene la solución $\phi(x) = e^{-\lambda x}$. Observe que para cada $\lambda > 0$, la solución $\phi(x)$ tiende a cero cuando $x \to +\infty$. Así, una propiedad deseable para cualquier esquema numérico que genere aproximaciones $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ de $\phi(x)$ en los puntos $0, h, 2h, 3h, \ldots$ es que, para $\lambda > 0$,

(9) $$y_n \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty\,.$$

Para los métodos lineales de un paso, la propiedad (9) es la **estabilidad absoluta**.

(a) Muestre que para $x_n = nh$, el método de Euler aplicado al problema con valor inicial (8) proporciona las aproximaciones

$$y_n = (1 - \lambda h)^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y deduzca que este método es absolutamente estable sólo cuando $0 < \lambda h < 2$. (Esto significa que para una $\lambda > 0$ dada, debemos elegir el tamaño de paso h suficientemente pequeño para que (9) se cumpla). Además, muestre que para $h > 2/\lambda$, ¡el error $y_n - \phi(x_n)$ crece en forma exponencial!

(b) Muestre que para $x_n = nh$, el esquema del trapecio de la sección 3.6, aplicado al problema (8), proporciona las aproximaciones

$$y_n = \left(\frac{1 - \lambda h/2}{1 + \lambda h/2}\right)^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y deduzca que este esquema es absolutamente estable para toda $\lambda > 0$, $h > 0$.

(c) Muestre que el método de Euler mejorado, aplicado al problema (8), es absolutamente estable para $0 < \lambda h < 2$.

Métodos multipaso. Al usar métodos numéricos multipaso, pueden surgir problemas de inestabilidad que no pueden arreglarse eligiendo simplemente un tamaño de paso h suficientemente pequeño. Esto se debe a que los métodos multipaso producen "soluciones extrañas", que pueden dominar los cálculos. Para ver qué puede ocurrir, consideremos el métodos de dos pasos

(10) $$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

para la ecuación $y' = f(x, y)$.

(d) Muestre que para el problema con valor inicial

(11) $$y' + 2y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,$$

la fórmula de recurrencia (14), con $x_n = nh$, se convierte en

(12) $$y_{n+1} + 4hy_n - y_{n-1} = 0\,.$$

La ecuación (12), una **ecuación en diferencias**, se puede resolver mediante el siguiente procedimiento. Postulamos una solución de la forma $y_n = r^n$, donde r es una constante por determinar.

(e) Muestre que al sustituir $y_n = r^n$ en (12) obtenemos la "ecuación característica"

$$r^2 + 4hr - 1 = 0\,,$$

con las raíces

$$r_1 = -2h + \sqrt{1 + 4h^2} \quad \text{y} \quad r_2 = -2h - \sqrt{1 + 4h^2}\,.$$

Por analogía con la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, se puede mostrar que una solución general de (12) es

$$y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Así, la solución general de la ecuación en diferencias (12) tiene dos constantes independientes, mientras que la ecuación diferencial (11) tiene sólo una, a saber, $\phi(x) = ce^{-2x}$.

(f) Muestre que para cada $h > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} = r_1^n = 0 \ , \quad \text{pero} \quad \lim_{n\to\infty} |r_2^n| = \infty \ .$$

Por lo tanto, el término r_1^n se comporta como la solución $\phi(x_n) = e^{-2x_n}$ cuando $n \to \infty$. Sin embargo, la solución extraña r_2^n crece sin límite.

(g) La aplicación del esquema (10) al problema con valor inicial (11) requiere dos valores de partida y_0, y_1. Los valores exactos son $y_0 = 1$, $y_1 = e^{-2h}$. Sin embargo, independientemente de la elección de los valores de partida y el tamaño de h, a partir de cierto momento el término $c_2 r_2^n$ dominará a toda la solución de la ecuación de recurrencia al crecer x_n. Ilustre esta inestabilidad considerando $y_0 = 1$, $y_1 = e^{-2h}$ y usando una calculadora o computadora para calcular $y_2, y_3, \ldots, y_{100}$ a partir de la fórmula de recurrencia (12) para $h = 0.5$ y $h = 0.05$. (*Nota*: Aunque las condiciones iniciales se elijan de modo que $c_2 = 0$, el error de redondeo "excitará" a la solución extraña dominante).

H. *Duplicación de periodo y caos*

En el estudio de los sistemas dinámicos se observan los fenómenos de **duplicación de periodo** y **caos**. Estos fenómenos se pueden apreciar al usar un esquema numérico para aproximar la solución de un problema con valor inicial para una ecuación diferencial no lineal, como el modelo logístico para el crecimiento de poblaciones:

(13) $$\frac{dp}{dt} = 10p(1-p) \ , \qquad p(0) = 0.1 \ .$$

(véase la sección 3.2).

(a) Resuelva el problema con valor inicial (13) y muestre que $p(t)$ tiende a 1 cuando $t \to +\infty$.

(b) Muestre que al usar el método de Euler (véanse las secciones 1.4 y 3.6) con tamaño de paso h para aproximar la solución de (13) se obtiene

(14) $$p_{n+1} = (1 + 10h)p_n - (10h)p_n^2 \ , \qquad p_0 = 0.1 \ .$$

(c) Para $h = 0.18, 0.23, 0.25$ y 0.3, muestre que las primeras 40 iteraciones de (14) parecen (i) converger a 1 cuando $h = 0.18$, (ii) saltar entre 1.18 y 0.69 cuando $h = 0.23$, (iii) saltar entre 1.23, 0.54, 1.16 y 0.70 cuando $h = 0.25$ y (iv) no mostrar un patrón visible cuando $h = 0.3$.

Las transiciones de la convergencia al salto entre dos números, luego entre cuatro y así sucesivamente, se llama **duplicación del periodo**. El fenómeno que aparece cuando $h = 0.3$ se conoce como **caos**. Esta transición de la duplicación del periodo al caos cuando h aumenta se observa con frecuencia en los sistemas dinámicos.

La transición al caos se ilustra en el diagrama de bifurcación (véase la figura 3.20). Este diagrama se genera para la ecuación (14) de la manera siguiente. Comenzamos en $h = 0.18$ y calculamos la sucesión $\{p_n\}$ usando (14); a partir de $n = 201$, ubicamos los siguientes 30 valo-

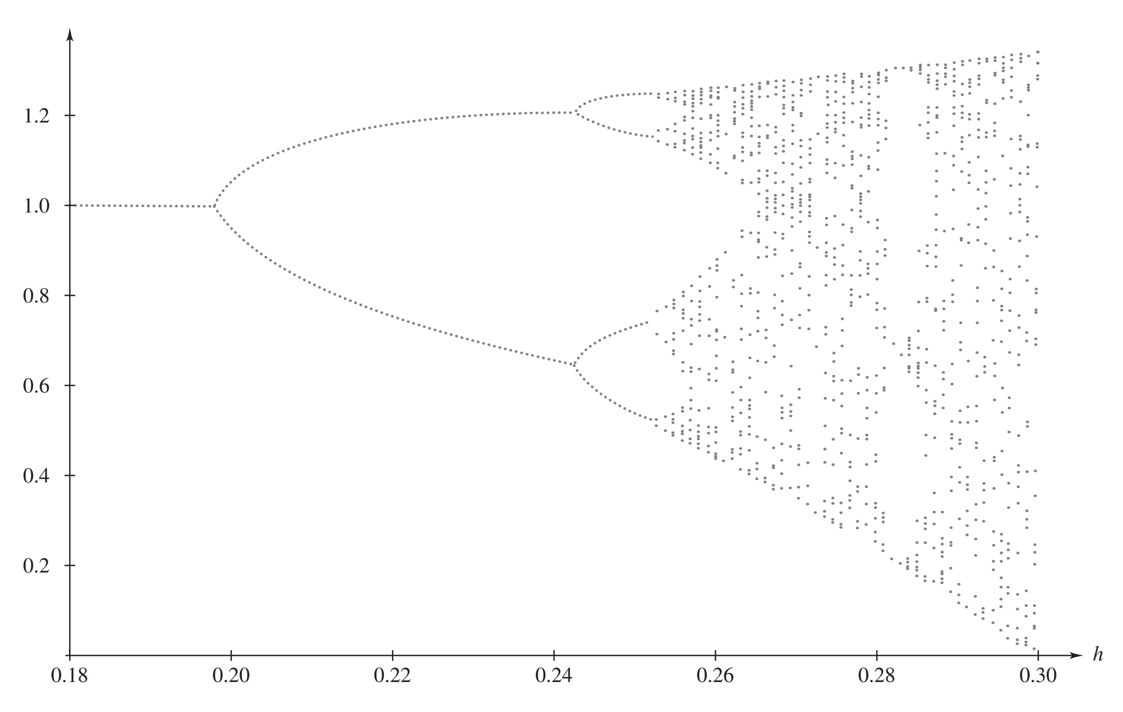


Figura 3.20 Duplicación de periodo, hacia el caos

res, es decir, $p_{201}, p_{202}, \ldots, p_{230}$. A continuación, incrementamos h en 0.001, para obtener 0.181 y repetir el proceso. Continuamos hasta que $h = 0.30$. Observe la forma en que la figura se divide de una rama en dos, luego en cuatro, y así sucesivamente hasta que se llega al caos.

Nuestra preocupación es la inestabilidad del procedimiento numérico si h no se elige lo bastante pequeño. Por fortuna, la inestabilidad observada para el método de Euler (la duplicación del periodo y el caos) se reconoce de inmediato, pues sabemos que este tipo de comportamiento no es de esperar en una solución de la ecuación logística. En consecuencia, de haber usado el método de Euler y $h = 0.23$, 0.25 o 0.3 para resolver (13) en forma numérica, nos habríamos dado cuenta de que h no era lo bastante pequeño.

La situación para el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden (véase la sección 3.7) es más complicada. Puede ocurrir que para cierta elección de h haya una duplicación del periodo, pero también es posible que para otras elecciones de h la solución numérica converja a un valor límite que *no sea* el valor límite para cualquier solución de la ecuación logística en (17).

(d) Aproxime la solución de (13) calculando las primeras 60 iteraciones del método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden usando el tamaño de paso $h = 0.3$. (Así, para la subrutina de la página 137, $N = 60$ y $c = (60)(0.3) = 18$). Repita con $h = 0.325$ y $h = 0.35$. ¿Cuáles valores de h (si existen) cree que proporcionen la aproximación "correcta" a la solución? ¿Por qué?

En la sección 5.7 se analizará con más detalle el caos.

CAPÍTULO 4

Ecuaciones lineales de segundo orden

4.1 INTRODUCCIÓN: EL OSCILADOR MASA-RESORTE

Un oscilador masa-resorte amortiguado está formado por una masa *m* unida a un resorte fijo en un extremo, como se muestra en la figura 4.1. Diseñe una ecuación diferencial que gobierne el movimiento de este oscilador, tomando en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte, la fricción (amortiguamiento) y las posibles influencias externas.

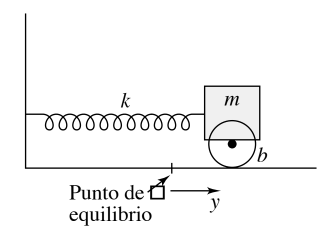


Figura 4.1 Oscilador masa-resorte amortiguado

La segunda ley de Newton —fuerza igual a masa por aceleración ($F = ma$)— es sin duda la ecuación diferencial que aparece con más frecuencia en la práctica. Es una ecuación diferencial ordinaria *de segundo orden*, pues la aceleración es la segunda derivada de la posición y con respecto del tiempo $(a = d^2y/dt^2)$.

Al aplicar la segunda ley a un oscilador masa-resorte, los movimientos resultantes son experiencias cotidianas y podemos aprovechar nuestra familiaridad con estas vibraciones para obtener una descripción cualitativa de las soluciones de ecuaciones de segundo orden más generales.

En relación con la figura 4.1, la cual muestra el oscilador masa-resorte, cuando el resorte no está estirado y la masa inercial m está en reposo, el sistema está en equilibrio; medi-

mos la coordenada y de la masa mediante su desplazamiento a partir de la posición de equilibrio. Al desplazar la masa m con respecto del equilibrio, el resorte se estira o se comprime y ejerce una fuerza que resiste al desplazamiento. Para la mayor parte de los resortes, esta fuerza es directamente proporcional al desplazamiento y, por lo que está dada por

(1) $$F_{\text{resorte}} = -ky \ ,$$

donde la constante positiva k es la *rigidez* y el signo negativo indica la naturaleza de oposición de la fuerza. La **ley de Hooke**, como se conoce comúnmente a la ecuación (1), sólo es válida para desplazamientos suficientemente pequeños; si el resorte se comprime con una fuerza suficiente de modo que cada vuelta del resorte presione a las demás, es claro que la fuerza de oposición es cada vez más grande.

Prácticamente todos los sistemas mecánicos experimentan la fuerza de fricción; por lo general, para el movimiento de vibración, esta fuerza se modela mediante un término proporcional a la velocidad:

(2) $$F_{\text{fricción}} = -b\frac{dy}{dt} = -by' \ ,$$

donde $b \geq 0$ es el *coeficiente de amortiguamiento* y el signo negativo tiene el mismo significado que en la ecuación (1).

Las otras fuerzas que actúan sobre el oscilador se consideran por lo general como *externas* al sistema. Aunque éstas pueden ser gravitacionales, eléctricas o magnéticas, lo común es que las fuerzas externas más importantes sean transmitidas a la masa sacudiendo la base de la que cuelga el sistema. Por el momento reuniremos todas las fuerzas externas en una sola función *conocida* $F_{\text{externa}}(t)$. La ley de Newton proporciona entonces la ecuación diferencial para el oscilador masa-resorte:

$$my'' = -ky - by' + F_{\text{ext}}(t)$$

o

(3) $$my'' + by' + ky = F_{\text{ext}}(t) \ .$$

¿Qué apariencia tienen los movimientos del sistema masa-resorte? La experiencia cotidiana con amortiguadores gastados, un gong musical o tazones con gelatina nos dice que, cuando no hay fricción ($b = 0$) o fuerzas externas, los movimientos (idealizados) son vibraciones perpetuas como las que aparecen en la figura 4.2. Estas vibraciones se parecen a las funciones sinusoidales, donde su amplitud depende del desplazamiento y la velocidad iniciales. La frecuencia de las oscilaciones aumenta para resortes más rígidos y decrece para masas mayores.

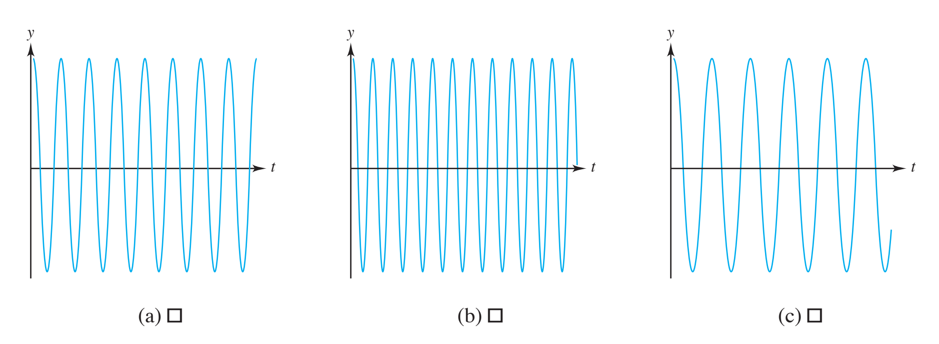


Figura 4.2 (a) Oscilación sinusoidal, (b) resorte más rígido y (c) masa más pesada

En la sección 4.3 mostraremos una forma de encontrar estas soluciones. El ejemplo 1 contiene un rápido cálculo que confirma nuestras predicciones intuitivas.

EJEMPLO 1 Verificar que si $b = 0$ y $F_{\text{externa}}(t) = 0$, la ecuación (3) tiene una solución de la forma $y(t) = \cos \omega t$, y que la frecuencia angular ω aumenta con k y disminuye con m.

SOLUCIÓN Bajo las condiciones dadas, la ecuación (3) se simplifica a

$$\textbf{(4)} \qquad my'' + ky = 0 \ .$$

La segunda derivada de $y(t)$ es $-\omega^2 \cos \omega t$, y si sustituimos esto en (4), tenemos

$$my'' + ky = -m\omega^2 \cos \omega t + k \cos \omega t \ ,$$

que se anula si $\omega = \sqrt{k/m}$. Esta ω aumenta con k y disminuye con m como se había pronosticado. ■

Cuando hay fricción, estas oscilaciones son amortiguadas y los movimientos se parecen al mostrado en la figura 4.3. En la figura 4.3(a), la gráfica presenta una oscilación amortiguada; la fricción reduce la frecuencia y la amplitud parece decrecer en forma exponencial con el tiempo. En la figura 4.3(b), la fricción es tan dominante que evita por completo la oscilación del sistema. Los dispositivos que *supuestamente* deben vibrar, como los diapasones o los osciladores de cristal, se comportan como la figura 4.3(a); en este caso, el efecto de la fricción se considera por lo general como una pérdida mecánica no deseada. Por otro lado, los buenos sistemas de suspensión de los automóviles se comportan como la figura 4.3(b); aprovechan la fricción para *suprimir* las oscilaciones.

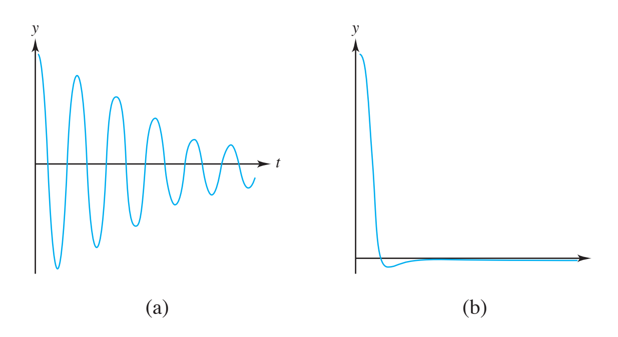


Figura 4.3 (a) Fricción baja y (b) fricción alta

Los procedimientos para resolver los sistemas masa-resorte (no forzados) con fricción también se describen en la sección 4.3 pero, como muestra en los ejemplos 2 y 3, los cálculos son más complejos. El ejemplo 2 tiene un coeficiente de amortiguamiento relativamente bajo ($b = 6$) e ilustra las soluciones del caso "subamortiguadas" en la figura 4.3(a). En el ejemplo 3, el amortiguamiento es más severo ($b = 19$) y la solución está "sobreamortiguada" como en la figura 4.3(b).

EJEMPLO 2 Verificar que el sinusoide con amortiguamiento exponencial dado por $y(t) = e^{-3t} \cos 4t$ es una solución de la ecuación (3) si $F_{\text{externa}} = 0$, $m = 1$, $k = 25$ y $b = 6$.

SOLUCIÓN Las derivadas de y son

$$y'(t) = -3e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\operatorname{sen} 4t \ ,$$
$$y''(t) = 9e^{-3t}\cos 4t + 12e^{-3t}\operatorname{sen} 4t + 12e^{-3t}\operatorname{sen} 4t - 16e^{-3t}\cos 4t$$
$$= -7e^{-3t}\cos 4t + 24e^{-3t}\operatorname{sen} 4t \ ,$$

y al sustituir en (3) se tiene

$$\begin{aligned} my'' + by' + ky &= (1)y'' + 6y' + 25y \\ &= -7e^{-3t}\cos 4t + 24e^{-3t}\operatorname{sen} 4t + 6(-3e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\operatorname{sen} t) \\ &\quad + 25e^{-3t}\cos 4t \\ &= 0 \ . \ \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Verificar que la función exponencial sencilla $y(t) = e^{-5t}$ es una solución de la ecuación (3) si $F_{\text{externa}} = 0$, $m = 1$, $k = 25$ y $b = 10$.

SOLUCIÓN Las derivadas de y son $y'(t) = -5e^{-5t}$, $y''(t) = 25e^{-5t}$; al sustituir en (3) se tiene

$$my'' + by' + ky = (1)y'' + 10y' + 25y = 25e^{-5t} + 10(-5e^{-5t}) + 25e^{-5t} = 0 \ . \ \blacksquare$$

Si un sistema masa-resorte es controlado por una fuerza externa sinusoidal con frecuencia angular ω, nuestra experiencia indica que aunque la respuesta inicial del sistema fuese un tanto errática, con el tiempo se "sincronizará" con el controlador y oscilará con la misma frecuencia, como muestra la figura 4.4.

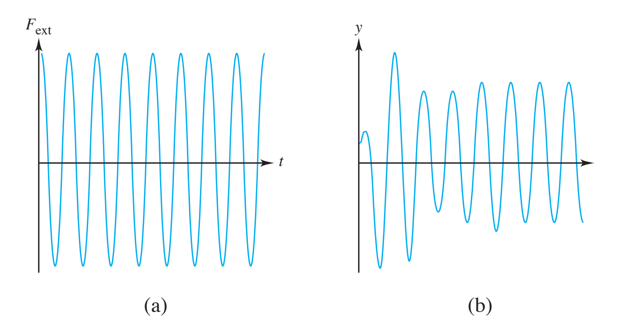


Figura 4.4 (a) Fuerza de control y (b) respuesta

Los ejemplos comunes de sistemas que vibran sincronizados con sus controladores son las bocinas de sistemas de sonido, ciclistas que utilizan su bicicleta sobre vías de ferrocarril, circuitos electrónicos amplificadores y las mareas del océano (controladas por la influencia gravitacional de la Luna). Sin embargo, la historia tiene más de lo que se ha revelado hasta ahora. Los sistemas pueden ser muy sensibles a la frecuencia particular ω con la que se les controla. Así, las notas musicales afinadas con precisión pueden hacer vibrar un cristal fino, las vibraciones inducidas por el viento con la frecuencia correcta (o incorrecta, según se vea) pueden derribar un puente y una llave de agua goteando puede causar dolores de cabeza fuera de lo común. Estas respuestas "resonantes" (para las que las soluciones tienen amplitudes máximas) pueden ser algo destructivas, y los ingenieros en estructuras deben tener mucho cuidado para garantizar que sus productos no resonarán con alguna de las vibraciones que podrían ocurrir en el ambiente de operación. Por otro lado, los ingenieros de radio *realmente* quieren que sus receptores resuenen en forma selectiva con el canal de transmisión deseado.

El cálculo de estas soluciones forzadas es el tema de las secciones 4.4 y 4.5. El ejemplo 4 ilustra algunas características de la respuesta y resonancia sincrónicas.

EJEMPLO 4 Determinar la respuesta sincrónica del oscilador masa-resorte con $m = 1$, $b = 1$, $k = 25$ a la fuerza sen Ωt.

SOLUCIÓN Buscamos soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + y' + 25y = \operatorname{sen} \Omega t \tag{5}$$

que son sinusoides en sincronía con sen Ωt; así que tratemos de usar la forma $y(t) = A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t$. Como

$$y' = -\Omega A \operatorname{sen} \Omega t + \Omega B \cos \Omega t \ ,$$

$$y'' = -\Omega^2 A \cos \Omega t - \Omega^2 B \operatorname{sen} \Omega t \ ,$$

podemos simplemente sustituir estas formas en la ecuación (5), agrupar términos y factorizar los coeficientes para obtener una solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \Omega t &= y'' + y' + 25y \\ &= -\Omega^2 A \cos \Omega t - \Omega^2 B \operatorname{sen} \Omega t + \left[-\Omega A \operatorname{sen} \Omega t + \Omega B \cos \Omega t\right] \\ &\quad + 25\left[A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t\right] \\ &= \left[-\Omega^2 B - \Omega A + 25B\right] \operatorname{sen} \Omega t + \left[-\Omega^2 A + \Omega B + 25A\right] \cos \Omega t \ , \end{aligned}$$

de modo que

$$-\Omega A + (-\Omega^2 + 25)B = 1$$

$$(-\Omega^2 + 25)A + \Omega B = 0 \ .$$

Tenemos que

$$A = \frac{-\Omega}{\Omega^2 + (\Omega^2 - 25)^2} \ , \qquad B = \frac{-\Omega^2 + 25}{\Omega^2 + (\Omega^2 - 25)^2} \ .$$

La figura 4.5 exhibe A y B como funciones de la frecuencia de control Ω. Es claro que aparece una resonancia en cerca de $\Omega \approx 5$. ■

En este capítulo sólo analizaremos ecuaciones diferenciales de la forma

$$ay'' + by' + cy = f(t) \ , \tag{6}$$

donde $y(t)$ [o $y(x)$, $x(t)$, etcétera] es la función incógnita; a, b y c son constantes y $f(t)$ [o $f(x)$] es una función *conocida*. La nomenclatura adecuada para (6) es que se trata de una *ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden con coeficientes constantes*. En capítulos posteriores generalizaremos nuestro punto de vista a ecuaciones con coeficientes constantes, ecuaciones de orden superior, ecuaciones no lineales y sistemas de ecuaciones simultáneas. Sin embargo, (6) es un excelente punto de partida, pues podremos obtener soluciones explícitas y observar, en forma concreta, las propiedades teóricas predichas para ecuaciones más generales. Como motivación de los procedimientos matemáticos y la teoría necesaria para resolver (6), con frecuencia la compararemos con el paradigma masa-resorte:

$$[\textbf{inercia}] \times y'' + [\textbf{amortiguamiento}] \times y' + [\textbf{rigidez}] \times y = F_{\text{externa}} \ .$$

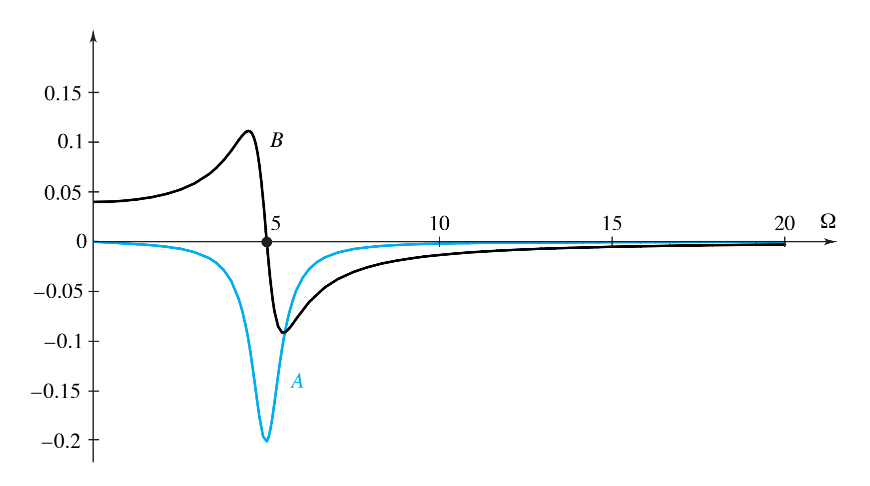


Figura 4.5 Amplitudes de vibración en torno a una resonancia

EJERCICIOS 4.1

1. Verifique que para $b = 0$ y $F_{\text{externa}} = 0$, la ecuación (3) tiene una solución de la forma

$$y(t) = \operatorname{sen}\omega t, \text{ donde } \omega = \sqrt{k/m} .$$

2. Si $F_{\text{externa}}(t) = 0$, la ecuación (3) se convierte en

$$my'' + by' + ky = 0 .$$

Para esta ecuación, verifique lo siguiente:

(a) Si $y(t)$ es una solución, también lo es $cy(t)$, para cualquier constante c.

(b) Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones, también lo es su suma $y_1(t) + y_2(t)$.

3. Verifique que $y = 2 \operatorname{sen} 3t + \cos 3t$ es una solución del problema con valores iniciales

$$2y'' + 18y = 0 ; \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 6 .$$

Determine el máximo de $|y(t)|$ para $-\infty < t < \infty$.

4. Muestre que si $F_{\text{externa}}(t) = 0$, $m = 1$, $k = 25$ y $b = 10$, entonces la ecuación (3) tiene las soluciones sobreamortiguadas $y_1(t) = e^{-5t}$ y $y_2(t) = te^{-5t}$. ¿Cuál es el límite de estas soluciones cuando $t \to \infty$?

5. Verifique que el sinusoide con amortiguamiento exponencial $y(t) = e^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)$ es una solución de la ecuación (3) si $F_{\text{externa}}(t) = 0$, $m = 1$, $b = 4$ y $k = 6$. ¿Cuál es el límite de estas soluciones cuando $t \to \infty$?

6. Se aplica una fuerza externa $F(t) = 2\cos 2t$ a un sistema masa-resorte con $m = 1$, $b = 0$ y $k = 4$, que está inicialmente en reposo; es decir, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Verifique que $y(t) = \frac{1}{2}t \operatorname{sen} 2t$ da el movimiento de este resorte. ¿Qué ocurrirá a largo plazo (al aumentar t) con el resorte?

En los problemas 7-9, determine una solución sincrónica de la forma $A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t$ a la ecuación de oscilador forzado dada, usando el método del ejemplo 4 para encontrar A y B.

7. $y'' + 2y' + 4y = 3 \operatorname{sen} 5t, \quad \Omega = 5$

8. $y'' + 2y' + 4y = 5 \operatorname{sen} 3t, \quad \Omega = 3$

9. $y'' + 2y' + 4y = 3 \cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t, \quad \Omega = 2$

10. Los osciladores no amortiguados forzados en la resonancia tienen soluciones inusuales (no físicas).

(a) Para estudiar esto, determine la solución sincrónica $A \cos \Omega t + B \operatorname{sen} \Omega t$ de la ecuación genérica del oscilador forzado

(7) $$my'' + by' + ky = \cos \Omega t .$$

(b) Bosqueje las gráficas de los coeficientes A y B, como funciones de Ω para $m = 1$, $b = 0.1$ y $k = 25$.

(c) Haga ahora $b = 0$ en sus fórmulas para A y B y vuelva a bosquejar las gráficas de la parte (b) con $m = 1$ y $k = 25$. ¿Qué ocurre en $\Omega = 5$? Observe que las amplitudes de las soluciones sincrónicas crecen sin límite cuando Ω tiende a 5.

(d) Muestre en forma directa, sustituyendo la forma $A \cos \Omega t + B$ sen Wt en la ecuación (7), que cuando $b = 0$ *no* hay soluciones sincrónicas si $\Omega = \sqrt{k/m}$.

(e) Verifique que $(2m\Omega)^{-1}t$ sen Ωt es una solución de la ecuación (7) cuando $b = 0$ y $\Omega = \sqrt{k/m}$. Observe que esta solución *no* sincrónica crece sin límite al aumentar el tiempo.

Es claro que no se puede despreciar el amortiguamiento al analizar un oscilador forzado en la resonancia, pues en caso contrario las soluciones no tienen sentido físico, como muestra la parte (e). Más adelante en este capítulo estudiaremos este comportamiento.

4.2 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS: LA SOLUCIÓN GENERAL

Comenzamos nuestro estudio de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes

(1) $$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (a \neq 0)$$

con el caso particular en que la función $f(t)$ es cero:

(2) $$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0} \ .$$

Este caso surge al considerar osciladores masa-resorte con vibración libre; es decir, sin aplicar fuerzas externas. La ecuación (2) se llama la *forma homogénea* de la ecuación (1); $f(t)$ es la “no homogeneidad” en (1). (Esta nomenclatura no se relaciona con la forma en que usamos el término para las ecuaciones de primer orden en la sección 2.6).

Al observar la ecuación (2) vemos que sus soluciones deben tener la propiedad de que su segunda derivada pueda expresarse como combinación lineal de sus derivadas de orden uno y cero.† Esto sugiere tratar de hallar una solución de la forma $y = e^{rt}$, ya que las derivadas de e^{rt} son precisamente constantes por e^{rt}. Si sustituimos $y = e^{rt}$ en (2), obtenemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \ ,$$
$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \ .$$

Como e^{rt} nunca es cero, podemos dividir entre esto para obtener

(3) $$\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0} \ .$$

En consecuencia, $y = e^{rt}$ es una solución de (2) si y sólo si r satisface la ecuación (3). La ecuación (3) es la **ecuación auxiliar** (o **ecuación característica**) asociada a la ecuación homogénea (2).

La ecuación auxiliar es cuadrática y sus raíces son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ .$$

Cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales. Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son números

†La derivada de orden cero de una función es la propia función.

complejos conjugados. En esta sección consideraremos los dos primeros casos y pospondremos el caso complejo para la sección 4.3.

EJEMPLO 1 Determinar un par de soluciones de

$$\textbf{(4)} \qquad y'' + 5y' - 6y = 0 \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar asociada a (4) es

$$r^2 + 5r - 6 = (r - 1)(r + 6) = 0 \ ,$$

que tiene las raíces $r_1 = 1$, $r_2 = -6$. Así, e^t y e^{-6t} son soluciones. ■

Observe que la función idénticamente nula, $y(t) \equiv 0$, siempre es solución de (2). Además, cada vez que tengamos un par de soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de esta ecuación, como en el ejemplo 1, podemos construir una infinidad de soluciones mediante sus combinaciones lineales:

$$\textbf{(5)} \qquad y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2. El hecho de que (5) sea una solución de (2) se puede ver mediante una sustitución y un rearreglo:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= a(c_1y_1'' + c_2y_2'') + b(c_1y_1' + c_2y_2') + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) \\ &= 0 + 0 \ . \end{aligned}$$

Los dos "grados de libertad" c_1 y c_2 en la combinación (5) sugieren que las soluciones de la ecuación diferencial (2) se pueden determinar con condiciones adicionales, como las condiciones iniciales para las ecuaciones de primer orden en el capítulo 1, pero la presencia de c_1 y c_2 lleva a suponer que se pueden imponer *dos* de tales condiciones en vez de una. Esto es consistente con la interpretación masa-resorte de la ecuación (2), ya que la predicción del movimiento de un sistema mecánico requiere del conocimiento no sólo de la posición inicial $y(0)$ y la velocidad $y'(0)$ de la masa. Un típico *problema con valores iniciales* para estas ecuaciones de segundo orden aparece en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Resolver el problema con valores iniciales

$$\textbf{(6)} \qquad y'' + 2y' - y = 0 \ ; \qquad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = -1 \ .$$

SOLUCIÓN Primero encontramos un par de soluciones como en el ejemplo anterior. Luego ajustamos las constantes c_1 y c_2 en (5) para obtener una solución que cumpla las condiciones iniciales sobre $y(0)$ y $y'(0)$. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 2r - 1 = 0 \ .$$

La fórmula cuadrática indica que las raíces de esta ecuación son

$$r_1 = -1 + \sqrt{2} \quad \text{y} \quad r_2 = -1 - \sqrt{2} \ .$$

En consecuencia, la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma

$$\textbf{(7)} \qquad y(t) = c_1e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2e^{(-1-\sqrt{2})t} \ .$$

Para determinar la solución específica que satisface las condiciones iniciales dadas en (6), primero derivamos la y dada en (7) y luego sustituimos y y y' en las condiciones iniciales de (6), obteniendo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1e^0 + c_2e^0 \ , \\ y'(0) &= \left(-1 + \sqrt{2}\right)c_1e^0 + \left(-1 - \sqrt{2}\right)c_2e^0 \ , \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \ , \\ -1 &= \left(-1 + \sqrt{2}\right)c_1 + \left(-1 - \sqrt{2}\right)c_2 \ . \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se tiene $c_1 = -\sqrt{2}/4$ y $c_2 = \sqrt{2}/4$. Así,

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\left(-1+\sqrt{2}\right)t} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\left(-1-\sqrt{2}\right)t}$$

es la solución deseada. ■

Para comprender mejor el significado de la forma de solución (5) con dos parámetros, necesitamos analizar algunas propiedades de la ecuación de segundo orden (2). En primer lugar, existe un teorema de existencia y unicidad para las soluciones a (2), similar al correspondiente teorema 1 de la sección 1.2 para las ecuaciones de primer orden, aunque modificado para indicar el hecho de que se necesitan *dos* condiciones iniciales para las ecuaciones de *segundo* orden. Como motivación para el teorema, supongamos que la ecuación diferencial (2) es *realmente sencilla*, con $b = 0$ y $c = 0$. Entonces $y'' = 0$ diría que la gráfica de $y(t)$ no es más que una *línea recta*, de modo que queda determinada de manera única al especificar un punto de la recta,

(8) $$y(t_0) = Y_0 \ ,$$

y la pendiente de la recta,

(9) $$y'(t_0) = Y_1 \ .$$

El teorema 1 establece que las condiciones (8) y (9) bastan para determinar la solución de manera única para la ecuación más general (2).

EXISTENCIA Y UNICIDAD: CASO HOMOGÉNEO

Teorema 1. Para cualesquiera números reales a, b, c, t_0, Y_0 y Y_1, existe una única solución del problema con valores iniciales

(10) $$ay'' + by' + cy = 0 \ ; \qquad y(t_0) = Y_0 \ , \quad y'(t_0) = Y_1 \ .$$

La solución es válida para todo t en $(-\infty, +\infty)$.

Observe que, en particular, si una solución $y(t)$ y su derivada se anulan en forma simultánea, entonces $y(t)$ debe ser la solución idénticamente nula.

En esta sección y la siguiente construiremos soluciones explícitas de (10), de modo que la cuestión de *existencia* de una solución no constituye en realidad un problema. Sin embargo,

es muy importante saber que la solución es *única*. La demostración de la unicidad es un tanto distinta al resto del capítulo, por lo que la pospondremos para el capítulo 13.*

Ahora queremos usar este teorema para mostrar que, dadas dos soluciones, $y_1(t)$ y $y_2(t)$, de la ecuación (2), siempre podemos encontrar valores de c_1 y c_2 tales que $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ cumplan las condiciones iniciales dadas en (10), y por tanto sea la única solución del problema con valores iniciales. Pero necesitamos ser un poco más precisos; si, por ejemplo, $y_2(t)$ no es más que la solución idénticamente nula, entonces $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1y_1(t)$ tiene en realidad sólo *una* constante y no puede esperarse que satisfaga *dos* condiciones. Además, si $y_2(t)$ es sólo un múltiplo constante de $y_1(t)$, digamos, $y_2(t) = \kappa y_1(t)$, entonces de nuevo $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = (c_1 + \kappa c_2)y_1(t) = Cy_1(t)$ tiene en realidad una sola constante. La condición que necesitamos es la *independencia lineal*.

INDEPENDENCIA LINEAL DE DOS FUNCIONES

Definición 1. Un par de soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son **linealmente independientes en el intervalo *I*** si y sólo si ninguna de ellas es un múltiplo constante de la otra en *I*.† Decimos que y_1 y y_2 son **linealmente dependientes en *I*** si una de ellas *es* un múltiplo constante (incluyendo al cero) de la otra en *I*.

REPRESENTACIÓN DE LAS SOLUCIONES A UN PROBLEMA CON VALORES INICIALES

Teorema 2. Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos soluciones cualesquiera a la ecuación diferencial (2), linealmente independientes en un intervalo *I* que contenga a t_0, entonces se pueden determinar constantes únicas c_1 y c_2 tales que $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ satisfaga el problema con valores iniciales (10) en *I*.

Será sencillo demostrar el teorema 2, una vez establecido el siguiente lema técnico.

UNA CONDICIÓN PARA LA DEPENDENCIA LINEAL DE LAS SOLUCIONES

Lema 1. Para cualesquiera números reales $a(\neq 0)$, b y c, si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial (2) en un intervalo *I* y se cumple la igualdad

(11) $$y_1(\tau)y'_2(\tau) - y'_1(\tau)y_2(\tau) = 0$$

en *cualquier* punto τ de *I*, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes en *I*. (La expresión del lado izquierdo de (11) se llama el *Wronskiano* de y_1 y y_2 en el punto τ; véase el problema 34).

---

*Todas las referencias a los capítulos 11-13 se refieren al texto ampliado *Fundamentos de las ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, cuarta edición.

†Esta definición se generaliza a tres o más funciones en el problema 39 y el capítulo 6.

Demostración del lema 1. *Caso 1*. Si $y_1(\tau) \neq 0$, hagamos κ igual a $y_2(\tau)/y_1(\tau)$ y consideremos la solución a (2) dada por $y(t) = \kappa y_1(t)$. Ésta satisface las mismas "condiciones iniciales" en $t = \tau$ que $y_2(t)$:

$$y(\tau) = \frac{y_2(\tau)}{y_1(\tau)} y_1(\tau) = y_2(\tau) \ ; \qquad y'(\tau) = \frac{y_2(\tau)}{y_1(\tau)} y_1'(\tau) = y_2'(\tau) \ ,$$

donde la última igualdad es consecuencia de (11). Por unicidad, $y_2(t)$ debe ser la misma función que $\kappa y_1(t)$ en I.

Caso 2. Si $y_1(\tau) = 0$ pero $y_1'(\tau) \neq 0$, entonces (11) implica que $y_2(\tau) = 0$. Sea $\kappa = y_2'(\tau)/y_1'(\tau)$. Entonces la solución a (2) dada por $y(t) = \mathrm{k}y_1(t)$ (de nuevo) satisface las mismas "condiciones iniciales" en $t = \tau$ que $y_2(t)$:

$$y(\tau) = \frac{y_2'(\tau)}{y_1'(\tau)} y_1(\tau) = 0 = y_2(\tau) \ ; \qquad y'(\tau) = \frac{y_2'(\tau)}{y_1'(\tau)} y_1'(\tau) = y_2'(\tau) \ .$$

Por unicidad, $y_2(t) = \kappa y_1(t)$ en I.

Caso 3. Si $y_1(\tau) = y_1'(\tau) = 0$, entonces $y_1(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (2) que satisface las condiciones iniciales $y_1(\tau) = y_1'(\tau) = 0$; pero $y(t) \equiv 0$ es la *única* solución a este problema con valores iniciales. Así, $y_1(t) \equiv 0$, que es un múltiplo constante de $y_2(t)$.

Demostración del teorema 2. Ya sabemos que $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ es una solución de (2), así que debemos mostrar que podemos elegir c_1 y c_2 de modo que

$$y(t_0) = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = Y_0$$

y

$$y'(t_0) = c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = Y_1 \ .$$

Pero un sencillo procedimiento algebraico muestra que estas ecuaciones tienen la solución†

$$c_1 = \frac{Y_0 y_2'(t_0) - Y_1 y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{Y_1 y_1(t_0) - Y_0 y_1'(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

siempre que el denominador no se anule; el lema técnico nos garantiza que se cumple esta condición. ■

Ahora podemos decir que si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de (2) en $(-\infty, +\infty)$, entonces (5) es una **solución general**, ya que *cualquier* solución $y_g(t)$ de (2) se puede expresar de esta forma: basta elegir c_1 y c_2 de modo que $c_1 y_1 + c_2 y_2$ concuerden con el valor de y_g y de su derivada *en un punto cualquiera*. Por unicidad, $c_1 y_1 + c_2 y_2$ y y_g deben ser la misma función. Ver figura 4.6.

¿Cómo *determinar* una solución general para la ecuación diferencial (2)? Ya conocemos la respuesta si las raíces de la ecuación auxiliar (3) son reales y distintas, pues claramente $y_1(t) = e^{r_1 t}$ no es un múltiplo constante de $y_2(t) = e^{r_2 t}$ si $r_1 \neq r_2$.

†Por ejemplo, para despejar c_1, se multiplica la primera ecuación por $y'_2(t_0)$, la segunda por $y_2(t_0)$ y se restan.

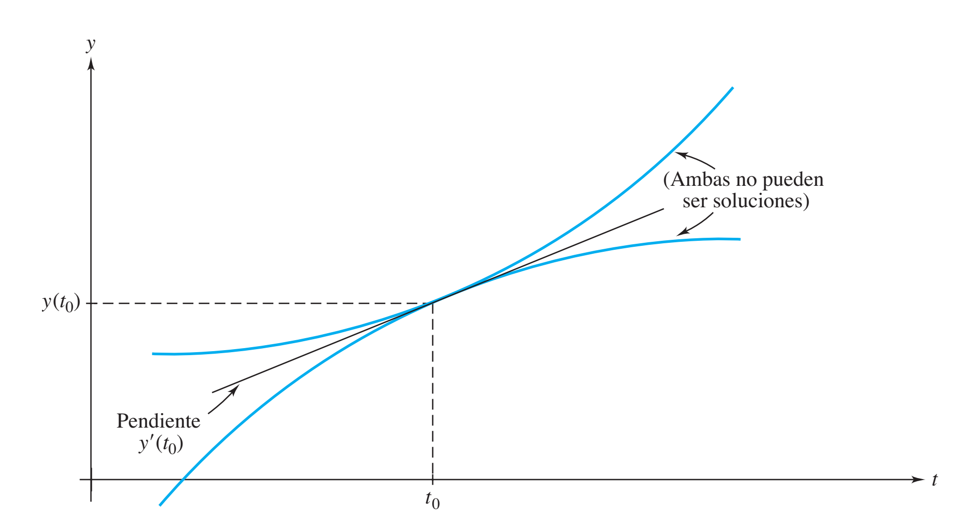


Figura 4.6 $y(t_0)$, $y'(t_0)$ determinan una única solución.

RAÍCES REALES DISTINTAS

Si la ecuación auxiliar (3) tiene raíces reales distintas r_1 y r_2, entonces $y_1(t) = e^{r_1 t}$ y $y_2(t) = e^{r_2 t}$ son soluciones de (2) y $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ es una solución general.

Cuando las raíces de la ecuación auxiliar son iguales, sólo obtenemos una solución no trivial, $y_1 = e^{rt}$. Para satisfacer *dos* condiciones iniciales, $y(t_0)$ y $y'(t_0)$, debemos obtener una segunda solución linealmente independiente. La siguiente regla es la clave para obtener esa segunda solución.

RAÍCES REPETIDAS

Si la ecuación auxiliar (3) tiene una raíz repetida r, entonces $y_1(t) = e^{rt}$ y $y_2(t) = te^{rt}$ son soluciones de (2) y $y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt}$ es una solución general.

Ilustraremos este resultado antes de dar su demostración.

EJEMPLO 3 Determinar una solución del problema con valores iniciales

(12) $$y'' + 4y' + 4y = 0 \ , \qquad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 3 \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar para (12) es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0 \ .$$

Como $r = -2$ es una raíz doble, (12) debe tener soluciones $y_1 = e^{-2t}$ y $y_2 = te^{-2t}$; confirmemos que $y_2(t)$ es una solución:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= te^{-2t} \ , \\ y_2'(t) &= e^{-2t} - 2te^{-2t} \ , \\ y_2''(t) &= -2e^{-2t} - 2e^{-2t} + 4te^{-2t} = -4e^{-2t} + 4te^{-2t} \ , \\ y_2'' + 4y_2' + 4y_2 &= -4e^{-2t} + 4te^{-2t} + 4(e^{-2t} - 2te^{-2t}) + 4te^{-2t} = 0 \ . \end{aligned}$$

Observe además que e^{-2t} y te^{-2t} son linealmente independientes, pues ninguna es múltiplo de la otra en $(-\infty, \infty)$. Por último, sustituimos la solución general $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$ en las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1e^0 + c_2(0)e^0 = 1 \ , \\ y'(0) &= -2c_1e^0 + c_2e^0 - 2c_2(0)e^0 = 3 \ , \end{aligned}$$

y resolvemos las ecuaciones para ver que $c_1 = 1$, $c_2 = 5$. Así, $y = e^{-2t} + 5te^{-2t}$ es la solución deseada. ■

¿Por qué ocurre que $y_2(t) = te^{rt}$ es solución de la ecuación diferencial (2) cuando r es una raíz doble y no en otros casos? En capítulos posteriores veremos una justificación teórica de esta regla en circunstancias muy generales; sin embargo, por el momento sólo veremos qué ocurre si sustituimos y_2 en la ecuación diferencial (2):

$$\begin{aligned} y_2(t) &= te^{rt} \ , \\ y_2'(t) &= e^{rt} + rte^{rt} \ , \\ y_2''(t) &= re^{rt} + re^{rt} + r^2te^{rt} = 2re^{rt} + r^2te^{rt} \ , \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 &= \left[2ar + b\right]e^{rt} + \left[ar^2 + br + c\right]te^{rt} \ . \end{aligned}$$

Ahora, si r es una raíz de la ecuación auxiliar (3), la expresión en el segundo corchete se anula. Sin embargo, *si r es una raíz doble, la expresión en el primer corchete también se anula*:

$$\textbf{(13)} \qquad r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm (0)}{2a} \ ,$$

por tanto, $2ar + b = 0$ para una raíz doble. En tal caso, y_2 es una solución.

El método descrito para resolver las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes se aplica a cualquier ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes (incluso de primer orden). En el capítulo 6 estudiaremos con detalle las ecuaciones de orden superior. Por el momento nos conformaremos con ilustrar el método mediante un ejemplo. Observemos que una ecuación lineal homogénea de orden n tiene una solución general de la forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t) \ ,$$

donde las soluciones individuales $y_i(t)$ son "linealmente independientes", lo que significa que y_i se puede expresar como combinación lineal de las demás; véase el problema 39.

EJEMPLO 4 Determinar una solución general de

$$\textbf{(14)} \qquad y''' + 3y'' - y' - 3y = 0 \ .$$

SOLUCIÓN Si tratamos de hallar soluciones de la forma $y = e^{rt}$, entonces, como con las ecuaciones de segundo orden, debemos hallar las raíces de la ecuación auxiliar

(15) $$r^3 + 3r^2 - r - 3 = 0 \ .$$

Observemos que $r = 1$ es una raíz de la ecuación anterior; al dividir el polinomio del lado izquierdo de (15) entre $r - 1$ obtenemos la factorización

$$(r - 1)(r^2 + 4r + 3) = (r - 1)(r + 1)(r + 3) = 0 \ .$$

Por tanto, las raíces de la ecuación auxiliar son 1, -1 y -3, de modo que tres soluciones de (14) son e^t, e^{-t} y e^{-3t}. La independencia lineal de estas tres funciones exponenciales se demuestra en el problema 40. Así, una solución general de (14) es

(16) $$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{-3t}$$ ■

Hasta ahora sólo hemos analizado las soluciones exponenciales de una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Tal vez usted se haya preguntado dónde están las soluciones vibratorias que controlan a los osciladores masa-resorte. En la siguiente sección veremos que éstas surgen cuando las soluciones de la ecuación auxiliar son complejas.

EJERCICIOS 4.2

En los problemas 1-12, halle una solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - y' - 2y = 0$
3. $y'' + 8y' + 16y = 0$
4. $y'' + 6y' + 9y = 0$
5. $z'' + z' - z = 0$
6. $y'' - 5y' + 6y = 0$
7. $2u'' + 7u' - 4u = 0$
8. $6y'' + y' - 2y = 0$
9. $y'' - y' - 11y = 0$
10. $4y'' - 4y' + y = 0$
11. $4w'' + 20w' + 25w = 0$
12. $3y'' + 11y' - 7y = 0$

En los problemas 13-20, resuelva el problema con valores iniciales dados.

13. $y'' + 2y' - 8y = 0 \ ; \quad y(0) = 3 \ , \ y'(0) = -12$
14. $y'' + y' = 0 \ ; \quad y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 1$
15. $y'' + 2y' + y = 0 \ ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -3$
16. $y'' - 4y' + 3y = 0 \ ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1/3$
17. $z'' - 2z' - 2z = 0 \ ; \quad z(0) = 0 \ , \ z'(0) = 3$
18. $y'' - 6y' + 9y = 0 \ ; \quad y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 25/3$
19. $y'' - 4y' - 5y = 0 \ ; \quad y(-1) = 3 \ , \ y'(-1) = 9$
20. $y'' - 4y' + 4y = 0 \ ; \quad y(1) = 1 \ , \ y'(1) = 1$

21. Ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes.
(a) Sustituya $y = e^{rt}$ y determine la ecuación auxiliar para la ecuación lineal de primer orden
$$ay' + by = 0 \ ,$$
donde a y b son constantes, con $a \neq 0$.
(b) Use el resultado de la parte (a) para determinar la solución general.

En los problemas 22-25, use el método descrito en el problema 21 para determinar una solución general de la ecuación dada.

22. $3y' - 7y = 0$
23. $5y' + 4y = 0$
24. $3z' + 11z = 0$
25. $6w' - 13w = 0$

26. Problemas con valores en la frontera. Si se especifican los valores de una solución a una ecuación diferencial en dos puntos distintos, estas condiciones se llaman **condiciones en la frontera**. (En contraste, las condiciones iniciales especifican los valores de una función y su derivada en el mismo punto). La finalidad de este ejercicio es mostrar que los problemas con valores en la frontera no tienen un teorema de existencia y unicidad similar al teorema 1. Dado que toda solución de

(17) $$y'' + y = 0$$

tiene la forma

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, muestre que

(a) Existe una única solución de (17) que satisface las condiciones en la frontera $y(0) = 2$ y $y(\pi/2) = 0$.

(b) No existe una solución de (17) que satisfaga $y(0) = 2$ y $y(\pi) = 0$.

(c) Existe una infinidad de soluciones de (17) que satisfacen $y(0) = 2$ y $y(\pi) = -2$.

En los problemas 27-32, use la definición 1 para determinar si las funciones y^1 *y* y^2 *son linealmente independientes en el intervalo* (0,1).

27. $y_1(t) = e^{-t}\cos 2t \ ; \ y_2(t) = e^{-t}\operatorname{sen} 2t$

28. $y_1(t) = e^{3t} \ ; \ y_2(t) = e^{-4t}$

29. $y_1(t) = te^{2t} \ ; \ y_2(t) = e^{2t}$

30. $y_1(t) = t^2\cos(\ln t) \ ; \ y_2(t) = t^2\operatorname{sen}(\ln t)$

31. $y_1(t) = \tan^2 t - \sec^2 t \ ; \ y_2(t) = 3$

32. $y_1(t) \equiv 0 \ ; \ y_2(t) = e^t$

33. Sean y_1 y y_2 dos funciones definidas en $(-\infty, \infty)$.

(a) Cierto o falso: Si y_1 y y_2 son linealmente dependientes en el intervalo $[a,b]$, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes en un intervalo menor $[c, d] \subset [a, b]$.

(b) Cierto o falso: Si y_1 y y_2 son linealmente dependientes en el intervalo $[a,b]$, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes en un intervalo mayor $[C, D] \supset [a, b]$.

34. Wronskiano. Para cualesquiera dos funciones diferenciables y_1 y y_2, la función

$$\textbf{(18)} \qquad \boldsymbol{W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)}$$

se llama el *wronskiano*† de y_1 y y_2. Esta función juega un papel crucial en la demostración del teorema 2.

(a) Muestre que $W[y_1,y_2]$ se puede expresar de manera conveniente como el determinante 2×2

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \ .$$

(b) Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ un par de soluciones de la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ (con $a \neq 0$) en un intervalo abierto I. Demuestre que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son linealmente independientes en I si y sólo si su wronskiano nunca se anula en I. [*Sugerencia*: Esto sólo es una reformulación del lema 1].

(c) Muestre que si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son cualesquiera dos funciones diferenciables linealmente dependientes en I, entonces su wronskiano es idénticamente nulo en I.

35. Sean $y_1(t) = t^3$ y $y_2(t) = |t^3|$. ¿Son y_1 y y_2 linealmente independientes en los siguientes intervalos?

(a) $(0, \infty)$, **(b)** $(-\infty, 0)$, **(c)** $(-\infty, \infty)$.

(d) Calcule el wronskiano (véase el problema 34) de estas dos funciones en $(-\infty, \infty)$. ¿Por qué su respuesta no contradice la parte (b) del problema 34?

36. Realice los pasos siguientes para demostrar que el wronskiano (véase el problema 34) de cualesquiera dos soluciones y_1, y_2 de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ está dada por la **fórmula de Abel**

$$\boldsymbol{W[y_1, y_2](t) = Ce^{-bt/a}} \ , \qquad t \text{ en } (-\infty, \infty) \ ,$$

donde la constante C depende de y_1 y y_2.

(a) Muestre que el wronskiano W satisface la ecuación $aW' + bW = 0$.

(b) Resuelva la ecuación de primer orden en la parte (a).

37. Use la fórmula de Abel del problema 36 para explicar por qué el wronskiano de cualquier par de soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ es idénticamente nulo o bien nunca se anula en $(-\infty, \infty)$.

38. Explique por qué dos funciones son linealmente dependientes en un intervalo I si y sólo si existen constantes c_1 y c_2, *no ambos nulos*, tales que

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = 0 \qquad \text{para toda } t \text{ en } I \ .$$

39. Dependencia lineal de tres funciones. Tres funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ y $y_3(t)$ son linealmente dependientes en un intervalo I si, en dicho intervalo, al menos una de estas funciones es combinación lineal de las otras dos [por ejemplo, si $y_1(t) = c_1y_2(t) + c_2y_2(t)$]. En forma equivalente (compare el problema 38), y_1, y_2 y y_3 son linealmente dependientes en I si existen constantes C_1, C_2 y C_3, *no todas nulas*, tales que

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + C_3y_3(t) = 0 \quad \text{para toda } t \text{ en } I.$$

En caso contrario, decimos que estas funciones son linealmente independientes en I.

†***Nota histórica***: El wronskiano recibe el nombre del matemático polaco H. Wronski (1778-1863).

Para cada uno de los siguientes incisos, determine si las tres funciones dadas son linealmente dependientes o independientes en $(-\infty, \infty)$:

(a) $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$, $y_3(t) = t^2$.
(b) $y_1(t) = -3$, $y_2(t) = 5\,\text{sen}^2 t$, $y_3(t) = \cos^2 t$
(c) $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$, $y_3(t) = t^2e^t$
(d) $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = \cosh t$

40. Use la definición en el problema 39 y demuestre que si r_1, r_2 y r_3 son números reales distintos, entonces las funciones e^{r_1t}, e^{r_2t} y e^{r_3t} son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. [*Sugerencia*: Suponga lo contrario, es decir, que $e^{r_1t} = c_1e^{r_2t} + c_2e^{r_3t}$ para todo t. Divida entre e^{r_2t} para obtener $e^{(r_1-r_2)t} = c_1 + c_2e^{(r_3-r_2)t}$ y luego derive para deducir que $e^{(r_1-r_2)t}$ y $e^{(r_3-r_2)t}$ son linealmente dependientes, lo que es una contradicción. (¿Por qué?)].

En los problemas 41-46, determine tres soluciones linealmente independientes (véase el problema 39) de la ecuación diferencial de tercer orden dada y escriba una solución general como combinación lineal de éstas.

41. $y''' + y'' - 6y' + 4y = 0$

42. $y''' - 6y'' - y' + 6y = 0$

43. $z''' + 2z'' - 4z' - 8z = 0$

44. $y''' - 7y'' + 7y' + 15y = 0$

45. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

46. $w''' + w'' - 4w' + 2w = 0$

47. Resuelva el problema con valores iniciales

$$y''' - y' = 0\ ; \quad y(0) = 2\ ,$$
$$y'(0) = 3\ , \quad y''(0) = -1$$

48. Resuelva el problema con valores iniciales

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0\ ;$$
$$y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 3\ ,\ y''(0) = 5\ .$$

49. Use el método de Newton u otro procedimiento numérico para aproximar las raíces de la ecuación auxiliar y determine soluciones generales de las siguientes ecuaciones:

(a) $3y''' + 18y'' + 13y' - 19y = 0$.
(b) $y^{\text{iv}} - 5y'' + 5y = 0$.
(c) $y^{\text{v}} - 3y^{\text{iv}} - 5y''' + 15y'' + 4y' - 12y = 0$.

4.3 ECUACIONES AUXILIARES CON RAÍCES COMPLEJAS

La *ecuación armónica simple* $y'' + y = 0$, que recibe este nombre por su relación con la vibración fundamental de un tono musical, tiene como soluciones $y_1(t) = \cos t$ y $y_2(t) = \text{sen}\, t$. Observe, sin embargo, que la ecuación auxiliar asociada a la ecuación armónica es $r^2 + 1 = 0$, que tiene raíces imaginarias $r = \pm i$, donde i denota $\sqrt{-1}$.[†] En la sección anterior expresamos las soluciones de una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes en términos de funciones exponenciales. Parecería entonces que es posible atribuir un significado a las formas e^{it} y e^{-it} y que estas "funciones" estarían relacionadas con $\cos t$ y $\text{sen}\, t$. Esta concordancia se logra mediante la fórmula de Euler, analizada en esta sección.

Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces de la ecuación auxiliar

(1) $$ar^2 + br + c = 0$$

asociadas a la ecuación homogénea

(2) $$ay'' + by' + cy = 0$$

[†]Los ingenieros eléctricos utilizan con frecuencia el símbolo j para denotar $\sqrt{-1}$.

son los números complejos conjugados

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad r_2 = \alpha - i\beta \quad \left(i = \sqrt{-1}\right) \ ,$$

donde α, β son los números reales

(3) $$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \ .$$

Como en la sección anterior, quisiéramos garantizar que las funciones $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ son soluciones de la ecuación (2). Esto es cierto, aunque antes de mostrarlo debemos enfrentar ciertas cuestiones fundamentales. Por ejemplo, si $r_1 = \alpha + i\beta$ es un número complejo, debemos aclarar qué entendemos por la expresión $e^{(\alpha+i\beta)t}$. Si suponemos que las leyes de los exponentes se aplican a los números complejos, entonces

(4) $$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} \ .$$

Ahora sólo debemos aclarar el significado de $e^{i\beta t}$.

Para esto, supondremos que la serie de Maclaurin de e^z para los números complejos z es la misma que para los números reales. Como $i^2 = -1$, entonces para θ real tenemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \ . \end{aligned}$$

Ahora, recordemos la serie de Maclaurin para $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \ ,$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots \ .$$

Reconocemos estos desarrollos en la serie propuesta para $e^{i\theta}$ y hacemos la identificación

(5) $$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \ ,$$

que se conoce como **fórmula de Euler**.†

Al usar la fórmula de Euler (con $\theta = \beta t$) en la ecuación (14) tenemos

(6) $$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) \ ,$$

que expresa la función compleja $e^{(\alpha+i\beta)t}$ en términos de funciones reales conocidas. Al dar sentido a $e^{(\alpha+i\beta)t}$, podemos mostrar ahora (problema 30) que

(7) $$\frac{d}{dt}e^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} \ ,$$

†***Nota histórica:*** Esta fórmula apareció por vez primera en la obra monumental de dos volúmenes *Introduction in Analysin Infinitorum* (1748) de Leonhard Euler.

y al elegir α y β como en (3), tenemos que la función compleja $e^{(\alpha + i\beta)t}$ es en realidad una solución de la ecuación (2), al igual que $e^{(\alpha - i\beta)t}$; así, la solución general está dada por

(8)
$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t} \\ &= c_1 e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t) \ . \end{aligned}$$

El ejemplo 1 muestra que, en general, las constantes c_1 y c_2 que aparecen en (8) para un problema con valores iniciales dado son complejas.

EJEMPLO 1 Usar la solución general (8) para resolver el problema con valores iniciales

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 2r + 2 = 0$, con raíces

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i \ .$$

Por tanto, si $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, una solución general está dada por

$$y(t) = c_1 e^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) + c_2 e^{-t}(\cos t - i \operatorname{sen} t) \ .$$

Para las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 e^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) + c_2 e^0(\cos 0 - i \operatorname{sen} 0) = c_1 + c_2 = 0 \ , \\ y'(0) &= -c_1 e^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) + c_1 e^0(-\operatorname{sen} 0 + i \cos 0) \\ &\quad -c_2 e^0(\cos 0 - i \operatorname{sen} 0) + c_2 e^0(-\operatorname{sen} 0 - i \cos 0) \\ &= (-1 + i)c_1 + (-1 - i)c_2 \\ &= 2 \ . \end{aligned}$$

Como resultado, $c_1 = -i$, $c_2 = i$ y $y(t) = -ie^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) + ie^{-t}(\cos t - i \operatorname{sen} t)$, o simplemente $2e^{-t} \operatorname{sen} t$. ■

La forma final de la respuesta en el ejemplo 1 sugiere que busquemos una pareja alternativa de soluciones de la ecuación diferencial (2) que no necesite de la aritmética compleja, lo que haremos a continuación.

En general, si $z(t)$ es una función con valores complejos que depende de la variable real t, podemos escribir $z(t) = u(t) + iv(t)$, donde $u(t)$ y $v(t)$ son funciones con valores reales. Las derivadas de $z(t)$ están dadas entonces por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt} \ , \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + i\frac{d^2v}{dt^2} \ .$$

El siguiente lema muestra que la solución con valores complejos $e^{(\alpha + i\beta)t}$ da lugar a dos soluciones linealmente independientes *con valores reales*.

SOLUCIONES REALES OBTENIDAS A PARTIR DE SOLUCIONES COMPLEJAS

Lema 2. Sea $z(t) = u(t) + iv(t)$ una solución de la ecuación (2), donde a, b y c son números reales. Entonces la parte real $u(t)$ y la parte imaginaria $v(t)$ son soluciones de (2) con valores reales.†

Demostración. Por hipótesis, $az'' + bz' + cz = 0$, de donde

$$a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) = 0 \ ,$$
$$(au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) = 0 \ .$$

Pero un número complejo se anula si y sólo si sus partes real e imaginaria se anulan. Así, debemos tener

$$au'' + bu' + cu = 0 \quad \text{y} \quad av'' + bv' + cv = 0 \ ,$$

lo que significa que $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones con valores reales de (2). ■

Al aplicar el lema 2 a la solución

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + ie^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \ ,$$

obtenemos lo siguiente.

RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS

Si la ecuación auxiliar tiene raíces complejas conjugadas $\alpha \pm i\beta$, entonces dos soluciones linealmente independientes de (2) son

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{y} \quad e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \ ,$$

y una solución general es

$$\textbf{(9)} \qquad \boldsymbol{y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t} \ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

En el análisis anterior estudiamos algunos detalles importantes relativos a los números complejos y las funciones con valores complejos. En particular, se requiere otro análisis para justificar el uso de las leyes de los exponentes, la fórmula de Euler e incluso del hecho de que la derivada de e^{rt} es re^{rt} cuando r es una constante compleja.†† Si no se siente a gusto con nuestras conclusiones, le pedimos que sustituya la expresión (9) en la ecuación (2) para verificar que realmente es una solución.

†La demostración dejará claro que esta propiedad es válida para cualquier ecuación diferencial lineal homogénea cuyos coeficientes tengan valores reales.

††Un tratamiento detallado de estos temas aparece, por ejemplo, en *Fundamentals of Complex Analysis*, tercera edición, por E. B. Saff y A. D. Snider (Prentice Hall, Upper Saddle River, Nueva Jersey, 2003).

Tal vez se pregunte qué habría pasado al trabajar con la función $e^{(\alpha - i\beta)t}$ en vez de $e^{(\alpha + i\beta)t}$. Dejaremos como ejercicio verificar que $e^{(\alpha - i\beta)t}$ da lugar a la misma solución general (9).

EJEMPLO 2 Determinar una solución general de

(10) $$y'' + 2y' + 4y = 0 \ .$$

La ecuación auxiliar es

SOLUCIÓN

$$r^2 + 2r + 4 = 0 \ ,$$

con raíces

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} \ .$$

Por tanto, con $\alpha = -1, \beta = \sqrt{3}$, una solución general de (10) es

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right) \ . \ \blacksquare$$

Cuando la ecuación auxiliar tiene raíces complejas conjugadas, las soluciones (reales) oscilan con valores positivos y negativos. Este tipo de comportamiento se observa en los resortes.

EJEMPLO 3 En la sección 4.1 analizamos la mecánica del oscilador masa-resorte (figura 4.1, página 152) y vimos que la segunda ley de Newton implica que la posición $y(t)$ de la masa m queda descrita mediante la ecuación diferencial de segundo orden

(11) $$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0 \ ,$$

donde los términos se identifican físicamente como

$$[\text{inercia}]y'' + [\text{amortiguamiento}]y' + [\text{rigidez}]y = 0$$

Determinar la ecuación de movimiento de un sistema de resorte cuando $m = 36$ kg, $b = 12$ kg/seg (que es equivalente a 12 N-seg/m), $k = 37$ kg/seg^2, $y(0) = 0.7$ m y $y'(0) = 0.1$ m/seg. Hallar también $y(10)$, el desplazamiento después de 10 segundos.

SOLUCIÓN La ecuación de movimiento está dada por $y(t)$, la solución del problema con valores iniciales para los valores dados por $m, b, k, y(0)$ y $y'(0)$. Es decir, buscamos la solución a

(12) $$36y'' + 12y' + 37y = 0 \ , \qquad y(0) = 0.7 \ , \ y'(0) = 0.1 \ .$$

La ecuación auxiliar para (12) es

$$36r^2 + 12r + 37 = 0 \ ,$$

con raíces

$$r = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(36)(37)}}{72} = \frac{-12 \pm 12\sqrt{1 - 37}}{72} = -\frac{1}{6} \pm i \ .$$

Por tanto, con $\alpha = -1/6, \beta = 1$, el desplazamiento $y(t)$ se puede expresar en la forma

(13) $$y(t) = c_1 e^{-t/6}\cos t + c_2 e^{-t/6}\operatorname{sen} t \ .$$

Podemos hallar c_1 y c_2 sustituyendo $y(t)$ y $y'(t)$ en las condiciones iniciales dadas en (12). Al derivar (13) obtenemos una fórmula para $y'(t)$:

$$y'(t) = \left(-\frac{c_1}{6} + c_2\right)e^{-t/6}\cos t + \left(-c_1 - \frac{c_2}{6}\right)e^{-t/6}\operatorname{sen} t \ .$$

Al sustituir en las condiciones iniciales, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.7 \ , \\ -\frac{c_1}{6} + c_2 &= 0.1 \ . \end{aligned}$$

Al resolver, vemos que $c_1 = 0.7$ y $c_2 = 1.3/6$. Con estos valores, la ecuación de movimiento se convierte en

$$y(t) = 0.7e^{-t/6}\cos t + \frac{1.3}{6}e^{-t/6}\operatorname{sen} t \ ,$$

y

$$y(10) = 0.7e^{-5/3}\cos 10 + \frac{1.3}{6}e^{-5/3}\operatorname{sen} 10 \approx -0.13 \text{ m.} \ \blacksquare$$

Del ejemplo 3 vemos que *cualquier* ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = 0$ se puede interpretar como la descripción de un sistema masa-resorte con masa a, coeficiente de amortiguamiento b, rigidez del resorte c y desplazamiento y, si estas constantes tienen un sentido físico; es decir, si a es positiva y b, c son no negativas. Nuestro análisis en la sección 4.1 y las bases físicas sugieren que veremos soluciones oscilatorias amortiguadas en este caso. Esto es consistente con la ecuación (9). Con $a = m$ y $c = k$, la tasa de decaimiento exponencial α es igual a $-b/(2m)$ y la frecuencia angular β es igual a $\sqrt{4mk-b^2}/(2m)$, debido a la ecuación (3).

Así, es un poco sorprendente que las soluciones de la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$ *no* oscilen; la solución general apareció en el ejemplo 3 de la sección 4.2 (página 163) como $c_1e^{-2t} + c_2e^{-t2t}$. El significado físico de esto es simplemente que cuando el coeficiente de amortiguamiento b es muy alto, la fricción resultante evita la oscilación de la masa. En vez de pasar por el punto de equilibrio del resorte, sólo se asienta poco a poco. Esto podría ocurrir si una masa ligera y un resorte débil se sumergen en un fluido viscoso.

La fórmula anterior para la frecuencia de oscilación β muestra que no hay oscilaciones para $b > \sqrt{4mk}$. Este fenómeno de *sobreamortiguamiento* se analiza con detalle en la sección 4.8.

Es muy revelador contemplar las predicciones de la analogía masa-resorte cuando los coeficientes b y c en la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ son *negativos*.

EJEMPLO 4 Interpretar la ecuación

(14) $$36y'' - 12y' + 37y = 0$$

en términos del sistema masa-resorte.

SOLUCIÓN La ecuación (14) es una alteración menor de la ecuación (12) en el ejemplo 3; la ecuación auxiliar $36r^2 - 12r + 37$ tiene raíces $r = (+)\frac{1}{6} \pm i$. Así, su solución general es

$$\textbf{(15)} \qquad y(t) = c_1 e^{+t/6} \cos t + c_2 e^{+t/6} \operatorname{sen} t \ .$$

Al comparar la ecuación (14) con el modelo masa-resorte

$$\textbf{(16)} \qquad [\textbf{inercia}]\boldsymbol{y''} + [\textbf{amortiguamiento}]\boldsymbol{y'} + [\textbf{rigidez}]\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \ ,$$

tenemos un coeficiente de amortiguamiento *negativo* $b = -12$, que da lugar a una fuerza de fricción $F_{\text{fricción}} = -by'$, la cual *imparte* energía al sistema en vez de quitársela. El incremento en energía con el tiempo se traducirá entonces en oscilaciones de cada vez mayor amplitud, de acuerdo con la fórmula (15); una gráfica típica aparece en la figura 4.7. ■

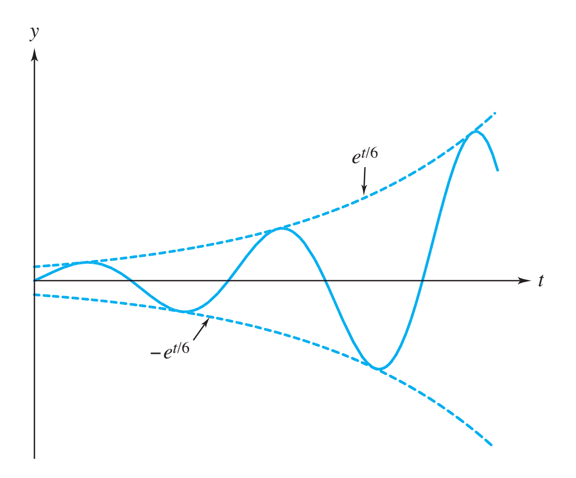


Figura 4.7 Gráfica solución para el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Interpretar la ecuación

$$\textbf{(17)} \qquad y'' + 5y' - 6y = 0$$

en términos del sistema masa-resorte.

SOLUCIÓN Al comparar la ecuación dada con (16), vemos un resorte con una rigidez *negativa* $k = -6$. ¿Qué significa esto? Cuando la masa se aleja del punto de equilibrio del resorte, el resorte *repele* la masa con una fuerza $F_{\text{resorte}} = -ky$ que se intensifica cuando el desplazamiento aumenta. Es claro que el resorte "exilia" a la masa hacia (más o menos) infinito y esperamos que todas las soluciones $y(t)$ tiendan a $\pm\infty$ al aumentar t (excepto la solución de equilibrio $y(t) \equiv 0$).

De hecho, en el ejemplo 1 de la sección 4.2 mostramos que la solución general a la ecuación (17) es

$$\textbf{(18)} \qquad c_1 e^t + c_2 e^{-6t} \ .$$

En realidad, si examinamos las soluciones $y(t)$ que comienzan con un desplazamiento unitario $y(0) = 1$ y velocidad $y'(0) = v_0$, vemos que

$$\textbf{(19)} \qquad y(t) = \frac{6 + v_0}{7} e^{t} + \frac{1 - v_0}{7} e^{-6t} ,$$

y las gráficas de la figura 4.8 confirman nuestra predicción de que todas las soluciones (que no sean de equilibrio) divergen, excepto aquella con $v_0 = -6$.

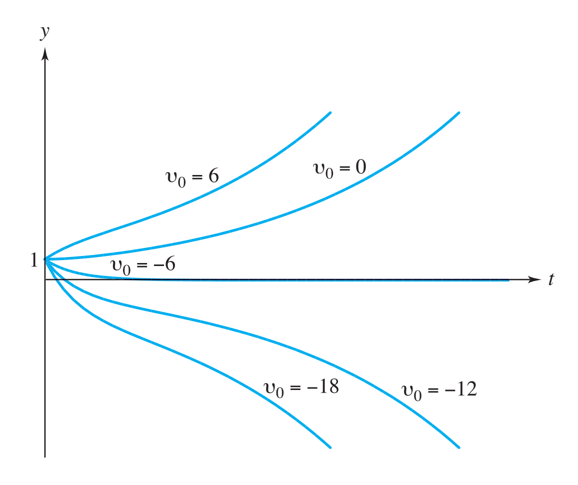


Figura 4.8 Gráficas solución para el ejemplo 4

¿Cuál es el significado físico de esta solución acotada aislada? Es claro que si la masa recibe una velocidad inicial hacia adentro de -6, apenas tendrá la energía suficiente para superar el efecto del resorte que la empuja hacia $+\infty$, pero no la suficiente para cruzar el punto de equilibrio (y ser empujada a $-\infty$). Así, tiende en forma asintótica a la (delicada) posición de equilibrio $y = 0$. ■

En la sección 4.7 veremos que al asumir mayor libertad en la interpretación masa-resorte podremos predecir características cualitativas de ecuaciones más complejas.

En esta sección hemos supuesto que los coeficientes a, b y c de la ecuación diferencial eran números reales. Si ahora permitimos que sean constantes *complejas*, las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar (1) también son complejas en general, aunque no necesariamente conjugadas entre sí. Cuando $r_1 \neq r_2$, una solución general de la ecuación (2) mantiene la forma

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} ,$$

pero c_1 y c_2 son ahora constantes complejas arbitrarias, por lo que debemos recurrir a los arduos cálculos del ejemplo 1.

Observemos también que una ecuación diferencial compleja puede considerarse como un sistema de dos ecuaciones diferenciales reales, pues siempre podemos trabajar por separado con sus partes real e imaginaria. Los sistemas se analizan en los capítulos 5 y 9.

EJERCICIOS 4.3

En los problemas 1-8, la ecuación auxiliar para la ecuación diferencial dada tiene raíces complejas. Determine una solución general.

1. $y'' + 9y = 0$ **2.** $y'' + y = 0$
3. $z'' - 6z' + 10z = 0$ **4.** $y'' - 10y' + 26y = 0$
5. $w'' + 4w' + 6w = 0$ **6.** $y'' - 4y' + 7y = 0$
7. $4y'' - 4y' + 26y = 0$ **8.** $4y'' + 4y' + 6y = 0$

En los problemas 9-20, determine una solución general.

9. $y'' - 8y' + 7y = 0$ **10.** $y'' + 4y' + 8y = 0$
11. $z'' + 10z' + 25z = 0$ **12.** $u'' + 7u = 0$
13. $y'' + 2y' + 5y = 0$ **14.** $y'' - 2y' + 26y = 0$
15. $y'' + 10y' + 41y = 0$ **16.** $y'' - 3y' - 11y = 0$
17. $y'' - y' + 7y = 0$ **18.** $2y'' + 13y' - 7y = 0$
19. $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$ **20.** $y''' - y'' + 2y = 0$

En los problemas 21-27, resuelva el problema con valores iniciales dado.

21. $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 17y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
23. $w'' - 4w' + 2w = 0$; $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$
24. $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
25. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(\pi) = e^{\pi}$, $y'(\pi) = 0$
26. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
27. $y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

28. Para ver el efecto de la variación del parámetro b en el problema con valores iniciales

$$y'' + by' + 4y = 0 \ ; \qquad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \ ,$$

resuelva el problema para $b = 5$, 4 y 2 y bosqueje las soluciones.

29. Determine una solución general de las siguientes ecuaciones de orden superior.

(a) $y''' - y'' + y' + 3y = 0$
(b) $y''' + 2y'' + 5y' - 26y = 0$
(c) $y^{\text{iv}} + 13y'' + 36y = 0$

30. Use la representación para $e^{(\alpha+i\beta)t}$ en (6) y verifique la fórmula de derivación (7).

31. Use la analogía masa-resorte para predecir el comportamiento de la solución al problema con valores iniciales dado, cuando $t \to +\infty$. Luego confirme su predicción resolviendo el problema.

(a) $y'' + 16y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
(b) $y'' + 100y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(c) $y'' - 6y' + 8y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(d) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$
(e) $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

32. Resorte en vibración sin amortiguamiento. Un resorte en vibración con amortiguamiento puede modelarse mediante el problema con valores iniciales (11) del ejemplo 3 haciendo $b = 0$.

(a) Si $m = 10$ kg, $k = 250$ kg/seg^2, $y(0) = 0.3$ m y $y'(0) = -0.1$ m/seg, determine la ecuación de movimiento para este resorte en vibración con amortiguamiento.
(b) Cuando la ecuación de movimiento tiene la forma en (9), se dice que el movimiento es **oscilatorio** con **frecuencia** $\beta/2\pi$. Determine la frecuencia de oscilación para el sistema de resorte de la parte (a).

33. Resorte en vibración con amortiguamiento. Use el modelo de un resorte en vibración con amortiguamiento analizado en el ejemplo 3:

(a) Determine la ecuación de movimiento para el resorte en vibración con amortiguamiento si $m = 10$ kg, $b = 60$ kg/seg, $k = 250$ kg/seg^2, $y(0) = 0.3$ m y $y'(0) = -0.1$ m/seg.
(b) Determine la frecuencia de oscilación para el sistema de resorte de la parte (a). [*Sugerencia*: Véase la definición de frecuencia dada en el problema 32(b)].
(c) Compare los resultados de los problemas 32 y 33 y determine el efecto del amortiguamiento sobre la frecuencia de oscilación. ¿Qué otros efectos tiene sobre la solución?

34. Circuito en serie *RLC*. En el estudio de un circuito eléctrico consistente en una resistencia, un condensador, un inductor y una fuerza electromotriz (véase la figura 4.9 de la página 176), llegamos a un problema con valores iniciales de la forma

$$\textbf{(20)} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E(t) \ ;$$
$$q(0) = q_0 \ ,$$
$$I(0) = I_0 \ ,$$

donde L es la inductancia en henrios, R es la resistencia en ohms, C es la capacidad en faradios, $E(t)$ es la fuerza electromotriz en voltios, $q(t)$ es la carga en coulombs sobre el condensador en el instante t e $I = dq/dt$ es la corriente en amperios. Determine la corriente en el instante t si la carga inicial sobre el condensador es nula, la corriente inicial es nula, $L = 10$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = (6260)^{-1}$ F y $E(t) = 100$ V. [*Sugerencia*: Derive ambos lados de la ecuación diferencial en (20) para obtener una ecuación lineal homogénea de segundo orden para $I(t)$. Luego use (20) para determinar dI/dt en $t = 0$].

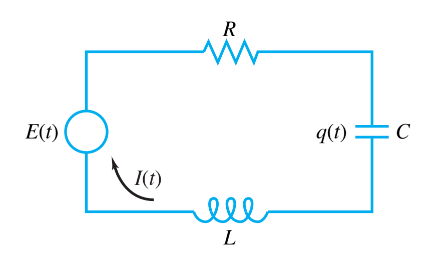


Figura 4.9 Circuito en serie *RLC*

35. Puerta de doble acción. El movimiento de una puerta de doble acción con un tornillo de ajuste que controla la cantidad de fricción sobre las bisagras se representa mediante el problema con valores iniciales

$$I\theta'' + b\theta' + k\theta = 0\ ;\quad \theta(0) = \theta_0\ ,\quad \theta'(0) = v_0\ ,$$

donde θ es el ángulo de apertura de la puerta, I es el momento de inercia de la puerta en torno de sus bisagras, $b > 0$ es una constante de amortiguamiento que varía con la cantidad de fricción sobre la puerta, $k > 0$ es la constante de resorte asociada a la puerta, θ_0 es el ángulo inicial de apertura de la puerta y v_0 es la velocidad angular inicial impartida a la puerta (véase figura 4.10). Si I, k están fijos, determine los valores de b para los que la puerta *no* continuará oscilando al cerrarse.

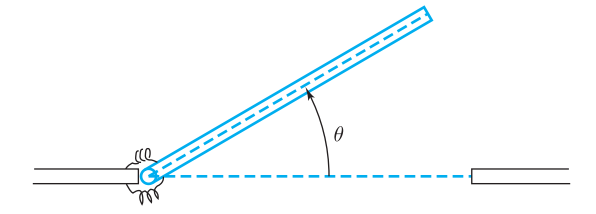


Figura 4.10 Vista superior de una puerta de doble acción

36. Aunque la forma (9) de la solución general real es conveniente, también se puede usar la forma

$$\textbf{(21)}\qquad d_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + d_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$$

para resolver problemas con valores iniciales, como se mostró en el ejemplo 1. Los coeficientes d_1 y d_2 son constantes complejas.

(a) Use la forma (21) para resolver el problema 21. Verifique que su forma es equivalente a la deducida mediante (9).

(b) Muestre que, en general, d_1 y d_2 en (21) deben ser complejos conjugados para que la solución sea real.

37. Las ecuaciones auxiliares para las siguientes ecuaciones diferenciales tienen raíces complejas repetidas. Adapte el procedimiento de "raíces repetidas" de la sección 4.2 para determinar sus soluciones generales:

(a) $y^{\text{iv}} + 2y'' + y = 0$.

(b) $y^{\text{iv}} + 4y''' + 12y'' + 16y' + 16y = 0$. [*Sugerencia:* La ecuación auxiliar es $(r^2 + 2r + 4)^2 = 0$].

38. Ecuaciones de Cauchy-Euler. Una clase importante de ecuaciones diferenciales con coeficientes **variables** son aquellas que pueden expresarse en la forma

$$\textbf{(22)}\qquad ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x)\ ,$$

donde a, b y c son constantes y $y(x)$ es la función incógnita. Tales ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones de Cauchy-Euler o equidimensionales*. El objetivo de este problema es mostrar que la sustitución $x = e^t$ transforma (22) en una ecuación con coeficientes constantes en la nueva variable independiente t.

(a) Use la regla de la cadena para mostrar que para $x = e^t$,

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}\ .$$

(b) Derive la ecuación de la parte (a) con respecto de t para obtener

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}\ .$$

(c) Sustituya las fórmulas de las partes (a) y (b) en la ecuación (22) para obtener el coeficiente constante

$$\textbf{(23)}\qquad a\frac{d^2y}{dt^2} + (b - a)\frac{dy}{dt} + cy = h(e^t)\ .$$

39. Para determinar una solución general de la ecuación de Cauchy-Euler

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \qquad x > 0 \ ,$$

complete los pasos siguientes.

(a) Use la sustitución $x = e^t$ del problema 38 y obtenga de (23) la ecuación con coeficientes constantes

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \ .$$

(b) Muestre que la ecuación de la parte (a) tiene la solución general

$$y(t) = c_1e^{t/3} + c_2e^{-3t} \ .$$

(c) Exprese y en términos de la variable original x para obtener

$$y(x) = c_1x^{1/3} + c_2x^{-3} \text{ para } x > 0 \ .$$

En los problemas 40-44, use la técnica del problema 38 para obtener una solución general de cada una de las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler para $x > 0$.

40. $x^2y''(x) + 7xy'(x) - 7y(x) = 0$

41. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$

42. $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 6y(x) = 0$

43. $x^2y''(x) + 9xy'(x) + 17y(x) = 0$

44. $x^2y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x) = 0$

4.4 ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: EL MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

En esta sección usaremos una "estimación juiciosa" y deduciremos un procedimiento sencillo para determinar una solución de una ecuación lineal *no* homogénea con coeficientes constantes

(1) $$ay'' + by' + cy = f(t) \ ,$$

donde la no homogeneidad $f(t)$ es un único término de un tipo especial. Nuestra experiencia en la sección 4.3 indica que (1) tendrá una infinidad de soluciones. Por el momento nos conformaremos con obtener una solución particular. Para motivar el procedimiento, veamos primero algunos ejemplos ilustrativos.

EJEMPLO 1 Determinar una solución particular de

(2) $$y'' + 3y' + 2y = 3t \ .$$

SOLUCIÓN Necesitamos hallar una función $y(t)$ tal que la combinación $y'' + 3y' + 2y$ sea una función lineal de t, a saber, $3t$. ¿Qué tipo de función y "termina" como una función lineal después de combinar sus derivadas de orden cero, uno y dos? Una respuesta inmediata es *otra función lineal*, así que hacemos la prueba con $y_1(t) = At$ y trataremos de hacer corresponder $y_1'' + 3y_1' + 2y_1$ con $3t$.

Tal vez usted haya notado por qué esto no funciona: $y_1 = At$, $y_1' = A$ y $y_1'' = 0$ implica que

$$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = 3A + 2At \ ,$$

y para que esto sea igual a $3t$, necesitamos que $A = 0$ y que $A = 3/2$. Tendríamos mejor suerte si agregamos un término constante a la función de prueba: $y_2(t) = At + B$. Entonces $y_2' = A$, $y_2'' = 0$ y

$$y_2'' + 3y_2' + 2y_2 = 3A + 2(At + B) = 2At + (3A + 2B) \ ,$$

lo que concuerda exitosamente con $3t$ si $2A = 3$ y $3A + 2B = 0$. Al resolver este sistema tenemos que $A = 3/2$ y $B = -9/4$. Así, la función

$$y_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}$$

es una solución de (2). ■

El ejemplo 1 sugiere el método siguiente para determinar una solución particular de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = Ct^m, \qquad m = 0, 1, 2, \dots ;$$

a saber, proponemos una solución de la forma

$$y_p(t) = A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0 \ ,$$

con coeficientes indeterminados A_j, y hacemos corresponder las potencias de t en $ay'' + by' + cy$ con Ct^m.† Este procedimiento implica resolver $m + 1$ ecuaciones lineales con $m + 1$ incógnitas $A_0, A_1, \dots, A_m$ con la esperanza de que tengan solución. La técnica se llama el **método de coeficientes indeterminados**. Como lo muestra el ejemplo 1, debemos conservar *todas* las potencias $t^m, t^{m-1}, \dots, t^1, t^0$ de la solución de prueba, aunque no estén presentes en la no homogeneidad $f(t)$.

EJEMPLO 2 Determinar una solución particular de

$$\textbf{(3)} \qquad y'' + 3y' + 2y = 10e^{3t} \ .$$

SOLUCIÓN Suponemos que $y_p(t) = Ae^{3t}$, pues entonces y_p' y y_p'' mantendrán la forma exponencial:

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 9Ae^{3t} + 3(3Ae^{3t}) + 2(Ae^{3t}) = 20Ae^{3t}.$$

Al hacer $20Ae^{3t} = 10e^{3t}$ y despejar A tenemos que $A = 1/2$; así,

$$y_p(t) = \frac{e^{3t}}{2}$$

es una solución de (3). ■

EJEMPLO 3 Determinar una solución particular de

$$\textbf{(4)} \qquad y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} t \ .$$

SOLUCIÓN Nuestra acción inicial sería suponer que $y_1(t) = A \operatorname{sen} t$, pero esto fracasa pues las derivadas introducen términos con cosenos:

$$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = -A \operatorname{sen} t + 3A \cos t + 2A \operatorname{sen} t = A \operatorname{sen} t + 3A \cos t \ ,$$

y al hacer corresponder esto con sen t deberá ocurrir que A sea igual a 1 y a 0. Así, incluimos el término del coseno en la solución de prueba:

$$y_p(t) = A \operatorname{sen} t + B \cos t \ ,$$
$$y_p'(t) = A \cos t - B \operatorname{sen} t \ ,$$
$$y_p''(t) = -A \operatorname{sen} t - B \cos t \ ,$$

†En este caso, el coeficiente de t^k en $ay'' + by' + cy$ se anula para $k \neq m$ y es igual a C para $k = m$.

de modo que (4) se convierte en

$$\begin{aligned} y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) &= -A \operatorname{sen} t - B \cos t + 3A \cos t - 3B \operatorname{sen} t \\ &\quad + 2A \operatorname{sen} t + 2B \cos t \\ &= (A - 3B)\operatorname{sen} t + (B + 3A)\cos t \\ &= \operatorname{sen} t \ . \end{aligned}$$

Las ecuaciones $A - 3B = 1$, $B + 3A = 0$ tienen la solución $A = 0.1$, $B = -0.3$. Así, la función

$$y_p(t) = 0.1 \operatorname{sen} t - 0.3 \cos t$$

es una solución particular de (4). ■

Más en general, para una ecuación de la forma

(5) $$ay'' + by' + cy = C \operatorname{sen} \beta t \ \left(\text{o}\, C \cos \beta t\right) \ ,$$

el método de coeficientes indeterminados sugiere intentar con

(6) $$y_p(t) = A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t$$

y resolver (5) en términos de las incógnitas A y B.

Si comparamos la ecuación (5) con la ecuación del sistema masa-resorte

(7) $$[\text{inercia}] \times y'' + [\text{amortiguamiento}] \times y' + [\text{rigidez}] \times y = F_{\text{externa}} \ ,$$

podemos interpretar (5) como la descripción de un oscilador amortiguado, perturbado con una fuerza sinusoidal. Así, de acuerdo con nuestro análisis de la sección 4.1, es de esperar que a largo plazo la masa responda moviéndose en sincronía con la sinusoide. En otras palabras, la forma (6) es sugerida por la experiencia física y matemática. En la sección 4.9 se dará una descripción completa de los osciladores forzados.

EJEMPLO 4 Determinar una solución particular de

(8) $$y'' + 4y = 5t^2 e^t \ .$$

SOLUCIÓN Nuestra experiencia con el ejemplo 1 sugiere que consideremos una solución de prueba de la forma $y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^t$, para corresponder a la no homogeneidad en (8). Vemos que

$$\begin{aligned} y_p &= \left(At^2 + Bt + C\right)e^t \ , \\ y_p' &= (2At + B)e^t + \left(At^2 + Bt + C\right)e^t \ , \\ y_p'' &= 2Ae^t + 2(2At + B)e^t + \left(At^2 + Bt + C\right)e^t \ , \\ y_p'' + 4y_p &= e^t(2A + 2B + C + 4C) + te^t(4A + B + 4B) + t^2e^t(A + 4A) \\ &= 5t^2e^t \ . \end{aligned}$$

Al asociar los términos semejantes se tiene que $A = 1$, $B = -4/5$, y $C = -2/25$. Una solución está dada por

$$y_p(t) = \left(t^2 - \frac{4t}{5} - \frac{2}{25}\right)e^t \ . \ ■$$

Como muestran nuestros ejemplos, cuando el término no homogéneo $f(t)$ es una función exponencial, un seno, un coseno o una potencia de t veces cualquiera de ellas, la función $f(t)$ sugiere la forma de una solución particular. Sin embargo, ciertas situaciones obstaculizan la aplicación directa del método de coeficientes indeterminados. Considere, por ejemplo, la ecuación

(9) $$y'' + y' = 5 \ .$$

El ejemplo 1 sugiere que tratemos con $y_1(t) = A$, un polinomio de grado cero. Pero la sustitución en (9) es inútil:

$$(A)'' + (A)' = 0 \neq 5 \ .$$

El problema surge porque cualquier función constante, como $y_1(t) = A$, es una solución de la ecuación homogénea correspondiente $y'' + y' = 0$, y el coeficiente indeterminado A se pierde al sustituir en la ecuación. Encontraremos la misma situación si tratamos de hallar una solución de

(10) $$y'' - y = 3e^t$$

de la forma $y_1 = Ae^t$, pues e^t es solución de la ecuación homogénea asociada y

$$(Ae^t)'' - (Ae^t) = 0 \neq 3e^t \ .$$

El "truco" para refinar el método de coeficientes indeterminados en estas situaciones tiene el sabor de la lógica de la sección 4.2, cuando se desarrolló un método para hallar una segunda solución de las ecuaciones homogéneas con raíces dobles. Básicamente agregamos un factor adicional de t a la solución de prueba sugerida por el procedimiento básico. En otras palabras, para resolver (9) intentamos con $y_p(t) = At$ en vez de A, y para resolver (10) tratamos con $y_p(t) = Ate^t$ en vez de Ae^t:

(9′) $$y_p = At \ , \quad y_p' = A \ , \quad y_p'' = 0 \ ,$$
$$y_p'' + y_p' = 0 + A = 5 \ ,$$
$$A = 5 \ , \quad y_p(t) = 5t \ ;$$

(10′) $$y_p = Ate^t \ , \quad y_p' = Ae^t + Ate^t \ , \quad y_p'' = 2Ae^t + Ate^t \ ,$$
$$y_p'' - y_p = 2Ae^t + Ate^t - Ate^t = 3e^t \ ,$$
$$A = \frac{3}{2} \ , \quad y_p(t) = \frac{3te^t}{2} \ .$$

Para ver por qué esta estrategia resuelve el problema y para generalizarla, recordemos la forma de la ecuación diferencial original (1), $ay'' + by' + cy = f(t)$. Su ecuación auxiliar asociada es

(11) $$\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0} \ ,$$

y si r es una raíz doble, entonces

(12) $$\boldsymbol{2ar + b = 0}$$

también se cumple [ecuación (13), sección 4.2].

Ahora, supongamos que el término $f(t)$ tiene la forma $Ct^m e^{rt}$ y que tratamos de obtener tal $f(t)$ sustituyendo $y_p(t) = (A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt}$, *con la potencia n por determinar*. Para simplificar la exposición, sólo enumeramos los términos principales de y_p, y'_p y y''_p:

$$y_p = A_n t^n e^{rt} + A_{n-1}t^{n-1}e^{rt} + A_{n-2}t^{n-2}e^{rt} + (\textit{términos de menor orden, t.m.o.})$$
$$y'_p = A_n r t^n e^{rt} + A_n n t^{n-1}e^{rt} + A_{n-1}rt^{n-1}e^{rt} + A_{n-1}(n-1)t^{n-2}e^{rt} + A_{n-2}rt^{n-2}e^{rt} + (l.o.t.) \ ,$$
$$y''_p = A_n r^2 t^n e^{rt} + 2A_n n r t^{n-1}e^{rt} + A_n n(n-1)t^{n-2}e^{rt} + A_{n-1}r^2 t^{n-1}e^{rt} + 2A_{n-1}r(n-1)t^{n-2}e^{rt} + A_{n-2}r^2 t^{n-2}e^{rt} + (l.o.t) \ .$$

Entonces, el lado izquierdo de (1) se convierte en

(13)
$$ay''_p + by'_p + cy_p = A_n(\boldsymbol{ar^2 + br + c})t^n e^{rt} + [A_n n(\boldsymbol{2ar + b}) + A_{n-1}(\boldsymbol{ar^2 + br + c})]t^{n-1}e^{rt}$$
$$+ [A_n n(n-1)a + A_{n-1}(n-1)(\boldsymbol{2ar + b}) + A_{n-2}(\boldsymbol{ar^2 + br + c})]t^{n-2}e^{rt} + (l.o.t.) \ ,$$

y observamos lo siguiente:

Caso 1. Si r *no* es raíz de la ecuación auxiliar, el término principal de (13) es $A_n(ar^2 + br + c)t^n e^{rt}$ y para obtener $f(t) = Ct^m e^{rt}$ debemos hacer $n = m$:

$$y_p(t) = (A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt} \ .$$

Caso 2. Si r es una raíz *simple* de la ecuación auxiliar, se cumple (11) y el término principal en (13) es $A_n n(2ar + b)t^{n-1}e^{rt}$ y para obtener $f(t) = Ct^m e^{rt}$ debemos hacer $n = m + 1$:

$$y_p(t) = (A_{m+1}t^{m+1} + A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt} \ .$$

Sin embargo, ahora puede prescindirse del último término $A_0 e^{rt}$, pues éste resuelve la ecuación homogénea asociada, de modo que podemos factorizar t y renumerar los coeficientes para escribir

$$y_p(t) = t(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt} \ .$$

Caso 3. Si r es una raíz *doble* de la ecuación auxiliar, se cumplen (11) y (12) y el término principal en (13) es $A_n n(n-1)at^{n-2}e^{rt}$; para obtener $f(t) = Ct^m e^{rt}$ debemos hacer $n = m + 2$:

$$y_p(t) = (A_{m+2}t^{m+2} + A_{m+1}t^{m+1} + \cdots + A_2 t^2 + A_1 t + A_0)e^{rt} \ ,$$

pero de nuevo cancelamos las soluciones de la ecuación homogénea asociada y renumeramos para escribir

$$y_p(t) = t^2(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt} \ .$$

Resumimos esto mediante la siguiente regla.

RAÍCES REALES DISTINTAS

Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = Ct^m e^{rt}$, use la forma

(14) $$y_p(t) = t^s(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt} \ ,$$

con

(i) $s = 0$ si r no es raíz de la ecuación auxiliar asociada;
(ii) $s = 1$ si r es raíz simple de la ecuación auxiliar asociada; y
(iii) $s = 2$ si r es raíz doble de la ecuación auxiliar asociada.

Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = Ct^m e^{\alpha t} \cos \beta t$ o $ay'' + by' + cy = Ct^m e^{\alpha t}$ sen βt, use la forma

(15) $$y_p(t) = t^s(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{\alpha t} \cos \beta t + t^s(B_m t^m + \cdots + B_1 t + B_0)e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \ ,$$

con

(iv) $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz de la ecuación auxiliar asociada; y
(v) $s = 1$ si $\alpha + i\beta$ es raíz de la ecuación auxiliar asociada.

[La forma (15) se deduce fácilmente de (14) haciendo $r = a + i\beta$ y considerando las partes real e imaginaria, como en la sección 4.3 anterior].

Observación 1. La no homogeneidad Ct^m corresponde al caso en que $r = 0$.

Observación 2. La justificación rigurosa del método de coeficientes indeterminados [incluyendo el análisis de los términos que descartamos en (13)], será presentada en un contexto más general en el capítulo 6.

EJEMPLO 5 Determinar la forma de una solución particular a

(16) $$y'' + 2y' - 3y = f(t) \ ,$$

donde $f(t)$ es igual a

(a) $7\cos 3t$ **(b)** $2te^t \operatorname{sen} t$ **(c)** $t^2 \cos \pi t$ **(d)** $5e^{-3t}$ **(e)** $3te^t$ **(f)** $t^2 e^t$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar de la ecuación homogénea correspondiente a (16), $r^2 + 2r - 3 = 0$, tiene raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -3$. Observe que las funciones en (a), (b) y (c) están asociadas a raíces *complejas* (debido a los factores trigonométricos). Éstas son claramente distintas de r_1 y r_2, de modo que las formas de las soluciones corresponden a (15) con $s = 0$:

(a) $y_p(t) = A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t$

(b) $y_p(t) = (A_1t + A_0)e^t \cos t + (B_1t + B_0)e^t \operatorname{sen} t$

(c) $y_p(t) = (A_2t^2 + A_1t + A_0)\cos \pi t + (B_2t^2 + B_1t + B_0)\operatorname{sen} \pi t$

Para la no homogeneidad en (d) apelamos a (ii) y consideramos $y_p(t) = Ate^{-3t}$, pues -3 es una raíz simple de la ecuación auxiliar. De manera análoga, para (e) consideramos $y_p(t) = t(A_1t + A_0)e^t$ y para (f) usamos $y_p(t) = t(A_2t^2 + A_1t + A_0)e^t$. ■

EJEMPLO 6 Determinar la forma de una solución particular a

$$y'' - 2y' + y = f(t) \ ,$$

para el mismo conjunto de no homogeneidades del ejemplo 5.

SOLUCIÓN En este caso, la ecuación auxiliar para la ecuación homogénea correspondiente es $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$, con la raíz doble $r = 1$. Esta raíz no está ligada a las no homogeneidades (a) a (d), de modo que podemos usar las mismas formas de prueba para (a), (b) y (c) del ejemplo anterior, mientras que $y(t) = Ae^{-3t}$ sirve para (d).

Como $r = 1$ es una raíz doble, tenemos que $s = 2$ en (14) y las formas de prueba para (e) y (f) deben cambiarse por

(e) $y_p(t) = t^2(A_1t + A_0)e^t$

(f) $y_p(t) = t^2(A_2t^2 + A_1t + A_0)e^t$

respectivamente, de acuerdo con (iii). ■

EJEMPLO 7 Determinar la forma de una solución particular a

$$y'' - 2y' + 2y = 5te^t \cos t \ .$$

SOLUCIÓN Ahora, la ecuación auxiliar para la ecuación homogénea correspondiente es $r^2 - 2r + 2 = 0$ y tiene raíces complejas $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$. Como la no homogeneidad implica a $e^{\alpha t} \cos \beta t$ con $\alpha = \beta = 1$, es decir, $\alpha + i\beta = 1 + i = r_1$, la solución toma la forma

$$y_p(t) = t(A_1t + A_0)e^t \cos t + t(B_1t + B_0)e^t \operatorname{sen} t \ . \ ■$$

La no homogeneidad tan t en una ecuación como $y'' + y' + y = \tan t$ no tiene una de las formas para las que puede usarse el método de coeficientes indeterminados; por ejemplo, las derivadas de la "solución de prueba" $y(t) = A \tan t$ pueden complicarse, y no es claro qué términos adicionales deban agregarse para obtener una solución. En la sección 4.6 analizaremos un procedimiento diferente que puede controlar tales términos no homogéneos. **Recuerde que el método de coeficientes indeterminados se aplica sólo a no homogeneidades que sean polinomios, exponenciales, senos o cosenos, o productos de estas funciones**. El principio de superposición de la sección 4.5 muestra la forma de extender el método a las **sumas** de tales no homogeneidades. Además, proporciona la clave para armar una solución general de (1) que sirva para los problemas con valores iniciales, lo que hemos evitado hasta el momento en nuestros ejemplos.

EJERCICIOS 4.4

En los problemas 1-8, decida si puede aplicarse o no el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de la ecuación dada.

1. $y'' + 2y' - y = t^{-1}e^t$

2. $5y'' - 3y' + 2y = t^3 \cos 4t$

3. $x'' + 5x' - 3x = 3^t$

4. $2y''(x) - 6y'(x) + y(x) = (\operatorname{sen} x)/e^{4x}$

5. $y''(\theta) + 3y'(\theta) - y(\theta) = \sec \theta$

6. $2\omega''(x) - 3\omega(x) = 4x \operatorname{sen}^2 x + 4x \cos^2 x$

7. $ty'' - y' + 2y = \operatorname{sen} 3t$

8. $8z'(x) - 2z(x) = 3x^{100}e^{4x} \cos 25x$

En los problemas 9-26, determine una solución particular de la ecuación diferencial.

9. $y'' + 3y = -9$

10. $y'' + 2y' - y = 10$

11. $2z'' + z = 9e^{2t}$

12. $2x' + x = 3t^2$

13. $y'' - y' + 9y = 3 \operatorname{sen} 3t$

14. $y''(x) + y(x) = 2^x$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = xe^x$

16. $\theta''(t) - \theta(t) = t \operatorname{sen} t$

17. $y'' - 2y' + y = 8e^t$

18. $y'' + 4y = 8 \operatorname{sen} 2t$

19. $4y'' + 11y' - 3y = -2te^{-3t}$

20. $y'' + 4y = 16t \operatorname{sen} 2t$

21. $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = te^{2t}$

22. $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 24t^2e^t$

23. $y''(\theta) - 7y'(\theta) = \theta^2$

24. $y''(x) + y(x) = 4x \cos x$

25. $y'' + 2y' + 4y = 111e^{2t} \cos 3t$

26. $y'' + 2y' + 2y = 4te^{-t} \cos t$

En los problemas 27-32, determine la forma de una solución particular de la ecuación diferencial. (No evalúe los coeficientes).

27. $y'' + 9y = 4t^3 \operatorname{sen} 3t$

28. $y'' + 3y' - 7y = t^4e^t$

29. $y'' - 6y' + 9y = 5t^6e^{3t}$

30. $y'' - 2y' + y = 7e^t \cos t$

31. $y'' + 2y' + 2y = 8t^3e^{-t} \operatorname{sen} t$

32. $y'' - y' - 12y = 2t^6e^{-3t}$

En los problemas 33-36, use el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular de la ecuación de orden superior dada.

33. $y''' - y'' + y = \operatorname{sen} t$

34. $2y''' + 3y'' + y' - 4y = e^{-t}$

35. $y''' + y'' - 2y = te^t$

36. $y^{(4)} - 3y'' - 8y = \operatorname{sen} t$

4.5 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN Y REVISIÓN DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

El siguiente teorema describe el principio de superposición, una observación sencilla que, sin embargo, dota al conjunto solución de nuestras ecuaciones de una estructura poderosa. Extiende la aplicabilidad del método de coeficientes indeterminados y nos permite resolver problemas con valores iniciales para ecuaciones diferenciales no homogéneas.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Teorema 3. Sea y_1 una solución de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = f_1(t) \ ,$$

y sea y_2 una solución de

$$ay'' + by' + cy = f_2(t) \ .$$

Entonces, para cualesquiera constantes c_1 y c_2, la función $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$$

Demostración. Esto es directo; al sustituir y reordenar tenemos que

$$\begin{aligned} &a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\quad = c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) \\ &\quad = c_1f_1(t) + c_2f_2(t) \ . \ \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Determinar una solución particular de

(1) $y'' + 3y' + 2y = 3t + 10e^{3t}$ y

(2) $y'' + 3y' + 2y = -9t + 20e^{3t}$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 de la sección 4.4 vimos que $y_1(t) = 3t/2 - 9/4$ era una solución de $y'' + 3y' + 2y = 3t$; en el ejemplo 2 vimos que $y_2(t) = e^{3t}/2$ resuelve $y'' + 3y' + 2y = 10e^{3t}$. Así, por superposición, $y_1 + y_2 = 3t/2 - 9/4 + e^{3t}/2$ resuelve la ecuación (1).

El lado derecho de (2) es igual a menos tres veces ($3t$) más dos veces ($10e^{3t}$). Por tanto, esta misma combinación de y_1 y y_2 resuelve (2):

$$y(t) = -3y_1 + 2y_2 = -3(3t/2 - 9/4) + 2(e^{3t}/2) = -9t/2 + 27/4 + e^{3t} \ . \ \blacksquare$$

Si consideramos una solución particular y_p de una ecuación no homogénea como

(3) $ay'' + by' + cy = f(t)$

y la agregamos a una solución general $c_1y_1 + c_2y_2$ de la ecuación homogénea asociada a (3),

(4) $ay'' + by' + cy = 0$,

la suma

(5) $y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$

es, de acuerdo con el principio de superposición, de nuevo una solución de (3):

$$\begin{aligned} &a(y_p + c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(y_p + c_1y_1 + c_2y_2)' + c(y_p + c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\quad = f(t) + 0 + 0 = f(t) \ . \end{aligned}$$

Como (5) contiene dos parámetros, es de esperar que sea posible elegir c_1 y c_2 para que satisfagan condiciones iniciales arbitrarias. Es fácil verificar que esto ocurre.

EXISTENCIA Y UNICIDAD: CASO NO HOMOGÉNEO

Teorema 4. Para cualesquiera números reales a, b, c, t_0, Y_0 y Y_1, supóngase que $y_p(t)$ es una solución particular de (3) en un intervalo I que contiene a t_0 y que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada (4) en I. Entonces existe una única solución en I al problema con valores iniciales

(6) $$ay'' + by' + cy = f(t) \;, \qquad y(t_0) = Y_0,\; y'(t_0) = Y_1 \;,$$

y está dada por (5), para la elección adecuada de las constantes c_1, c_2.

Demostración. Ya hemos visto que el principio de superposición implica que (5) resuelve la ecuación diferencial. Para satisfacer las condiciones iniciales en (6) debemos elegir las constantes de modo que

(7) $$\begin{cases} y_p(t_0) + c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = Y_0 \;, \\ y_p'(t_0) + c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = Y_1 \;. \end{cases}$$

Pero al igual que en la demostración del teorema 2 de la sección 4.2, un sencillo procedimiento algebraico muestra que la elección

$$c_1 = \frac{[Y_0 - y_p(t_0)]y_2'(t_0) - [Y_1 - y_p'(t_0)]y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)} \quad \text{y}$$

$$c_2 = \frac{[Y_1 - y_p'(t_0)]y_1(t_0) - [Y_0 - y_p(t_0)]y_1'(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

resuelve (7), a menos que el denominador sea cero, pero el lema 1 de la sección 4.2 nos garantiza que esto no ocurre.

¿Por qué es única la solución? Si $y_{\mathrm{I}}(t)$ fuese otra solución de (6), entonces la diferencia $y_{\mathrm{II}}(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) - y_{\mathrm{I}}(t)$ satisfaría

(8) $$\begin{cases} ay_{\mathrm{II}}'' + by_{\mathrm{II}}' + cy_{\mathrm{II}} = f(t) - f(t) = 0 \;, \\ y_{\mathrm{II}}(t_0) = Y_0 - Y_0 = 0 \;, \quad y_{\mathrm{II}}'(t_0) = Y_1 - Y_1 = 0 \;. \end{cases}$$

Pero el problema con valores iniciales (8) admite la solución idénticamente nula, y el teorema 1 de la sección 4.2 se aplica debido a que la ecuación diferencial en (8) es homogénea. En consecuencia, (8) tiene *solamente* la solución idénticamente nula. Así, $y_{\mathrm{II}} + 0$ y $y_{\mathrm{I}} = y_{p+}\, c_1 y_1 + c_2 y_2$. ■

Estas deliberaciones nos llevan a decir que $y = y_{p+}\, c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una **solución general** de la ecuación no homogénea (3), ya que *cualquier* solución $y_g(t)$ se puede expresar de esta forma. (**Demostración**: Como en la sección 4.2, simplemente elegimos c_1 y c_2 de modo que $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ concuerde con el valor y la derivada de y_g en *cualquier punto*; por unicidad, $y_{p+}\, c_1 y_1 + c_2 y_2$ y y_g deben ser la misma función).

EJEMPLO 2 Dado que $y_p(t) = t^2$ es una solución particular de

$$y'' - y = 2 - t^2 \ ,$$

encontrar una solución general y una solución que satisfaga $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación homogénea correspondiente

$$y'' - y = 0 \ ,$$

tiene la ecuación auxiliar asociada $r^2 - 1 = 0$. Como $r = \pm 1$ son las raíces de esta ecuación, una solución general de la ecuación homogénea es $c_1e^t + c_2e^{-t}$. Al combinar esto con la solución particular $y_p(t) = t^2$ de la ecuación no homogénea, vemos que una solución general es

$$y(t) = t^2 + c_1e^t + c_2e^{-t} \ .$$

Para cumplir las condiciones iniciales, sea

$$y(0) = 0^2 + c_1e^0 + c_2e^{-0} = 1 \ ,$$
$$y'(0) = 2 \times 0 + c_1e^0 - c_2e^{-0} = 0 \ ,$$

lo que da $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. La respuesta es

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = t^2 + \cosh t. \ ■$$

EJEMPLO 3 Un sistema masa-resorte es controlado por una fuerza externa sinusoidal ($5 \operatorname{sen} t + 5 \cos t$). La masa es igual a 1, la constante de resorte es 2 y el coeficiente de amortiguamiento es 2, de modo que el análisis de la sección 4.1 implica que el movimiento queda descrito mediante la ecuación diferencial

(9) $$y'' + 2y' + 2y = 5 \operatorname{sen} t + 5 \cos t \ .$$

Si la masa se coloca inicialmente en $y(0) = 1$, con una velocidad $y'(0) = 2$, determine su ecuación de movimiento.

SOLUCIÓN La ecuación homogénea asociada $y'' + 2y' + 2y = 0$ fue estudiada en el ejemplo 1 de la sección 4.3; vimos que las raíces de la ecuación auxiliar son $-1 \pm i$, lo que conduce a una solución general $c_1e^{-t} \cos t + c_2e^{-t} \operatorname{sen} t$.

El método de coeficientes indeterminados dice que debemos tratar de hallar una solución particular de la forma $A \operatorname{sen} t + B \cos t$ para la primera no homogeneidad $5 \operatorname{sen} t$:

(10) $$y_p = A \operatorname{sen} t + B \cos t \ , \qquad y_p' = A \cos t - B \operatorname{sen} t \ , \qquad y_p'' = -A \operatorname{sen} t - B \cos t \ ;$$
$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (-A - 2B + 2A)\operatorname{sen} t + (-B + 2A + 2B)\cos t = 5 \operatorname{sen} t \ .$$

Al igualar coeficientes se requiere que $A = 1, B = -2$, de modo que $y_p = \operatorname{sen} t - 2 \cos t$.

La segunda no homogeneidad $5 \cos t$ pide la forma idéntica para y_p y conduce a $(-A - 2B + 2A)\operatorname{sen} t + (-B + 2A + 2B) \cos t = 5 \cos t$, o $A = 2, B = 1$. Por tanto, $y_p = 2 \operatorname{sen} t + \cos t$.

Por el principio de superposición, una solución general de (9) está dada por la suma

$$y = c_1e^{-t} \cos t + c_2e^{-t} \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t - 2 \cos t + 2 \operatorname{sen} t + \cos t$$
$$= c_1e^{-t} \cos t + c_2e^{-t} \operatorname{sen} t + 3 \operatorname{sen} t - \cos t \ .$$

Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 = c_1 e^{-0}\cos 0 + c_2 e^{-0}\operatorname{sen} 0 + 3\operatorname{sen} 0 - \cos 0 = c_1 - 1 \ , \\ y'(0) &= 2 = c_1\left[-e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t\right]_{t=0} + c_2\left[-e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t\right]_{t=0} \\ &\qquad + 3\cos 0 + \operatorname{sen} 0 \\ &= -c_1 + c_2 + 3 \ , \end{aligned}$$

como se requiere que $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, tenemos que

(11) $$y(t) = 2e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t + 3\operatorname{sen} t - \cos t \ . \ \blacksquare$$

La solución (11) ejemplifica las características de las oscilaciones forzadas con amortiguamiento anticipadas en la sección 4.1. Existe una componente sinusoidal ($3\operatorname{sen} t - \cos t$) en sincronía con la fuerza de control ($5\operatorname{sen} t + 5\cos t$) y una componente ($2e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t$) que se extingue. Cuando el sistema se "bombea" en forma sinusoidal, la respuesta es una oscilación sinusoidal sincronizada, después de una transición inicial que depende de las condiciones iniciales; la respuesta sincronizada es la solución particular proporcionada por el método de coeficientes indeterminados y la transición es la solución de la ecuación homogénea asociada. Esta interpretación se analiza con detalle en las secciones 4.8 y 4.9.

Tal vez haya observado que debido a que las dos formas de coeficientes indeterminados en el último ejemplo eran idénticas y destinadas a sumarse entre sí, podríamos haber utilizado la forma (10) para concordar con ambas no homogeneidades al mismo tiempo, obteniendo la condición

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (-A - 2B + 2A)\operatorname{sen} t + (-B + 2A + 2B)\cos t = 5\operatorname{sen} t + 5\cos t \ ,$$

con solución $y_p = 3\operatorname{sen} t - \cos t$. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento "mejorado".

EJEMPLO 4 Determinar una solución particular de

(12) $$y'' - y = 8te^t + 2e^t \ .$$

SOLUCIÓN Es fácil ver que una solución general de la ecuación homogénea asociada es $c_1e^t + c_2e^{-t}$. Así, una solución particular correspondiente a la no homogeneidad $8te^t$ tiene la forma $t(A_1t + A_0)e^t$, mientras que para corresponder a $2e^t$ se necesita la forma A_0te^t. Por tanto, podemos concordar con ambas con la primera forma:

$$\begin{aligned} y_p &= t(A_1t + A_0)e^t = (A_1t^2 + A_0t)e^t \ , \\ y_p' &= (A_1t^2 + A_0t)e^t + (2A_1t + A_0)e^t = \left[A_1t^2 + (2A_1 + A_0)t + A_0\right]e^t \ , \\ y_p'' &= \left[2A_1t + (2A_1 + A_0)\right]e^t + \left[A_1t^2 + (2A_1 + A_0)t + A_0\right]e^t \\ &= \left[A_1t^2 + (4A_1 + A_0)t + (2A_1 + 2A_0)\right]e^t \ . \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p &= \left[4A_1t + (2A_1 + 2A_0)\right]e^t \\ &= 8te^t + 2e^t \ , \end{aligned}$$

lo que da $A_1 = 2$, $A_0 = -1$, de modo que $y_p = (2t^2 - t)e^t$. $\blacksquare$

Generalizamos este procedimiento modificando el método de coeficientes indeterminados como sigue.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS (REVISADO)

Para determinar una solución particular de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = P_m(t)e^{rt}} \ ,$$

donde $P_m(t)$ es un polinomio de grado m, usamos la forma

(13) $$y_p(t) = \boldsymbol{t^s}(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt} \ ;$$

si r no es raíz de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 0$; si r es una raíz simple de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 1$; y si r es una raíz doble de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 2$.

Para determinar una solución particular de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + Q_n(t)e^{\alpha t}\,\text{sen}\,\beta t} \ ,$$

donde $P_m(t)$ es un polinomio de grado m y $Q_n(t)$ es un polinomio de grado n, usamos la forma

(14) $$y_p(t) = \boldsymbol{t^s}(A_k t^k + \cdots + A_1 t + A_0)e^{\alpha t}\cos\beta t + \boldsymbol{t^s}(B_k t^k + \cdots + B_1 t + B_0)e^{\alpha t}\,\text{sen}\,\beta t \ ,$$

donde k es el máximo de m y n. Si $\alpha + i\beta$ no es raíz de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 0$; si $\alpha + i\beta$ es raíz de la ecuación auxiliar asociada, hacemos $s = 1$.

EJEMPLO 5 Escriba la forma de una solución particular de la ecuación

$$y'' + 2y' + 2y = 5e^{-t}\,\text{sen}\,t + 5t^3e^{-t}\cos t \ .$$

SOLUCIÓN Las raíces de la ecuación homogénea asociada $y'' + 2y' + 2y = 0$ se calcularon en el ejemplo 3, como $-1 \pm i$. La aplicación de (14) indica la forma

$$y_p(t) = t(A_3t^3 + A_2t^2 + A_1t + A_0)e^{-t}\cos t + t(B_3t^3 + B_2t^2 + B_1t + B_0)e^{-t}\,\text{sen}\,t \ . \qquad \blacksquare$$

El método de coeficientes indeterminados se aplica a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes. Daremos los detalles en el capítulo 6, aunque el siguiente ejemplo es claro.

EJEMPLO 6 Escriba la forma de una solución particular de la ecuación

$$y''' + 2y'' + y' = 5e^{-t}\,\text{sen}\,t + 3 + 7te^{-t} \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar para la ecuación homogénea asociada es $r^3 + 2r^2 + r = r(r + 1)^2 = 0$, con una raíz doble $r = -1$ y una raíz simple $r = 0$. Término a término, las no homogeneidades sugieren las formas

$$A_0\,e^{-t}\cos t + B_0\,e^{-t}\,\text{sen}\,t \qquad (\text{para } 5e^{-t}\,\text{sen}\,t) \ ,$$

$$t\,A_0 \qquad (\text{para } 3) \ ,$$

$$t^2(A_1t + A_0)e^{-t} \qquad (\text{para } 7te^{-t}) \ .$$

(Si -1 fuese una raíz *triple*, necesitaríamos $t^3(A_1 t + A_0)e^{-t}$ para $7te^{-t}$). Por supuesto, debemos renombrar los coeficientes, de modo que la forma general es

$$y_p(t) = Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t + tC + t^2(Dt + E)e^{-t} \ . \ \blacksquare$$

EJERCICIOS 4.5

1. Dado que $y_1(t) = \cos t$ es una solución de
$$y'' - y' + y = \operatorname{sen} t$$
y que $y_2(t) = e^{2t}/3$ es una solución de
$$y'' - y' + y = e^{2t} \ ,$$
use el principio de superposición para determinar soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:
(a) $y'' - y' + y = 5 \operatorname{sen} t$
(b) $y'' - y' + y = \operatorname{sen} t - 3e^{2t}$
(c) $y'' - y' + y = 4 \operatorname{sen} t + 18e^{2t}$

2. Dado que $y_1(t) = (1/4)\operatorname{sen} 2t$ sen $2t$ es una solución de $y'' + 2y' + 4y = \cos 2t$ y que $y_2(t) = t/4 - 1/8$ es una solución de $y'' + 2y' + 4y = t$, use el principio de superposición para determinar soluciones de lo siguiente:
(a) $y'' + 2y' + 4y = t + \cos 2t$
(b) $y'' + 2y' + 4y = 2t - 3 \cos 2t$
(c) $y'' + 2y' + 4y = 11t - 12 \cos 2t$

En los problemas 3-8 se da una ecuación no homogénea y una solución particular. Determine una solución general para la ecuación.

3. $y'' - y = t \ , \quad y_p(t) = -t$
4. $y'' + y' = 1 \ , \quad y_p(t) = t$
5. $\theta'' - \theta' - 2\theta = 1 - 2t \ , \quad \theta_p(t) = t - 1$
6. $y'' + 5y' + 6y = 6x^2 + 10x + 2 + 12e^x \ ,$
$y_p(x) = e^x + x^2$
7. $y'' = 2y' - y + 2e^x \ , \quad y_p(x) = x^2 e^x$
8. $y'' = 2y + 2\tan^3 x \ , \quad y_p(x) = \tan x$

En los problemas 9-16, decida si el método de coeficientes indeterminados junto con el principio de superposición puede aplicarse para determinar una solución particular de la ecuación dada. No resuelva la ecuación.

9. $3y'' + 2y' + 8y = t^2 + 4t - t^2 e^t \operatorname{sen} t$
10. $y'' - y' + y = (e^t + t)^2$
11. $y'' - 6y' - 4y = 4 \operatorname{sen} 3t - e^{3t}t^2 + 1/t$
12. $y'' + y' + ty = e^t + 7$
13. $2y'' + 3y' - 4y = 2t + \operatorname{sen}^2 t + 3$
14. $y'' - 2y' + 3y = \cosh t$
15. $y'' + e^t y' + y = 7 + 3t$
16. $2y'' - y' + 6y = t^2 e^{-t} \operatorname{sen} t - 8t \cos 3t + 10^t$

En los problemas 17-22, determine una solución general de la ecuación diferencial.

17. $y'' - y = -11t + 1$
18. $y'' - 2y' - 3y = 3t^2 - 5$
19. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x \operatorname{sen} x$
20. $y''(\theta) + 4y(\theta) = \operatorname{sen} \theta - \cos \theta$
21. $y''(\theta) + 2y'(\theta) + 2y(\theta) = e^{-\theta} \cos \theta$
22. $y''(x) + 6y'(x) + 10y(x)$
$= 10x^4 + 24x^3 + 2x^2 - 12x + 18$

En los problemas 23-30, determine la solución del problema con valores iniciales.

23. $y' - y = 1, \quad y(0) = 0$
24. $y'' = 6t \ ; \quad y(0) = 3 \ , \quad y'(0) = -1$
25. $z''(x) + z(x) = 2e^{-x} \ ; \quad z(0) = 0 \ , \quad z'(0) = 0$
26. $y'' + 9y = 27 \ ; \quad y(0) = 4 \ , \quad y'(0) = 6$
27. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \cos x - \operatorname{sen} 2x;$
$y(0) = -7/20 \ , \quad y'(0) = 1/5$
28. $y'' + y' - 12y = e^t + e^{2t} - 1 \ ;$
$y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 3$
29. $y''(\theta) - y(\theta) = \operatorname{sen} \theta - e^{2\theta} \ ;$
$y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = -1$
30. $y'' + 2y' + y = t^2 + 1 - e^t \ ;$
$y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 2$

En los problemas 31-36, determine la forma de una solución particular para la ecuación diferencial. No resuelva la ecuación.

31. $y'' + y = \operatorname{sen} t + t \cos t + 10^t$
32. $y'' - y = e^{2t} + te^{2t} + t^2 e^{2t}$

33. $x'' - x' - 2x = e^t \cos t - t^2 + t + 1$

34. $y'' + 5y' + 6y = \text{sen}\, t - \cos 2t$

35. $y'' - 4y' + 5y = e^{5t} + t\,\text{sen}\, 3t - \cos 3t$

36. $y'' - 4y' + 4y = t^2 e^{2t} - e^{2t}$

En los problemas 37-40, determine una solución particular de la ecuación de orden superior dada.

37. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2t^2 + 4t - 9$

38. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 10 \cos t - 20\, \text{sen}\, t$

39. $y''' + y'' - 2y = te^t + 1$

40. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 6t - 20$

41. Término Forzamiento Discontinuo. En ciertos modelos físicos, el término no homogéneo, o **Forzamiento** $g(t)$ en la ecuación

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

puede no ser continuo sino tener una discontinuidad de salto. Si esto ocurre, aun así podemos obtener una solución razonable mediante el siguiente procedimiento. Considere el problema con valores iniciales

$$y'' + 2y' + 5y = g(t)\ ; \quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0\ ,$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \le t \le 3\pi/2 \\ 0 & \text{si } t > 3\pi/2 \end{cases} .$$

(a) Determine una solución al problema con valores iniciales para $0 \le t \le 3\pi/2$.

(b) Determine una solución general para $t > 3\pi/2$.

(c) Ahora elija las constantes en la solución general de la parte (b) de modo que la solución de la parte (a) y la solución de la parte (b) coincidan, junto con sus primeras derivadas, en $t = 3\pi/2$. Esto nos da una función continuamente diferenciable que satisface la ecuación diferencial excepto en $t = 3\pi/2$.

42. Vibraciones forzadas. Como se vio en la sección 4.1, un resorte en vibración con amortiguamiento que recibe una fuerza externa se puede modelar mediante

$$\textbf{(15)} \qquad my'' + by' + ky = g(t)\ ,$$

donde $m > 0$ es la masa del sistema de resorte, $b > 0$ es la constante de amortiguamiento, $k > 0$ es la constante de resorte, $g(t)$ es la fuerza sobre el sistema en el instante t, y $y(t)$ es el desplazamiento del sistema de resorte desde el equilibrio en el instante t. Suponga que $b^2 < 4mk$.

(a) Determine la forma de la ecuación de movimiento para el sistema de resorte cuando $g(t) = \text{sen}\, \beta t$ hallando una solución general de la ecuación (15).

(b) Analice el comportamiento a largo plazo de este sistema. [*Sugerencia*: Considere lo que ocurre a la solución general obtenida en la parte (a) cuando $t \to +\infty$].

43. Un sistema masa-resorte recibe una fuerza externa sinusoidal $g(t) = 5\, \text{sen}\, t$. La masa es igual a 1, la constante de resorte es igual a 3 y el coeficiente de amortiguamiento es igual a 4. Si la masa se coloca inicialmente en $y(0) = 1/2$ y en reposo, es decir, $y'(0) = 0$, determine su ecuación de movimiento.

44. Un sistema masa-resorte recibe una fuerza externa $g(t) = 2\, \text{sen}\, 3t + 10 \cos 3t$. La masa es igual a 1, la constante de resorte es igual a 5 y el coeficiente de amortiguamiento es 2. Si la masa se coloca inicialmente en $y(0) = -1$, con velocidad inicial $y'(0) = 5$, determine su ecuación de movimiento.

45. Topes. Con frecuencia se colocan topes en los caminos, como el que aparece en la figura 4.11, para evitar el exceso de velocidad. La figura sugiere que un modelo grueso del movimiento vertical $y(t)$ de un auto que llega al tope con la velocidad V está dado por

$$y(t) = 0\ , \qquad \text{para } t \le -L/2V\ ,$$

$$my'' + ky = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi V t}{L}\right) & \text{para } |t| < L/2V \\ 0 & \text{para } L/2V \le t\ . \end{cases}$$

(La ausencia de un término de amortiguamiento indica que los amortiguadores del auto no están funcionando).

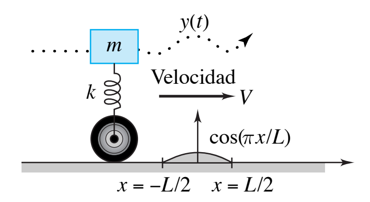


Figura 4.11 Tope

(a) Haga $m = k = 1$ y $L = \pi$ por conveniencia y resuelva este problema con valores iniciales. Por tanto, muestre que la fórmula para el movimiento oscilatorio *después que el auto ha pasado por el tope* es $y(t) = A\, \text{sen}\, t$, donde la constante A depende de la velocidad V.

(b) Grafique la amplitud $|A|$ de la solución $y(t)$ determinada en la parte (a) contra la velocidad del auto V. Use la gráfica para estimar la velocidad que produce la sacudida más violenta del vehículo.

46. Muestre que el *problema con valores en la frontera*

$$y'' + \lambda^2 y = \operatorname{sen} t \quad y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 1 \ ,$$

tiene solución si y sólo si l $\neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

47. Determine la(s) solución(es) de

$$y'' + 9y = 27 \cos 6t$$

(si existe) que satisfaga las *condiciones en la frontera*

(a) $y(0) = -1 \ , \quad y(\pi/6) = 3$

(b) $y(0) = -1 \ , \quad y(\pi/3) = 5$

(c) $y(0) = -1 \ , \quad y(\pi/3) = -1$

4.6 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Hemos visto que el método de coeficientes indeterminados es un procedimiento sencillo para hallar una solución particular cuando la ecuación tiene coeficientes constantes y el término no homogéneo es de un tipo especial. Aquí presentamos un método más general, llamado **variación de parámetros**,[†] para hallar una solución particular.

Considere la ecuación lineal no homogénea de segundo orden

(1) $$ay'' + by' + cy = g(t)$$

y sean $\{y_1(t), y_2(t)\}$ dos soluciones linealmente independientes para la ecuación homogénea correspondiente

$$ay'' + by' + cy = 0 \ .$$

Entonces sabemos que una solución general de esta ecuación homogénea está dada por

(2) $$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea, la estrategia de la variación de parámetros consiste en reemplazar las constantes en (2) por funciones de t. Es decir, buscamos una solución de (1) de la forma[††]

(3) $$\boldsymbol{y_p(t) = v_1(t) y_1(t) + v_2(t) y_2(t)} \ .$$

Como hemos introducido dos funciones incógnitas $v_1(t)$ y $v_2(t)$, es razonable esperar que podamos imponer dos ecuaciones (requisitos) sobre estas funciones. Naturalmente, una de estas ecuaciones debe provenir de (1). Así, introducimos $y_p(t)$ dada por (3) en (1). Para realizar esto, primero debemos calcular $y_p'(t)$ y $y_p''(t)$. De (3) obtenemos

$$y_p' = (v_1' y_1 + v_2' y_2) + (v_1 y_1' + v_2 y_2') \ .$$

Para simplificar los cálculos y evitar las derivadas de segundo orden para las incógnitas v_1, v_2, en la expresión para y_p'' imponemos la condición

(4) $$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \ .$$

Así, la fórmula para y_p' se convierte en

(5) $$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \ ,$$

[†] ***Nota histórica:*** El método variación de parámetros fue ideado por Joseph Lagrange en 1774.

[††] En el problema 36 de los ejercicios 2.3 desarrollamos este enfoque para ecuaciones lineales de primer orden. Debido al parecido entre las ecuaciones (2) y (3), esta técnica se conoce a veces como “variación de constantes”.

y entonces

(6) $$y_p'' = v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2'' \ .$$

Ahora, al sustituir y_p, y_p' y y_p'' dadas por (3), (5) y (6) en (1) tenemos

(7) $$\begin{aligned} g &= ay_p'' + by_p' + cy_p \\ &= a(v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2'') + b(v_1y_1' + v_2y_2') + c(v_1y_1 + v_2y_2) \\ &= a(v_1'y_1' + v_2'y_2') + v_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) \\ &= a(v_1'y_1' + v_2'y_2') + 0 + 0 \end{aligned}$$

ya que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea. (7) se reduce a

(8) $$v_1'y_1' + v_2'y_2' = \frac{g}{a} \ .$$

En resumen, si podemos hallar v_1 y v_2 que satisfagan (4) y (8), es decir,

(9) $$\begin{aligned} \boldsymbol{y_1v_1' + y_2v_2'} &= \mathbf{0} \ , \\ \boldsymbol{y_1'v_1' + y_2'v_2'} &= \boldsymbol{\frac{g}{a}} \ , \end{aligned}$$

entonces y_p dada por (3) será una solución particular de (1). Para determinar v_1 y v_2, primero resolvemos el sistema lineal (9) en términos de v_1' y v_2'. Usamos la regla de Cramer (véase Apéndice C) para obtener

$$v_1'(t) = \frac{-g(t)y_2(t)}{a[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)]} \quad \text{y} \quad v_2'(t) = \frac{g(t)y_1(t)}{a[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)]} \ ,$$

donde la expresión en corchetes del denominador (el Wronskiano) nunca se anula de acuerdo con el lema 1 de la sección 4.2. Al integrar estas ecuaciones obtenemos finalmente

(10) $$v_1(t) = \int \frac{-g(t)y_2(t)}{a[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)]}dt \quad \text{y} \quad v_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{a[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)]}dt \ .$$

Repasemos este procedimiento.

MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Para determinar una solución particular de $ay'' + by' + cy = g$:

(a) Se hallan dos soluciones linealmente independientes $\{y_1(t), y_2(t)\}$ de la ecuación homogénea correspondiente y se considera

$$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t) \ .$$

(b) Se determinan $v_1(t)$ y $v_2(t)$ resolviendo el sistema (9) en términos de $v_1'(t)$ y $v_2'(t)$ y se integra.

(c) Se sustituye $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en la expresión para $y_p(t)$ y así obtener una solución particular.

Por supuesto, en el paso (b) se pueden usar las fórmulas en (10), pero $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son tan fáciles de derivar que le recomendamos no memorizarlas.

EJEMPLO 1 Determinar una solución general en $(-\pi/2, \pi/2)$ de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \tan t \ . \tag{11}$$

SOLUCIÓN Observe que dos soluciones independientes de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ son $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$. Ahora hacemos

$$y_p(t) = v_1(t)\cos t + v_2(t)\operatorname{sen} t \tag{12}$$

y, en relación con (9), resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} (\cos t)v_1'(t) + (\operatorname{sen} t)v_2'(t) &= 0 \ , \\ (-\operatorname{sen} t)v_1'(t) + (\cos t)v_2'(t) &= \tan t \ , \end{aligned}$$

en términos de $v_1'(t)$ y $v_2'(t)$. Esto da

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= -\tan t \operatorname{sen} t \ , \\ v_2'(t) &= \tan t \cos t = \operatorname{sen} t \ . \end{aligned}$$

Al integrar obtenemos

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -\int \tan t \operatorname{sen} t \, dt = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}\, dt \\ &= -\int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t}\, dt = \int (\cos t - \sec t)\, dt \\ &= \operatorname{sen} t - \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \ , \end{aligned} \tag{13}$$

$$v_2(t) = \int \operatorname{sen} t \, dt = -\cos t + C_2 \ . \tag{14}$$

Sólo necesitamos una solución particular, de modo que igualamos C_1 y C_2 para simplificar los cálculos. Luego, al sustituir $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en (12), obtenemos

$$y_p(t) = (\operatorname{sen} t - \ln|\sec t + \tan t|)\cos t - \cos t \operatorname{sen} t \ ,$$

lo que se simplifica como

$$y_p(t) = -(\cos t) \ln|\sec t + \tan t| \ .$$

Podemos eliminar los símbolos de valor absoluto porque $\sec t + \tan t = (1 + \operatorname{sen} t)/\cos t > 0$ para $-\pi/2 < t < \pi/2$.

Recuerde que una solución general de una ecuación no homogénea está dada por la suma de una solución general de la ecuación homogénea y una solución particular. En consecuencia, una solución general de la ecuación (11) en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - (\cos t) \ln(\sec t + \tan t) \ . \ \blacksquare \tag{15}$$

Observe que en el ejemplo anterior, las constantes C_1 y C_2 que aparecen en (13) y (14) se igualaron a cero. De retener estas constantes arbitrarias, el efecto final sería sumar $C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$ a (15), lo que es claramente redundante.

EJEMPLO 2 Determinar una solución particular en $(-\pi/2, \pi/2)$ de

$$\text{(16)} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = \tan t + 3t - 1 \ .$$

SOLUCIÓN Si usamos $g(t) = \tan t + 3t - 1$, el procedimiento de variación de parámetros nos lleva a una solución. Pero en este caso es más sencillo analizar por separado las ecuaciones

$$\text{(17)} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = \tan t \ ,$$

$$\text{(18)} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 3t - 1$$

y luego usar el principio de superposición (teorema 3, página 185).

En el ejemplo 1 vimos que

$$y_q(t) = -(\cos t) \ln(\sec t + \tan t)$$

es una solución particular de la ecuación (17). Para la ecuación (18), podemos aplicar el método de coeficientes indeterminados. Al buscar una solución de (18) de la forma $y_r(t) = At + B$, obtenemos rápidamente

$$y_r(t) = 3t - 1 \ .$$

Por último, aplicamos el principio de superposición para obtener

$$\begin{aligned} y_p(t) &= y_q(t) + y_r(t) \\ &= -(\cos t) \ln(\sec t + \tan t) + 3t - 1 \end{aligned}$$

como solución particular de la ecuación (16). ■

Observe que no podríamos resolver el ejemplo 1 mediante el método de coeficientes indeterminados por la no homogeneidad de tan t . En el capítulo 6 veremos que otra ventaja importante del método de variación de parámetros es su aplicabilidad a las ecuaciones cuyos coeficientes son funciones de t.

EJERCICIOS 4.6

En los problemas 1-10, determine una solución general de la ecuación diferencial usando el método de variación de parámetros.

1. $y'' + 4y = \tan 2t$

2. $y'' + y = \sec t$

3. $2x'' - 2x' - 4x = 2e^{3t}$

4. $y'' - y = 2t + 4$

5. $y'' - 2y' + y = t^{-1}e^t$

6. $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

7. $y''(\theta) + 16y(\theta) = \sec 4\theta$

8. $y'' + 9y = \sec^2(3t)$

9. $y'' + 4y = \csc^2(2t)$

10. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \ln t$

En los problemas 11-18, determine una solución general de la ecuación diferencial.

11. $y'' + y = \tan^2 t$

12. $y'' + y = \tan t + e^{3t} - 1$

13. $v'' + 4v = \sec^4(2t)$

14. $y''(\theta) + y(\theta) = \sec^3 \theta$

15. $y'' + y = 3 \sec t - t^2 + 1$

16. $y'' + 5y' + 6y = 18t^2$

17. $\frac{1}{2}y'' + 2y = \tan 2t - \frac{1}{2}e^t$

18. $y'' - 6y' + 9y = t^{-3}e^{3t}$

19. Exprese la solución al problema con valores iniciales

$$y'' - y = \frac{1}{t}, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = -2\,,$$

usando integrales definidas. Use la integración numérica (Apéndice B) para aproximar las integrales y determine una aproximación de $y(2)$ con dos cifras decimales.

20. Use el método de variación de parámetros para mostrar que

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \int_0^t f(s) \operatorname{sen}(t - s)\, ds$$

es una solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = f(t)\,,$$

donde $f(t)$ es una función continua en $(-\infty, \infty)$. [*Sugerencia*: Use la identidad trigonométrica sen($t - s$) = sen t cos s − sen s cos t.]

Ecuaciones con coeficientes variables. El método de variación de parámetros también se aplica a ecuaciones con coeficientes variables de la forma

$$\textbf{(19)} \qquad \boldsymbol{a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t)\,.}$$

Si $y_1(t)$, $y_2(t)$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, linealmente independientes en un intervalo I y $a(t) \neq 0$ en I, entonces (19) tiene una solución particular de la forma (3), donde v_1', v_2' quedan determinadas nuevamente por las ecuaciones (9), aunque reemplazando la constante a por la función $a(t)$.

En los problemas 21-24, determine una solución particular de la ecuación con coeficientes variables dado que y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente para $t > 0$.

21. $ty'' - (t + 1)y' + y = t^2$;
$y_1 = e^t, \quad y_2 = t + 1$

22. $t^2y'' - 4ty' + 6y = t^3 + 1$;
$y_1 = t^2$, $\quad y_2 = t^3$

23. $ty'' + (5t - 1)y' - 5y = t^2e^{-5t}$;
$y_1 = 5t - 1$, $\quad y_2 = e^{-5t}$

24. $ty'' + (1 - 2t)y' + (t - 1)y = te^t$;
$y_1 = e^t$, $\quad y_2 = e^t \ln t$

25. La **ecuación de Bessel** de orden un medio,

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y(x) = 0$$

tiene dos soluciones linealmente independientes,

$$y_1(x) = x^{-1/2} \cos x \quad \text{y} \quad y_2(x) = x^{-1/2} \operatorname{sen} x\,.$$

Determine una solución general de la ecuación no homogénea

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{5/2} \qquad (x > 0)\,.$$

4.7 CONSIDERACIONES CUALITATIVAS PARA ECUACIONES CON COEFICIENTES VARIABLES Y ECUACIONES NO LINEALES

En esta sección analizamos algunas ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes *variables* y algunas ecuaciones *no* lineales. Primero mostraremos unos cuantos ejemplos para ilustrar las profundas diferencias que pueden ocurrir. Luego mostraremos cómo la analogía con el oscilador masa-resorte, discutida en la sección 4.1, puede aprovecharse para predecir algunas de las características cualitativas de ecuaciones más complicadas.

Para comenzar, veamos una ecuación lineal con coeficientes constantes, una ecuación lineal con coeficientes variables y dos ecuaciones no lineales.

(a) La ecuación

(1) $$3y'' + 2y' + 4y = 0$$

es lineal, homogénea con coeficientes constantes. Sabemos todo sobre estas ecuaciones; las soluciones son, en el peor de los casos, productos de polinomios por exponenciales por sinusoides en t, y se pueden encontrar soluciones únicas para cualesquiera datos prescritos $y(a)$, $y'(a)$ en cualquier instante $t = a$. Tiene la propiedad de superposición: Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones, también lo es $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$.

(b) La ecuación

(2) $$(\mathbf{1} - \boldsymbol{t^2})\boldsymbol{y''} - \mathbf{2}\boldsymbol{ty'} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

también tiene la propiedad de superposición, como se ve fácilmente. La ecuación (2) es una ecuación lineal con coeficientes variables. Es un caso particular de la **ecuación de Legendre** $(1 - t^2)y'' - 2ty' + \lambda y = 0$, la cual surge en el análisis de fenómenos de onda y difusión en coordenadas esféricas.

(c) Las ecuaciones

(3) $$y'' - 6y^2 = 0 \ ,$$

(4) $$y'' - 24y^{1/3} = 0$$

no comparten la propiedad de superposición debido a los términos con el cuadrado y la raíz cúbica de y (por ejemplo el término cuadrático y^2 no se reduce a $y_1^2 + y_2^2$) Son ecuaciones *no lineales*.†

Las soluciones de las ecuaciones lineales con coeficientes variables son más complicadas que las de las ecuaciones con coeficientes constantes. Por lo general, se hallan mediante laboriosas técnicas con series de potencias, como veremos en el capítulo 8. La ecuación de Legendre (2) tiene una solución sencilla, $y_1(t) = t$, como puede verse fácilmente mediante un cálculo mental. Su segunda solución linealmente independiente para $-1 < t < 1$ se toma por lo general como

(5) $$y_2(t) = \frac{t}{2}\ln\left(\frac{1 + t}{1 - t}\right) - 1 \ .$$

Observe en particular el comportamiento cerca de $t = \pm 1$; ¡ninguna de las soluciones de nuestras ecuaciones con coeficientes *constantes* divergía a un punto finito!

Podríamos haber anticipado el comportamiento problemático para la ecuación de Legendre en $t = \pm 1$ de haberla escrito como

(6) $$y'' = \frac{2ty' - 2y}{1 - t^2} \ .$$

†Aunque el término cuadrático y^2 convierte a la ecuación (3) en no lineal, la aparición de t^2 en (2) no impide su linealidad (en y).

Esta forma muestra claramente que la segunda derivada "explota" en, digamos, $t = 1$, a menos que $y'(1)$ y $y(1)$ sean iguales [llevando la fracción en (6) a la forma indeterminada 0/0]. De hecho, para nuestra solución bien comportada $y_1(t) = t$, tenemos que $y_1(1) = y'_1(1) = 1$.

Es fácil generalizar lo anterior: Una ecuación con coeficientes variables

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

no garantiza el tener una solución que cumpla con datos iniciales especificados en forma arbitraria $y(a)$, $y'(a)$ en $t = a$ si el punto a es un cero del coeficiente principal $a_2(t)$. Tales puntos se identifican con mayor precisión como "puntos singulares" en el capítulo 8.

No existen procedimientos generales para resolver ecuaciones no lineales. Sin embargo, el siguiente lema es muy útil en ciertas situaciones, como las ecuaciones (3) y (4). Tiene una interpretación física en extremo significativa, que exploraremos en el proyecto E del capítulo 5; por ahora sólo ofreceremos la tentación al lector mediante un nombre sugerente.

EL LEMA DE LA INTEGRAL DE LA ENERGÍA

Lema 3. Sea $y(t)$ una solución de la ecuación diferencial

(7) $$y'' = f(y)$$

donde $f(y)$ es una función continua que no depende de y' ni de la variable independiente t. Sea $F(y)$ una integral indefinida de $f(y)$; es decir,

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) \ .$$

Entonces la cantidad

(8) $$E(t) := \frac{1}{2}y'(t)^2 - F\big(y(t)\big)$$

es constante, esto es,

(9) $$\frac{d}{dt}E(t) = 0 \ .$$

Demostración. Esto es inmediato; insertamos (8), derivamos y aplicamos la ecuación diferencial (7):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}y'(t)^2 - F\big(y(t)\big)\right] \\ &= \frac{1}{2}2y'y'' - \frac{dF}{dy}y' \\ &= y'\left[y'' - f(y)\right] \\ &= 0 \ . \ \blacksquare\end{aligned}$$

Como resultado, una ecuación de la forma (7) se puede reducir a

$$\textbf{(10)} \qquad \frac{1}{2}(y')^2 - F(y) = K \ ,$$

para cierta constante K, que es equivalente a la ecuación *separable* de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2[F(y) + K]}$$

con la solución implícita a dos parámetros (sección 2.2)

$$\textbf{(11)} \qquad t = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2[F(y) + K]}} + c \ .$$

Usaremos la fórmula (11) para ilustrar algunas características excepcionales de las ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 1 Aplicar el lema de la integral de la energía para explorar las soluciones de la ecuación no lineal $y'' = 6y^2$, dada en (3).

SOLUCIÓN Como $6y^2 = \frac{d}{dy}(2y^3)$, la forma de solución (11) se convierte en

$$t = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2[2y^3 + K]}} + c \ .$$

Para simplificar los cálculos consideramos el signo positivo en las soluciones, con $K = 0$. Entonces vemos que $t = \int \frac{1}{2}y^{-3/2}\,dy = -y^{-1/2} + c$, o

$$\textbf{(12)} \qquad y(t) = (c - t)^{-2} \ ,$$

para cualquier valor de la constante c.

Es claro que esta ecuación es un enigma; las soluciones pueden explotar en $t = 1$, $t = 2$, $t = \pi$ o en cualquier otro lugar; además, ¡la ecuación 3 no proporciona pistas de por qué esto debe ocurrir! Por otro lado, hemos encontrado una familia *infinita* de soluciones linealmente independientes por pares (en vez de las *dos* esperadas). Aun así no podemos formar con ellas una solución que satisfaga (por ejemplo) $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$; todas nuestras soluciones (12) cumplen que $y'(0) = 2y(0)^{3/2}$ y la ausencia de un principio de superposición evita el uso de combinaciones lineales $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. ■

EJEMPLO 2 Aplicar el lema de la integral de la energía para explorar las soluciones de la ecuación no lineal $y'' = 24y^{1/3}$, dada en (4).

SOLUCIÓN Como $24y^{1/3} = \frac{d}{dy}(18y^{4/3})$, la fórmula (11) da

$$t = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2[18y^{4/3} + K]}} + c \ .$$

De nuevo consideramos el signo positivo y nos enfocamos en soluciones con $K = 0$. Luego vemos que $t = y^{1/3}/2 + c$. En particular, $y_1(t) = 8t^3$ es una solución y satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Pero observe que $y_2(t) + 0$ también es solución de (4) ¡*y satisface las mismas condiciones iniciales*! Por tanto, la característica de *unicidad*, ga-

rantizada para ecuaciones lineales con coeficientes constantes por el teorema 1 de la sección 4.2, puede fallar en el caso no lineal.

Así, estos ejemplos han demostrado algunas violaciones a las propiedades de existencia y unicidad (al igual que el "ser finitas") que aparecían en el caso de coeficientes constantes. No debe sorprendernos entonces que las técnicas de solución para las ecuaciones con coeficientes variables y no lineales de segundo orden sean más complicadas, si existen. Recuerde, sin embargo, que en la sección 4.3 vimos que nuestra familiaridad con la ecuación del oscilador masa-resorte

$$\textbf{(13)} \qquad F_{\text{externa}} = [\text{inercia}]y'' + [\text{amortiguamiento}]y' + [\text{rigidez}]y$$
$$= my'' + by' + ky$$

nos ayudó a hacer una idea de las características cualitativas de las soluciones de otras ecuaciones con coeficientes constantes. (Véase la figura 4.1, página 152). Llevando a otro nivel estas analogías, también podemos anticipar algunas características de las soluciones en los casos de coeficientes variables y no lineales. Una de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables más sencillas es

$$\textbf{(14)} \qquad y'' + ty = 0 \ .$$

EJEMPLO 3 Usar la analogía masa-resorte para predecir la naturaleza de la solución a la ecuación (14) para $t > 0$.

SOLUCIÓN Al comparar (13) con (14), vemos que la segunda ecuación describe un oscilador masa-resorte, donde la *rigidez del resorte* "k" varía con el tiempo; de hecho, se vuelve cada vez más rígido al transcurrir el tiempo ["k" $= t$ en la ecuación (14)]. Así, desde el punto de vista físico, es de esperar que haya oscilaciones cuya frecuencia aumente con el tiempo, mientras que la amplitud de las oscilaciones disminuye (debido a que el resorte es cada vez más difícil de estirar). Obtenida mediante cálculos numéricos, la solución de la figura 4.12 exhibe precisamente este comportamiento.

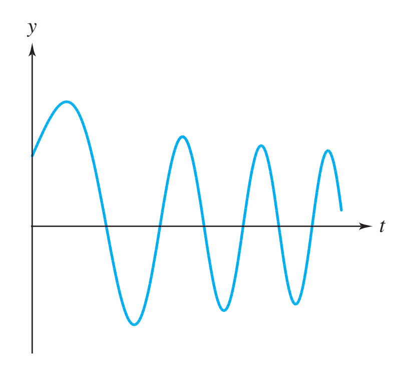


Figura 4.12 Solución de la ecuación (14)

Observación. Los esquemas para el cálculo numérico de las soluciones a ecuaciones de segundo orden aparecerán en la sección 5.3. Si se dispone de tales esquemas, ¿por qué el análisis cualitativo desarrollado en esta sección? La respuesta es que los métodos numéricos sólo proporcionan *aproximaciones* de las soluciones a problemas con valores iniciales y su exactitud puede ser difícil de predecir (en especial para las ecuaciones no lineales). Por

ejemplo, los métodos numéricos suelen ser ineficaces cerca de puntos singulares o en los grandes intervalos necesarios para estudiar el comportamiento asintótico. En este punto, los argumentos cualitativos pueden revelar lo razonable de la solución numérica.

Es fácil verificar (problema 1) que si $y(t)$ es una solución de la **ecuación de Airy**

(15) $$y'' - ty = 0 \ ,$$

entonces $y(-t)$ resuelve $y'' + ty = 0$, de modo que las "funciones de Airy" exhiben el comportamiento que se muestra en la figura 4.12 para *tiempos negativos*. Para t positiva, la ecuación de Airy tiene una rigidez *negativa* "k" $= -t$, cuya magnitud aumenta con el tiempo. Como observamos en la sección 4.3, la rigidez negativa tiende a reforzar y no a oponerse a los desplazamientos, de modo que las soluciones $y(t)$ crecen rápidamente con el tiempo (positivo). La solución conocida como la función de Airy del segundo tipo $\mathrm{Bi}(t)$, que aparece en la figura 4.13, se comporta conforme a lo esperado.

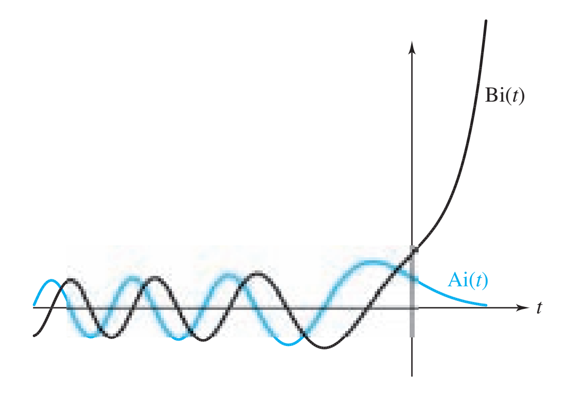


Figura 4.13 Funciones de Airy

En la sección 4.3 señalamos también que los sistemas masa-resorte con rigidez del resorte negativa pueden tener soluciones aisladas *acotadas* si el desplazamiento $y(0)$ y la velocidad $y'(0)$ iniciales se eligen precisamente para contraatacar la fuerza repulsiva del resorte. La función de Airy del primer tipo $\mathrm{Ai}(t)$, que también aparece en la figura 4.13, es tal solución del "resorte de Airy"; la velocidad inicial dirigida hacia dentro es apenas la adecuada para superar el empuje hacia afuera del resorte cada vez más rígido, y la masa tiende a un estado de equilibrio delicado $y(t) \equiv 0$.

Ahora veamos la **ecuación de Bessel**, que surge del análisis de fenómenos de ondas o difusión en coordenadas cilíndricas. La *ecuación de Bessel de orden n* se escribe

(16) $$y'' + \frac{1}{t}y' + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0 \ .$$

Es claro que hay irregularidades en $t = 0$, análogas a aquellas en $t = \pm 1$ para la ecuación de Legendre (2); en el capítulo 8 estudiaremos esto con detalle.

EJEMPLO 4 Aplicar la analogía masa-resorte para predecir características cualitativas de las soluciones a la ecuación de Bessel para $t > 0$.

SOLUCIÓN Al comparar (16) con el paradigma (13), observamos que:

- la inercia "m" = 1 se fija en la unidad.
- existe un amortiguamiento positivo ("b" = $1/t$), aunque se debilita con el tiempo; y
- la rigidez ("k" = $1 - n^2/t^2$) es positiva cuando $t > n$ y tiende a 1 cuando $t \to +\infty$.

Así, es de esperar que las soluciones oscilen con amplitudes que disminuyen lentamente (debido al amortiguamiento) y la frecuencia de la oscilación debe asentarse en un valor constante (dado por $\sqrt{k/m} = 1$ radián por unidad de tiempo, de acuerdo con los procedimientos de la sección 4.3). Las gráficas de las funciones de Bessel $J_n(t)$ y $Y_n(t)$ del primer y segundo tipo de orden $n = \frac{1}{2}$, ejemplifican estas predicciones cualitativas; véase la figura 4.14. El efecto de las singularidades en el coeficiente en $t = 0$ se manifiesta en la gráfica de $Y_{1/2}(t)$. ■

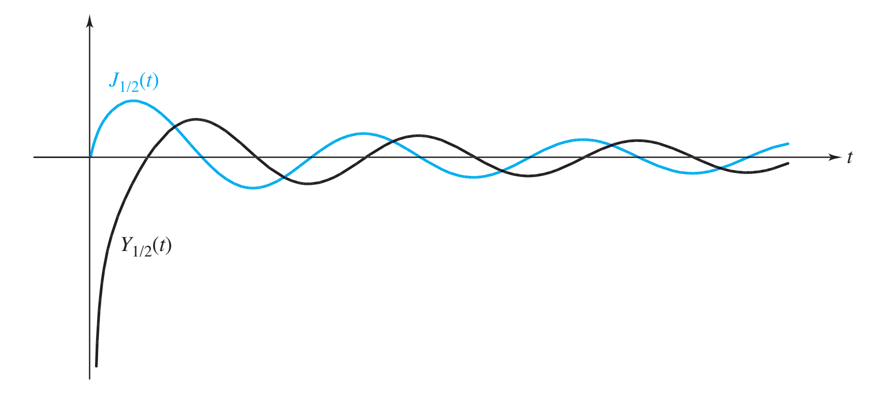


Figura 4.14 Funciones de Bessel

Aunque la mayoría de las funciones de Bessel deben calcularse con métodos de series de potencias, si el *orden n* es la mitad de un entero, entonces $J_n(t)$ y $Y_n(t)$ tienen expresiones explícitas. De hecho, $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$ sen t y $Y_{1/2}(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$. Usted puede verificar directamente que estas funciones resuelven la ecuación (16).

EJEMPLO 5 Dar un análisis cualitativo de la **ecuación de Bessel modificada** de orden n:

$$\textbf{(17)} \qquad y'' + \frac{1}{t}y' - \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0 \; .$$

SOLUCIÓN Esta ecuación también exhibe una masa unitaria y un amortiguamiento positivo decreciente. Sin embargo, la rigidez converge ahora a *menos uno*. Esperamos entonces que las soluciones típicas diverjan cuando $t \to +\infty$. La función de Bessel modificada del primer tipo $I_n(t)$ de orden $n = 2$ que aparece en la figura 4.15 sigue esta predicción, mientras que la función de Bessel modificada del segundo tipo $K_n(t)$ de orden $n = 2$ que aparece en la figura 4.15 exhibe el mismo tipo de equilibrio entre la posición y la velocidad inicial que teníamos para la función de Airy Ai(t). De nuevo, es evidente el efecto de la singularidad en $t = 0$. ■

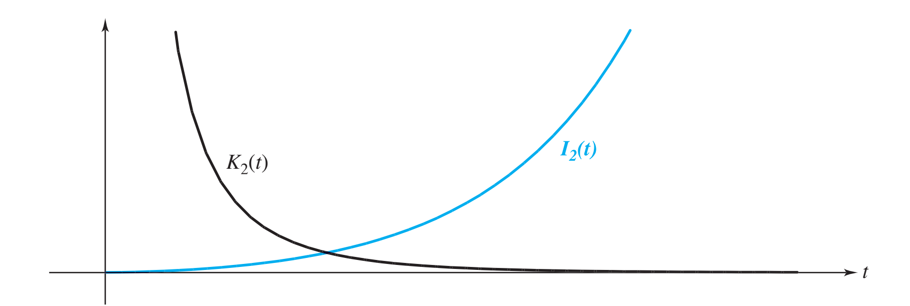


Figura 4.15 Funciones de Bessel modificadas

EJEMPLO 6 Usar el modelo masa-resorte para predecir características cualitativas de las soluciones a la **ecuación de Duffing** no lineal

(18) $$y'' + y + y^3 = y'' + (1 + y^2)y = 0 \;.$$

SOLUCIÓN Aunque la ecuación (18) es no lineal, puede compararse con el paradigma (13) si pensamos en una masa unitaria, sin amortiguamiento y una rigidez (positiva) "k" $= 1 + y^2$, que aumenta cuando el *desplazamiento* y crece. (Este efecto de rigidez creciente aparece en ciertos colchones por razones terapéuticas).† Tal resorte es cada vez más rígido cuando la masa se aleja, aunque regresa a su valor original cuando la masa regresa. Estas excursiones de gran amplitud deben oscilar más rápido que las de baja amplitud, y las formas sinusoidales en las gráficas de $y(t)$ deben "pellizcarse" en sus picos. Estas predicciones cualitativas se muestran en las soluciones numéricas de la figura 4.16. ■

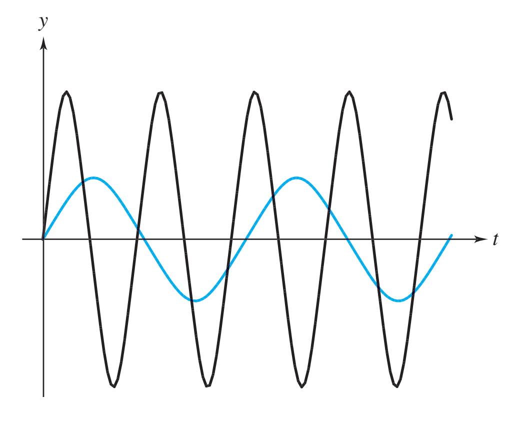


Figura 4.16 Gráficas solución de la ecuación de Duffing

La fascinante **ecuación de van der Pol**

(19) $$y'' - (1 - y^2)y' + y = 0$$

surgió en el estudio de las oscilaciones eléctricas observadas en los tubos de vacío.

†Los editores opinaron que es mejor dejar a la imaginación las gráficas de las oscilaciones en un colchón terapéutico.

EJEMPLO 7 Predecir el comportamiento de las soluciones a la ecuación (19) usando el modelo masa-resorte.

SOLUCIÓN Al comparar con el paradigma (13), observamos una masa y rigidez unitarias, amortiguamiento positivo [“b” $= -(1 - y^2)$] cuando $|y(t)| < 1$. *Así, la fricción amortigua los movimientos de alta amplitud pero energiza las oscilaciones pequeñas*. El resultado es que todas las soluciones (no nulas) tienden a un *ciclo límite* tal que la fricción sufrida cuando $|y(t)| > 1$ se compensa con el empuje de fricción negativa cuando $|y(t)| < 1$. La figura 4.17, generada por computadora, muestra la convergencia al ciclo límite para algunas soluciones a la ecuación de van der Pol. ■

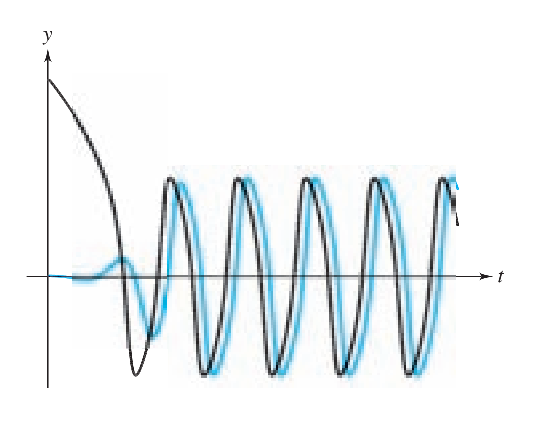


Figura 4.17 Soluciones a la ecuación de van der Pol

Figura 4.18 Un péndulo

Por último, consideremos el movimiento del péndulo que aparece en la figura 4.18. Este movimiento se mide mediante el ángulo $\theta(t)$ que forma el péndulo en el instante t con la recta vertical que pasa por O. Como muestra el diagrama, la componente de gravedad, que ejerce una torca sobre el péndulo y por ende acelera la velocidad angular $d\theta/dt$, está dada por $-mg$ sen θ. En consecuencia, el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, *torca igual a la razón de cambio del momento angular*, indica (véase el problema 7)

(20) $$m\ell^2\theta'' = -\ell mg \operatorname{sen}\theta \ ,$$

o bien

(21) $$m\theta'' + m\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0 \ .$$

EJEMPLO 8 Dar un análisis cualitativo del movimiento del péndulo.

SOLUCIÓN Si escribimos (21) como

$$m\theta'' + \frac{mg}{\ell}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\theta = 0$$

y comparamos con el paradigma (13), vemos una masa fija m, amortiguamiento nulo y una rigidez dada por

$$\text{“}k\text{”} = \frac{mg}{\ell}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \ .$$

La gráfica de esta rigidez aparece en la figura 4.19, donde vemos que los movimientos de baja amplitud son controlados por una rigidez de resorte casi constante e igual a mg/ℓ, las consideraciones de la sección 4.3 dictan la conocida fórmula

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

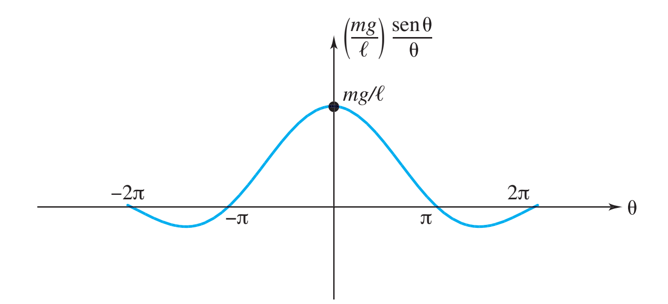


Figura 4.19 "Rigidez" del péndulo

para la frecuencia angular de las oscilaciones casi sinusoidales. Véase la figura 4.20, que compara una solución de la ecuación (21) generada por computadora con la solución de la ecuación con rigidez constante con las mismas condiciones iniciales.†

Sin embargo, para movimientos mayores, la rigidez decreciente distorsiona la naturaleza sinusoidal de la gráfica de $\theta(t)$ y reduce la frecuencia. Esto es evidente en la figura 4.21.

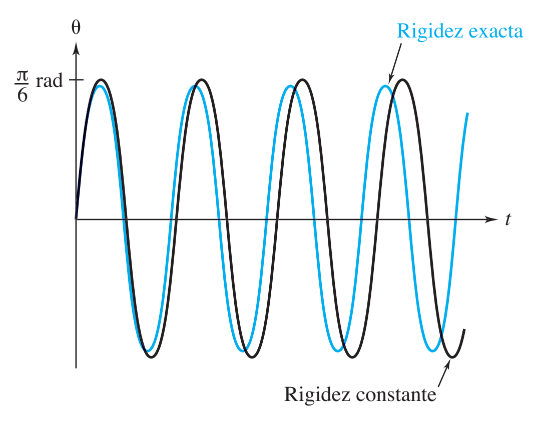


Figura 4.20 Movimiento del péndulo con baja amplitud

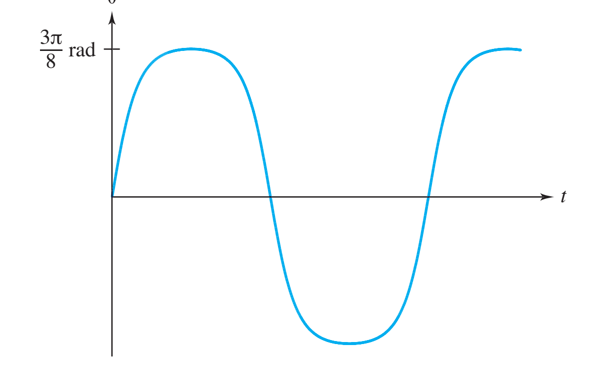


Figura 4.21 Movimiento del péndulo con alta amplitud

Por último, si el movimiento tiene tanta energía que θ alcanza el valor π, la rigidez cambia de signo e incita al desplazamiento; el péndulo pasa el ápice y aumenta su velocidad al caer; este movimiento giratorio se repite en forma continua. Véase la figura 4.22 en la página 206. ■

†Esta última se identifica como la *ecuación linealizada* en el proyecto D.

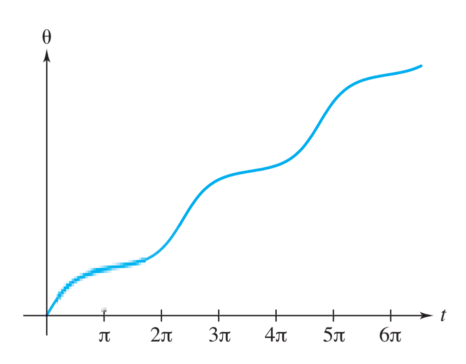


Figura 4.22 Movimiento del péndulo con gran amplitud

El cálculo de las soluciones a la ecuaciones de Legendre, Bessel y Airy y el análisis de las ecuaciones no lineales de Duffing, van der Pol y el péndulo, constituyeron un reto para muchos de los grandes matemáticos del pasado. Así, es gratificante observar que el análisis cualitativo aquí desarrollado descubre sus principales características.

EJERCICIOS 4.7

1. Muestre que si $y(t)$ satisface $y'' - ty = 0$, entonces $y(-t)$ satisface $y'' + ty = 0$.
2. Use el paradigma (13). ¿Cuáles son la inercia, el amortiguamiento y la rigidez en la ecuación $y'' - 6y^2 = 0$? Si $y > 0$, ¿cuál es el signo de la "constante de rigidez"? ¿Su respuesta ayuda a explicar el comportamiento de fuga de las soluciones $y(t) = 1/(c - t)^2$?
3. Trate de predecir las características cualitativas de la solución a $y'' - 6y^2 = 0$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$. Compare con la figura 4.23, generada por computadora. [*Sugerencia*: Analice el signo de la rigidez del resorte].

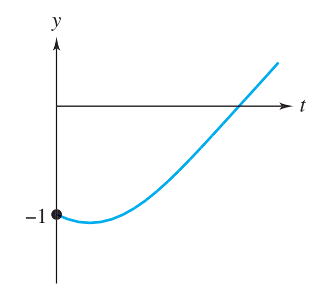


Figura 4.23 Solución para el problema 3

4. Muestre que las *tres* soluciones $1/(1 - t)^2$, $1/(2 - t)^2$ y $1/(3 - t)^2$ de $y'' - 6y^2 = 0$ son linealmente independientes en $(-1,1)$. (Véase el problema 39 de los ejercicios 4.2, página 166).
5. **(a)** Use el lema de la integral de la energía para deducir la familia de soluciones $y(t) = 1/(t - c)$ a la ecuación $y'' = 2y^3$.
   (b) Para $c \neq 0$, muestre que estas soluciones son linealmente independientes por parejas, para distintos valores de c en un intervalo adecuado en torno de $t = 0$.
   (c) Muestre que ninguna de estas soluciones satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
6. Use el lema de la integral de la energía para mostrar que los movimientos del oscilador masa-resorte libre sin amortiguamiento $my'' + ky = 0$ cumplen
$$m(y')^2 + ky^2 = \text{ constante }.$$
7. **Ecuación del péndulo.** Para deducir la ecuación del péndulo (21), realice los pasos siguientes.
   (a) El *momento angular* de la masa del péndulo m medido en torno del soporte O de la figura 4.18 en la página 204 está dado por el producto de la longitud del "brazo de palanca" ℓ y el componente del momento vectorial mv perpendicular

al brazo de la palanca. Muestre que esto da como resultado

$$\text{momento angular} = m\ell^2 \frac{d\theta}{dt} \ .$$

(b) La *torca* producida por la gravedad es igual al producto de la longitud del brazo de palanca ℓ por la componente de la fuerza (vectorial) de gravedad $m\mathbf{g}$ perpendicular al brazo de palanca. Muestre que esto implica

$$\text{torca} = -\ell mg \text{ sen } \theta \ .$$

(c) Ahora use la ley de Newton para el movimiento rotacional y deduzca la ecuación del péndulo (20).

8. Use el lema de la integral de la energía para mostrar que los movimientos del péndulo cumplen

$$\frac{(\theta')^2}{2} - \frac{g}{\ell} \cos \theta = \text{constante} \ .$$

9. Use el resultado del problema 8 para determinar el valor de $\theta'(0)$, la velocidad inicial que debe impartirse a un péndulo en reposo, para que éste tienda (pero no cruce) el ápice de su movimiento. Haga $\ell = g$.

10. Use el resultado del problema 8 para demostrar que si el péndulo de la figura 4.18 se libera *desde el reposo* con un ángulo $\alpha, 0 < \alpha < \pi$, entonces $|\theta(t)| \le \alpha$ a para toda t. [*Sugerencia*: Las condiciones iniciales son $\theta(0) = \alpha$, $\theta'(0) = 0$; muestre que la *constante* del problema 8 es igual a $-(g/\ell) \cos \alpha$].

11. Use la analogía masa-resorte para explicar la naturaleza cualitativa de las soluciones de la **ecuación de Rayleigh**

(22) $\quad \mathbf{y'' - [1 - (y')^2]y' + y = 0}$

que aparecen en las figuras 4.24 y 4.25.

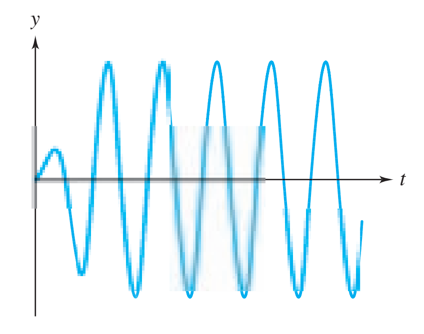


Figura 4.24 Solución de la ecuación de Rayleigh

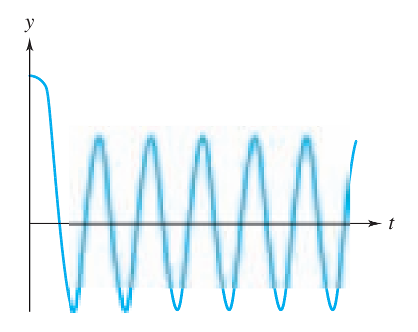


Figura 4.25 Solución de la ecuación de Rayleigh

12. Verifique que la función $y_2(t)$ en la ecuación (5) resuelve la ecuación de Legendre (2).

13. La figura 4.26 de la página 208 contiene las gráficas de soluciones a las ecuaciones de Duffing, Airy y van der Pol. Trate de relacionar la solución con la ecuación.

14. Verifique que las fórmulas para las funciones de Bessel $J_{1/2}(t)$, $Y_{1/2}(t)$ realmente resuelven la ecuación (16).

15. Use la analogía con el oscilador masa-resorte para decidir si todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales permanecen acotadas cuando $t \to +\infty$.

(a) $y'' + t^2 y = 0$ **(b)** $y'' - t^2 y = 0$
(c) $y'' + y^5 = 0$ **(d)** $y'' + y^6 = 0$
(e) $y'' + (4 + 2 \cos t)y = 0$ (**ec. de Mathieu**)
(f) $y'' + ty' + y = 0$ **(g)** $y'' - ty' - y = 0$

16. Use el lema de la integral de la energía para mostrar que toda solución de la ecuación de Duffing (18) permanece acotada; es decir, que $|y(t)| \le M$ para cierta M. [*Sugerencia*: Justifique primero que $y^2/2 + y^4/4 \le K$ para alguna K].

17. Día del juicio final. La Tierra gira en torno del Sol en una órbita casi circular con radio $r = a$, completando una vuelta en el tiempo $T = 2\pi(a^3/GM)^{1/2}$, que es un año terrestre; aquí, M es la masa del Sol y G es la constante de gravitación universal. La fuerza gravitacional del Sol sobre la Tierra está dada por GMm/r^2, donde m es la masa de la Tierra. Por lo tanto, si la Tierra "se detuviese", perdiendo su velocidad orbital, seguiría una línea recta hacia el Sol, de acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \ .$$

Si esta catástrofe ocurre, ¿qué fracción del año normal T tardaría la Tierra en estrellarse contra el Sol (es decir, en alcanzar $r = 0$)? [*Sugerencia*: Use el lema de la integral de la energía y las condiciones iniciales $r(0) = a$, $r'(0) = 0$].

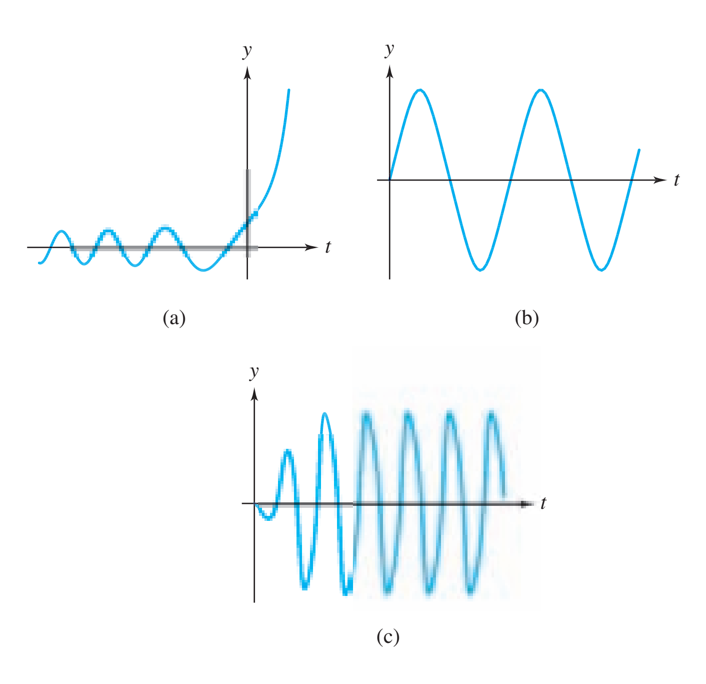


Figura 4.26 Gráficas solución para el problema 13

4.8 UNA MIRADA DE CERCA A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS LIBRES

En esta sección regresamos al sistema masa-resorte de la figura 4.1 (página 152) y analizaremos su movimiento con más detalle. La ecuación que lo describe es

$$\textbf{(1)} \qquad F_{\text{ext}} = [\text{inercia}]\frac{d^2y}{dt^2} + [\text{amortiguamiento}]\frac{dy}{dt} + [\text{rigidez}]y$$

$$= my'' + by' + ky \ .$$

Nos centraremos en un caso sencillo, cuando $b = 0$ y $F_{\text{externa}} = 0$, llamado el caso **libre sin amortiguamiento**. Entonces, la ecuación (1) se reduce a

$$\textbf{(2)} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

y, al dividir entre m, se tiene

$$\textbf{(3)} \qquad \boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0} \ ,$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$. La ecuación auxiliar asociada a (3) es $r^2 + \omega^2 = 0$, que tiene raíces complejas conjugadas $\pm\omega i$. Por tanto, una solución general de (3) es

$$\textbf{(4)} \qquad \boldsymbol{y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t} \ .$$

Podemos expresar $y(t)$ en la forma más conveniente

$$\textbf{(5)} \qquad \boldsymbol{y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)} \ ,$$

con $A \geq 0$, haciendo $C_1 = A \operatorname{sen} \phi$ y $C_2 = A \cos \phi$. Es decir,

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) &= A \cos \omega t \operatorname{sen} \phi + A \operatorname{sen} \omega t \cos \phi \\ &= C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \ . \end{aligned}$$

Al despejar A y ϕ en términos de C_1 y C_2, se tiene

$$\textbf{(6)} \qquad \boldsymbol{A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tan \phi = \frac{C_1}{C_2}} \ ,$$

donde el cuadrante en que se encuentra ϕ queda determinado por los signos de C_1 y C_2. Esto se debe a que $\operatorname{sen} \phi$ tiene el mismo signo que C_1 ($\operatorname{sen} \phi = C_1/A$) y $\cos \phi$ tiene el mismo signo que C_2 ($\cos \phi = C_2/A$). Por ejemplo, si $C_1 > 0$ y $C_2 < 0$, entonces ϕ está en el segundo cuadrante. (Observe que en particular ϕ no es simplemente el arco tangente de C_1/C_2, que estaría en el cuarto cuadrante).

Es evidente de (5) que, como dijimos en la sección 4.1, el movimiento de una masa en un sistema *libre sin amortiguamiento* no es más que una onda sinusoidal, o lo que se llama un **movimiento armónico simple**. (Véase la figura 4.27). La constante A es la amplitud del movimiento y ϕ es el ángulo fase. El movimiento es periódico con **periodo** $2\pi/\omega$, y **frecuencia natural** $\omega/2\pi$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$. El periodo se mide en unidades de tiempo y la frecuencia natural en periodos (o ciclos) por unidad de tiempo. La constante ω es la **frecuencia angular** para la función seno en (5) y se mide en radianes por unidad de tiempo. En resumen:

$$\begin{aligned} &\text{frecuencia angular} = \omega = \sqrt{k/m} \quad \text{(radianes/segundo)} \\ &\text{frecuencia natural} = \omega/2\pi \quad \text{ciclos/segundo)} \\ &\text{periodo} = 2\pi/\omega \quad \text{(segundo)} \end{aligned}$$

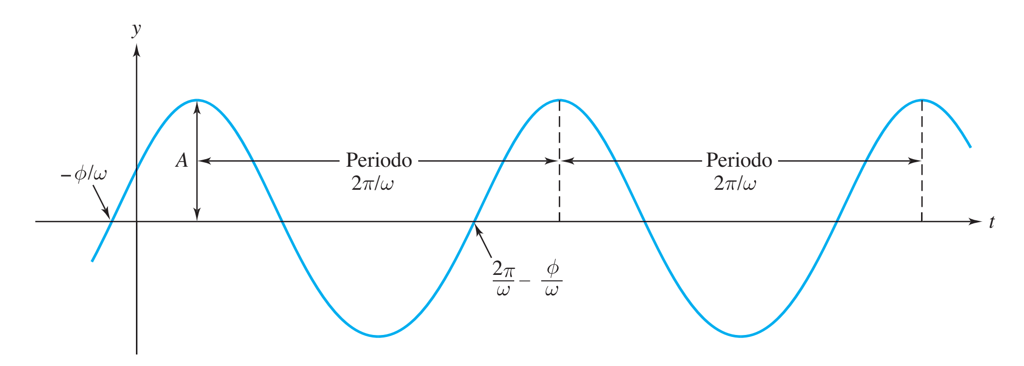


Figura 4.27 Movimiento armónico simple con vibraciones libres sin amortiguamiento

Observe que la amplitud y el ángulo fase dependen de las constantes C_1 y C_2, que a su vez quedan determinadas por la posición y velocidad iniciales de la masa. Sin embargo, el periodo y la frecuencia dependen sólo de k y m y no de las condiciones iniciales.

EJEMPLO 1 Se fija una masa de 1/8 kg a un resorte con rigidez $k = 16$ N/m, como se muestra en la figura 4.1. La masa se desplaza 1/2 m a la derecha del punto de equilibrio y luego se le imparte una velocidad hacia afuera (hacia la derecha) de $\sqrt{2}$ m/seg. Despreciando cualesquiera fuerzas de amortiguamiento o externas que puedan estar presentes, determinar la ecuación de movimiento de la masa, junto con su amplitud, periodo y frecuencia natural. ¿Después de cuánto tiempo pasa la masa por el punto de equilibrio?

SOLUCIÓN Como tenemos un caso de vibración libre sin amortiguamiento, la ecuación de movimiento es (3). Así, vemos que la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16}{1/8}} = 8\sqrt{2} \quad \text{rad /seg} \ .$$

Al sustituir este valor de ω en (4) se tiene

$$\textbf{(7)} \qquad y(t) = C_1 \cos\left(8\sqrt{2}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(8\sqrt{2}t\right) \ .$$

Ahora usamos las condiciones iniciales $y(0) = 1/2$ m y $y'(0) = \sqrt{2}$ m/seg, para hallar C_1 y C_2 en (7). Es decir,

$$1/2 = y(0) = C_1 \ ,$$
$$\sqrt{2} = y'(0) = 8\sqrt{2}C_2 \ ,$$

de modo que $C_1 = 1/2$ y $C_2 = 1/8$. Por tanto, la ecuación de movimiento de la masa es

$$\textbf{(8)} \qquad y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(8\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}\left(8\sqrt{2}t\right) \ .$$

Para expresar $y(t)$ en la forma alternativa (5), hacemos

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(1/2)^2 + (1/8)^2} = \frac{\sqrt{17}}{8} \ ,$$

$$\tan\phi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1/2}{1/8} = 4 \ .$$

Como C_1 y C_2 son ambos positivos, ϕ está en el primer cuadrante, de modo que $\phi = \arctan 4 \approx 1.326$. Por tanto,

$$\textbf{(9)} \qquad y(t) = \frac{\sqrt{17}}{8}\operatorname{sen}\left(8\sqrt{2}t + \phi\right) \ .$$

Así, la amplitud A es $\sqrt{17}/8$m, y el ángulo fase ϕ es aproximadamente 1.326 radianes. El periodo es $P = 2\pi/\omega = 2\pi/\left(8\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\pi/8$ segundos, y la frecuencia natural es $1/P = 8/\left(\sqrt{2}\pi\right)$ ciclos por segundo.

Por último, para determinar el momento en que la masa pasará por la posición de equilibrio, $y = 0$, debemos resolver la ecuación trigonométrica

$$\textbf{(10)} \qquad y(t) = \frac{\sqrt{17}}{8}\operatorname{sen}\left(8\sqrt{2}t + \phi\right) = 0$$

en términos de t. La ecuación (10) se satisface siempre que

$$\textbf{(11)} \qquad 8\sqrt{2}t + \phi = n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{n\pi - \phi}{8\sqrt{2}} \approx \frac{n\pi - 1.326}{8\sqrt{2}} ,$$

donde n es entero. Al hacer $n = 1$ en (11) determinamos el primer instante t en que la masa cruza la posición de equilibrio:

$$t = \frac{\pi - \phi}{8\sqrt{2}} \approx 0.16 \text{ seg} . \blacksquare$$

Por supuesto, en la mayoría de las aplicaciones del análisis de vibraciones existe cierto tipo de fuerza de fricción o de amortiguamiento que afecta las vibraciones. Esta fuerza puede deberse a algún componente del sistema, como un amortiguador en un auto, o bien un medio que rodea al sistema, como el aire o algún líquido. Ahora estudiaremos los efectos del amortiguamiento sobre las vibraciones libres, de modo que la ecuación (2) se generaliza a

$$\textbf{(12)} \qquad \boldsymbol{m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0} .$$

La ecuación auxiliar asociada a (12) es

$$\textbf{(13)} \qquad mr^2 + br + k = 0 ,$$

y sus raíces son

$$\textbf{(14)} \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk} .$$

Como vimos en las secciones 4.2 y 4.3, la forma de la solución a (12) depende de la naturaleza de estas raíces y, en particular, del discriminante $b^2 - 4mk$.

Movimiento subamortiguado u oscilatorio $(b^2 < 4mk)$

Cuando $b^2 < 4mk$, el discriminante $b^2 - 4mk$ es negativo y existen dos raíces complejas conjugadas de la ecuación auxiliar (13). Estas raíces son $\alpha \pm i\beta$, donde

$$\textbf{(15)} \qquad \alpha := -\frac{b}{2m} , \qquad \beta := \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2} .$$

Por tanto, una solución general de (12) es

$$\textbf{(16)} \qquad y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t) .$$

Como en el caso del movimiento armónico simple, podemos expresar $y(t)$ en la forma alternativa

$$\textbf{(17)} \qquad y(t) = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \phi) ,$$

donde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\tan \phi = C_1/C_2$. Ahora es evidente que $y(t)$ es el producto de un **factor de amortiguamiento** exponencial,

$$Ae^{\alpha t} = Ae^{-(b/2m)t} ,$$

y un factor sinusoidal $\operatorname{sen}(\beta t + \phi)$, que produce el movimiento oscilatorio. Debido a que el factor seno varía entre -1 y 1 con periodo $2\pi/\beta$, la solución $y(t)$ varía entre $-Ae^{\alpha t}$ y $Ae^{\alpha t}$

con **cuasiperiodo** $P = 2\pi/\beta = 4m\pi/\sqrt{4mk - b^2}$ y **cuasifrecuencia** $1/P$. Además, como b y m son positivos, $\alpha = -\beta/2m$ es negativo, de modo que el factor exponencial tiende a cero cuando $t \to +\infty$. En la figura 4.28 aparece la gráfica de una solución típica. El sistema se llama **subamortiguado**, pues no hay un amortiguamiento suficiente (b es demasiado pequeño) para evitar que el sistema oscile.

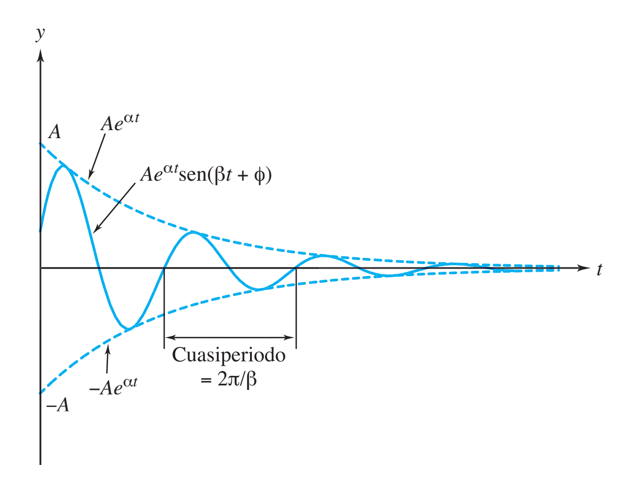


Figura 4.28 Movimiento oscilatorio amortiguado

Es fácil ver que cuando $b \to 0$, el factor de amortiguamiento tiende a la constante A y la cuasifrecuencia tiende a la frecuencia natural del movimiento armónico subamortiguado correspondiente. La figura 4.28 demuestra que los valores de t donde la gráfica de $y(t)$ toca a las curvas exponenciales $\pm Ae^{\alpha t}$ son cercanos (pero no iguales) a los mismos valores de t donde $y(t)$ alcanza sus valores máximos y mínimos (véase el problema 13).

Movimiento sobreamortiguado ($b^2 > 4mk$)

Cuando $b^2 > 4mk$, el discriminante $b^2 - 4mk$ es positivo y hay dos raíces reales distintas de la ecuación auxiliar (13):

$$\textbf{(18)} \qquad r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}\ , \qquad r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}\ .$$

Por tanto, en este caso una solución general de (12) es

$$\textbf{(19)} \qquad y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}\ .$$

Es claro que r_2 es negativa y como $b^2 > b^2 - 4mk$ (es decir, $b > \sqrt{b^2 - 4mk}$), se sigue que r_1 también es negativa. Por tanto, cuando $t \to +\infty$, las dos exponenciales en (19) decaen y $y(t) \to 0$. Además, como

$$y'(t) = C_1r_1e^{r_1t} + C_2r_2e^{r_2t} = e^{r_1t}\left(C_1r_1 + C_2r_2e^{(r_2-r_1)t}\right)\ ,$$

vemos que la derivada es idénticamente nula (cuando $C_1 = C_2 = 0$) o se anula a lo más en un valor de t (cuando el factor entre paréntesis se anula). Si se ignora la solución trivial

$y(t) \equiv 0$, esto implica que $y(t)$ tiene a lo más un máximo o mínimo local para $t > 0$. Por tanto, $y(t)$ *no oscila*. Esto deja, desde un punto de vista cualitativo, sólo tres posibilidades para el movimiento de $y(t)$, de acuerdo con las condiciones iniciales; éstas se ilustran en la figura 4.29. El caso en que $b^2 > 4mk$ se llama un movimiento **sobreamortiguado**.

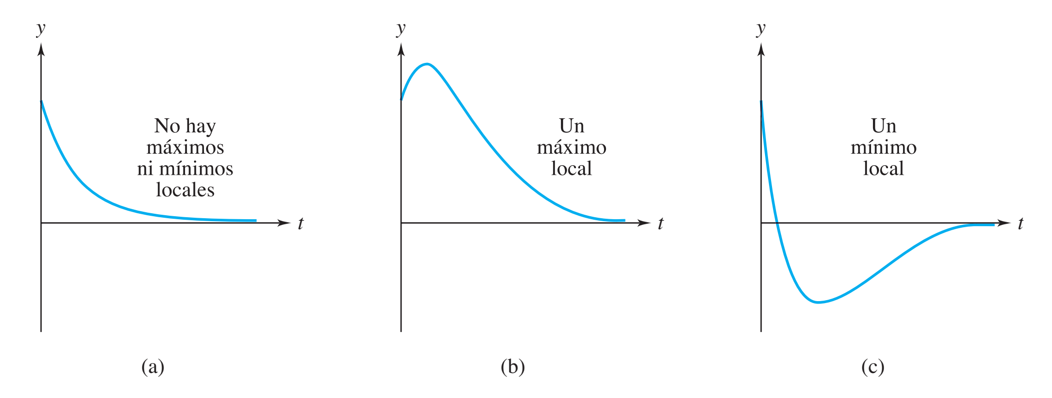


Figura 4.29 Vibraciones sobreamortiguadas

Movimiento críticamente amortiguado $(b^2 = 4mk)$

Cuando $b^2 = 4mk$, el discriminante $b^2 - 4mk$ se anula y la ecuación auxiliar tiene la raíz repetida $-b/2m$. Por tanto, una solución general de (12) es

(20) $$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-(b/2m)t} .$$

Para comprender el movimiento descrito por $y(t)$ en (20), primero consideramos el comportamiento de $y(t)$ cuando $t \to +\infty$. Por la regla de L'Hôpital,

(21) $$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1 + C_2 t}{e^{(b/2m)t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_2}{(b/2m)e^{(b/2m)t}} = 0$$

(recuerde que $b/2m > 0$). Por tanto, $y(t)$ se extingue hasta anularse cuando $t \to +\infty$. A continuación, como

$$y'(t) = \left(C_2 - \frac{b}{2m}C_1 - \frac{b}{2m}C_2 t\right)e^{-(b/2m)t} ,$$

vemos de nuevo que una solución no trivial puede tener a lo más un máximo o un mínimo local para $t > 0$, de modo que el movimiento *no* es oscilatorio. Si b fuese ligeramente menor, habría oscilaciones. Así, el caso especial en que $b^2 = 4mk$ es un movimiento **críticamente amortiguado**. Cualitativamente, los movimientos críticamente amortiguados son similares a los movimientos sobreamortiguados (véase de nuevo la figura 4.29).

EJEMPLO 2 Supóngase que el movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento queda descrito mediante

(22) $$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 25y = 0 ; \qquad y(0) = 1 , \qquad y'(0) = 0 .$$

Determine la ecuación de movimiento y bosqueje su gráfica para los tres casos en que $b = 6$, 10 y 12.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar para (22) es

(23) $$r^2 + br + 25 = 0\ ,$$

cuyas raíces son

(24) $$r = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 100}\ .$$

Caso 1. Cuando $b = 6$, las raíces de (24) son $-3 \pm 4i$. Éste es entonces un caso de subamortiguamiento y la ecuación de movimiento tiene la forma

(25) $$y(t) = C_1 e^{-3t}\cos 4t + C_2 e^{-3t}\,\text{sen}\, 4t\ .$$

Al hacer $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ se obtiene el sistema

$$C_1 = 1\ , \qquad -3C_1 + 4C_2 = 0\ ,$$

cuya solución es $C_1 = 1, C_2 = 3/4$. Para expresar $y(t)$ como el producto de un factor de amortiguamiento y un factor sinusoidal [recuerde la ecuación (17)], hacemos

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{5}{4}\ , \qquad \tan\phi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{3}\ ,$$

donde ϕ es ángulo en el primer cuadrante, pues C_1 y C_2 son ambos positivos. Entonces

(26) $$y(t) = \frac{5}{4}e^{-3t}\,\text{sen}(4t + \phi)\ ,$$

donde $\phi = \arctan(4/3) \approx 0.9273$. El movimiento de resorte subamortiguado se muestra en la figura 4.30(a).

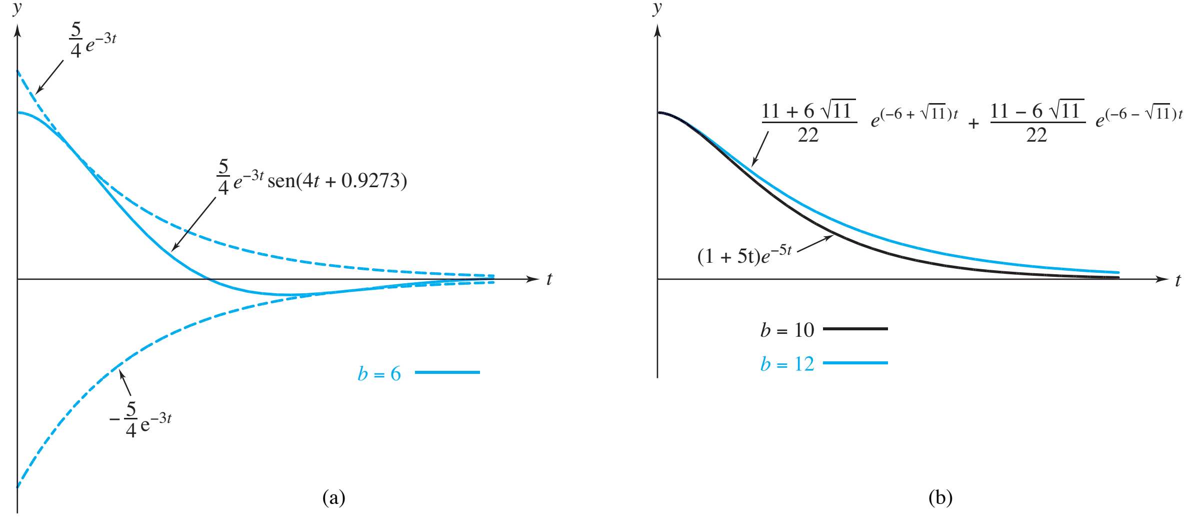


Figura 4.30 Soluciones para diversos valores de b

Caso 2. Cuando $b = 10$, sólo hay una raíz (repetida) a la ecuación auxiliar (23), a saber, $r = -5$. Éste es un caso de amortiguamiento crítico, y la ecuación de movimiento tiene la forma

(27) $$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-5t} .$$

Al hacer $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ tenemos

$$C_1 = 1 , \qquad C_2 - 5C_1 = 0 ,$$

de modo que $C_1 = 1$, $C_2 = 5$. Así,

(28) $$y(t) = (1 + 5t)e^{-5t} .$$

La gráfica de $y(t)$ dada en (28) se representa mediante la curva inferior de la figura 4.30(b). Observe que $y(t)$ se anula sólo para $t = -1/5$ y por tanto no cruza el eje t para $t > 0$.

Caso 3. Cuando $b = 12$, las raíces de la ecuación auxiliar son $-6 \pm \sqrt{11}$. Éste es un caso de sobreamortiguamiento y la ecuación de movimiento tiene la forma

(29) $$y(t) = C_1 e^{\left(-6+\sqrt{11}\right)t} + C_2 e^{\left(-6-\sqrt{11}\right)t} .$$

Al hacer $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ tenemos

$$C_1 + C_2 = 1 , \qquad \left(-6 + \sqrt{11}\right)C_1 + \left(-6 - \sqrt{11}\right)C_2 = 0 ,$$

de donde $C_1 = \left(11 + 6\sqrt{11}\right)/22$ y $C_2 = \left(11 - 6\sqrt{11}\right)/22$. Por tanto,

(30) $$\begin{aligned} y(t) &= \frac{11 + 6\sqrt{11}}{22} e^{\left(-6+\sqrt{11}\right)t} + \frac{11 - 6\sqrt{11}}{22} e^{\left(-6-\sqrt{11}\right)t} \\ &= \frac{e^{\left(-6+\sqrt{11}\right)t}}{22}\left\{11 + 6\sqrt{11} + \left(11 - 6\sqrt{11}\right)e^{-2\sqrt{11}t}\right\} . \end{aligned}$$

La gráfica de este movimiento sobreamortiguado se representa mediante la curva superior en la figura 4.30 (b). ■

Es interesante observar en el ejemplo 2 que cuando el sistema está subamortiguado ($b = 6$), la solución tiende a cero como e^{-3t}; cuando el sistema está críticamente amortiguado ($b = 10$), la solución tiende a cero casi como e^{-5t}; y cuando el sistema está sobreamortiguado ($b= 12$), la solución tiende a cero como $e^{\left(-6+\sqrt{11}\right)t} \approx e^{-2.68t}$. Esto significa que si el sistema está subamortiguado, no sólo oscila sino que se extingue más lentamente que en el caso críticamente amortiguado. Además, si el sistema está sobreamortiguado, de nuevo se extingue más lentamente que en el caso crítico (lo que coincide con nuestra intuición física de que las fuerzas de amortiguamiento limitan el retorno al equilibrio).

EJEMPLO 3 Una masa de $1/4$ de kg está unida a un resorte con una rigidez de 4 N/m como se muestra en la figura 4.31(a) de la página 216. La constante de amortiguamiento b para el sistema es de 1 N-seg/m. Si la masa se desplaza $1/2$ m a la izquierda y recibe una velocidad inicial de 1 m/seg a la izquierda, determine la ecuación de movimiento. ¿Cuál es el máximo desplazamiento que alcanzará la masa?

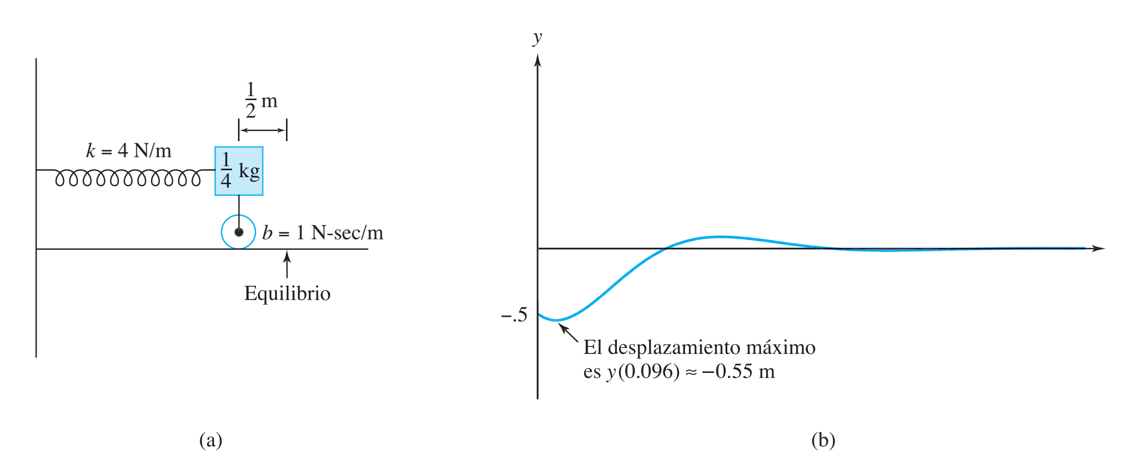


Figura 4.31 Sistema masa-resorte y gráfica del movimiento para el ejemplo 3

SOLUCIÓN Al sustituir los valores de m, b y k en la ecuación (12) e imponer las condiciones iniciales, obtenemos el problema con valores iniciales

$$\textbf{(31)} \qquad \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 4y = 0 \; ; \qquad y(0) = -\frac{1}{2} \, , \quad y'(0) = -1 \; .$$

Los signos negativos de las condiciones iniciales indican el hecho de que los desplazamientos y el empuje inicial son hacia la izquierda.

Se puede verificar fácilmente que la solución a (31) es

$$\textbf{(32)} \qquad y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}\cos\left(2\sqrt{3}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2t}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{3}t\right) \; ,$$

o bien,

$$\textbf{(33)} \qquad y(t) = \sqrt{\frac{7}{12}}e^{-2t}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{3}t + \phi\right) \; ,$$

donde $\tan \phi = \sqrt{3}/2$y ϕ está en el tercer cuadrante pues $C_1 = -1/2$ y $C_2 = -1/\sqrt{3}$ son ambos negativos. (Véase un bosquejo de $y(t)$ en la figura 4.31(b)).

Para determinar el desplazamiento máximo desde el equilibrio, debemos determinar el valor máximo de $|y(t)|$ sobre la gráfica de la figura 4.31(b). Como $y(t)$ se extingue en forma exponencial, esto ocurrirá en el primer punto crítico de $y(t)$. Al calcular $y'(t)$ de (32), igualar a cero y resolver se tiene

$$y'(t) = e^{-2t}\left\{\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{3}t\right) - \cos\left(2\sqrt{3}t\right)\right\} = 0 \; ,$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{3}t\right) = \cos\left(2\sqrt{3}t\right) \; ,$$

$$\tan\left(2\sqrt{3}t\right) = \frac{\sqrt{3}}{5} \; .$$

Así, la primera raíz positiva es

$$t = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.096 \ .$$

Al sustituir este valor para t en la ecuación (32) o (33) se tiene que $y(0.096) \approx -0.55$. Por tanto, el desplazamiento máximo es aproximadamente 0.55 m y aparece a la izquierda del equilibrio. ■

EJERCICIOS 4.8

Todos los problemas se refieren a la configuración masa-resorte que aparece en la figura 4.1, página 152.

1. Una masa de 3 kg está unida a un resorte con rigidez $k = 48$ N/m. La masa se desplaza 1/2 m a la izquierda del punto de equilibrio y recibe una velocidad de 2 m/seg hacia la derecha. La fuerza de amortiguamiento es despreciable. Determine la ecuación de movimiento de la masa, junto con su amplitud, periodo y frecuencia. ¿Cuánto tiempo después de su liberación pasa la masa por la posición de equilibrio?

2. Una masa de 2 kg está unida a un resorte con rigidez $k = 50$ N/m. La masa se desplaza 1/4 m a la izquierda del punto de equilibrio y recibe una velocidad de 1 m/seg hacia la izquierda. Desprecie la fuerza de amortiguamiento y determine la ecuación de movimiento de la masa, junto con su amplitud, periodo y frecuencia. ¿Cuánto tiempo después de su liberación pasa la masa por la posición de equilibrio?

3. El movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento queda descrito por

$$y''(t) + by'(t) + 16y(t) = 0 \ ;$$
$$y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0 \ .$$

Determine la ecuación de movimiento y bosqueje su gráfica para $b = 0, 6, 8$ y 10.

4. El movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento queda descrito por

$$y''(t) + by'(t) + 64y(t) = 0 \ ;$$
$$y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0 \ .$$

Determine la ecuación de movimiento y bosqueje su gráfica para $b = 0, 10, 16$ y 20.

5. El movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento queda descrito por

$$y''(t) + 10y'(t) + ky(t) = 0 \ ;$$
$$y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0 \ .$$

Determine la ecuación de movimiento y bosqueje su gráfica para $k = 20, 25$ y 30.

6. El movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento queda descrito por

$$y''(t) + 4y'(t) + ky(t) = 0 \ ;$$
$$y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0 \ .$$

Determine la ecuación de movimiento y bosqueje su gráfica para $k = 2, 4$ y 6.

7. Una masa de 1/8 kg se une a un resorte con rigidez 16 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 2 N-seg/m. Si la masa se mueve 3/4 m a la izquierda del equilibrio y recibe una velocidad inicial hacia la izquierda de 2 m/seg, determine la ecuación de movimiento de la masa y dé su factor de amortiguamiento, cuasiperiodo y cuasifrecuencia.

8. Una masa de 20 kg se une a un resorte con rigidez 200 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 140 N-seg/m. Si la masa se mueve 25 cm a la derecha del equilibrio y recibe una velocidad inicial hacia la izquierda de 1 m/seg, ¿cuándo regresará por vez primera a su posición de equilibrio?

9. Una masa de 2 kg se une a un resorte con rigidez 40 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es $8\sqrt{5}$ N-seg/m. Si la masa se mueve 10 cm a la derecha del equilibrio y recibe una velocidad inicial de 2 m/seg hacia la derecha, ¿cuál será el desplazamiento máximo con respecto del equilibrio?

10. Una masa de 1/4 kg se une a un resorte con rigidez 8 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 1/4 N-seg/m. Si la masa se mueve 1m a la izquierda del equilibrio y se libera, ¿cuál será el desplazamiento máximo hacia la derecha?

11. Una masa de 1 kg se une a un resorte con rigidez 100 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 0.2 N-seg/m. Si la masa se empuja hacia la derecha desde la posición de equilibrio con una velocidad de 1 m/seg, ¿cuándo alcanzará su desplazamiento máximo hacia la derecha?

12. Una masa de 1/4 kg se une a un resorte con rigidez 8 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 2 N-seg/m. Si la masa se mueve 50 cm a la izquierda del equilibrio y recibe una velocidad inicial de 2 m/seg hacia la izquierda, ¿cuándo alcanzará la masa su desplazamiento máximo hacia la izquierda?

13. Muestre que para el sistema subamortiguado del ejemplo 3, los instantes en que la curva solución $y(t)$ en (33) toca las curvas exponenciales $\pm\sqrt{7/12}e^{-2t}$ no son los mismos valores de t para los que la función $y(t)$ alcanza sus extremos relativos.

14. Para un sistema subamortiguado, verifique que cuando $b \to 0$ el factor de amortiguamiento tiende a la constante A y la cuasifrecuencia tiende a la frecuencia natural $\sqrt{k/m}/(2\pi)$.

15. ¿Puede deducirse el valor de la constante de amortiguamiento b observando el movimiento de un sistema subamortiguado? Suponga que la masa m es conocida.

16. Una masa unida a un resorte oscila con un periodo de 3 seg. Después de agregar 2 kg, el periodo se convierte en 4 segundos. Si se desprecia las fuerzas de amortiguamiento o externas, determine cuánta masa se adjuntó originalmente al resorte.

4.9 UNA MIRADA DE CERCA A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS FORZADAS

Ahora consideraremos las vibraciones de un sistema masa-resorte al aplicarle una fuerza externa. En particular nos interesa la respuesta del sistema a un término de fuerza *sinusoidal*. Como paradigma, investigaremos el efecto de una función de fuerza coseno sobre el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \gamma t \ , \tag{1}$$

donde F_0 y γ son constantes no negativas y $0 < b^2 < 4mk$ (de modo que el sistema está *subamortiguado*).

Una solución de (1) tiene la forma $y = y_h + y_p$, donde y_p es una solución particular y y_h es una solución general de la ecuación homogénea correspondiente. En la ecuación (17) de la sección 4.8 vimos que

$$y_h(t) = Ae^{-(b/2m)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right) , \tag{2}$$

donde A y ϕ son constantes.

Para determinar y_p, podemos usar el método de coeficientes indeterminados (sección 4.4). Por la forma del término no homogéneo sabemos que

$$y_p(t) = A_1 \cos \gamma t + A_2 \operatorname{sen} \gamma t \ , \tag{3}$$

donde A_1 y A_2 son constantes por determinar. Al sustituir esta expresión en la ecuación (1) y simplificar tenemos

$$[(k - m\gamma^2)A_1 + b\gamma A_2]\cos \gamma t + [(k - m\gamma^2)A_2 - b\gamma A_1]\operatorname{sen} \gamma t = F_0 \cos \gamma t \ . \tag{4}$$

Al igualar los coeficientes correspondientes de ambos lados, obtenemos

$$(k - m\gamma^2)A_1 + b\gamma A_2 = F_0 \ ,$$
$$-b\gamma A_1 + (k - m\gamma^2)A_2 = 0 \ .$$

Resolvemos para obtener

$$\textbf{(5)} \qquad A_1 = \frac{F_0(k - m\gamma^2)}{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2} \ , \qquad A_2 = \frac{F_0 b\gamma}{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2} \ .$$

Por tanto, una solución particular de (1) es

$$\textbf{(6)} \qquad y_p(t) = \frac{F_0}{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}\left[(k - m\gamma^2)\cos\gamma t + b\gamma \operatorname{sen}\gamma t\right] \ .$$

La expresión entre corchetes puede escribirse como

$$\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}\ \operatorname{sen}(\gamma t + \theta) \ ,$$

de modo que podemos expresar y_p en la forma alternativa

$$\textbf{(7)} \qquad y_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta) \ ,$$

donde $\theta = A_1/A_2 = (k - m\gamma^2)/(b\gamma)$ y el cuadrante en que se encuentra θ queda determinado por los signos de A_1 y A_2.

Al combinar las ecuaciones (2) y (7) tenemos la siguiente representación de una solución general a (1) en el caso $0 < b^2 < 4mk$:

$$\textbf{(8)}\ y(t) = Ae^{-(b/2m)t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta) \ .$$

La solución (8) es la suma de dos términos. El primero, y_h representa una oscilación amortiguada y depende sólo de los parámetros del sistema y las condiciones iniciales. Debido al factor de amortiguamiento $Ae^{-(b/2m)t}$, este término tiende a cero cuando $t \to +\infty$. En consecuencia se conoce como la parte **transitoria** de la solución. El segundo término y_p en (8) es el resultado de la función de fuerza externa $f(t) = F_0 \cos \gamma t$. Como la función de fuerza, y_p es una sinusoide con frecuencia angular γ. Es la solución síncrona que anticipamos en la sección 4.1. Sin embargo, y_p está desfasada de $f(t)$ (por el ángulo $\theta - \pi/2$) y su magnitud difiere por el factor

$$\textbf{(9)} \qquad \frac{1}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \ .$$

Al extinguirse el término transitorio, el movimiento del sistema masa-resorte se convierte esencialmente en el del segundo término y_p (véase la figura 4.32 en la página 220). Por tanto, este término se llama la solución de **estado estable**. El factor que aparece en (9) se conoce como **ganancia de frecuencia** o **factor de ganancia**, pues representa la razón entre la magnitud de la respuesta sinusoidal y la magnitud de la fuerza de entrada. Observe que este factor depende de la frecuencia γ y tiene unidades de longitud/fuerza.

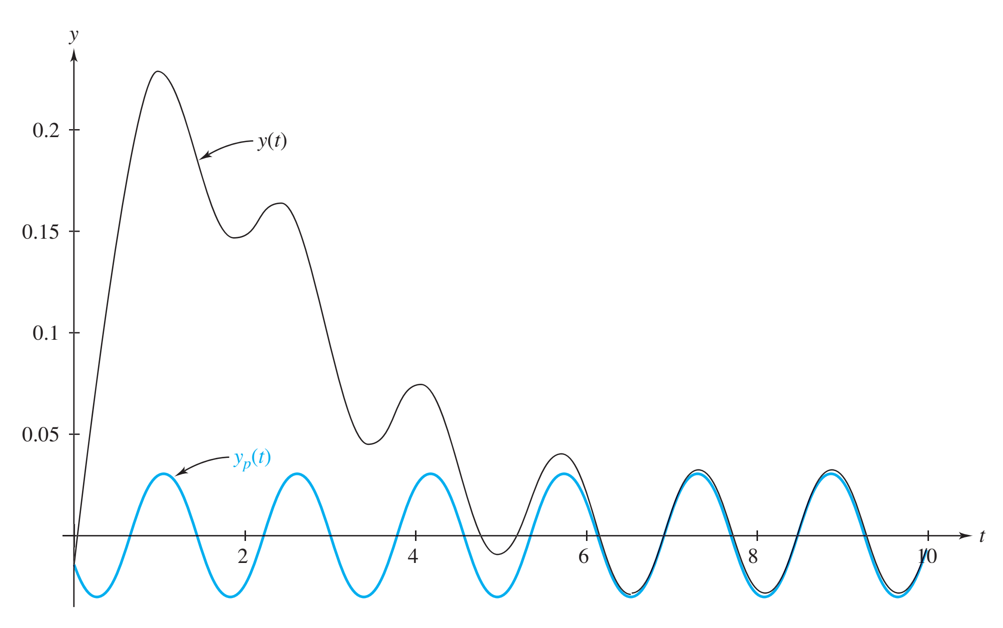


Figura 4.32 Convergencia de $y(t)$ a la solución de estado estable $y_p(t)$ cuando $m = 4$, $b = 6$, $k = 3$, $F_0 = 2$, $\gamma = 4$

EJEMPLO 1 Una masa de 10 kg está unida a un resorte con rigidez $k = 49$ N/m. En el instante $t = 0$ se aplica una fuerza externa $f(t) = 20 \cos 4t$ N al sistema. La constante de amortiguamiento para el sistema es 3 N−seg/m. Determinar la solución de estado estable para el sistema.

SOLUCIÓN Al sustituir los parámetros dados en la ecuación (1) obtenemos

$$\textbf{(10)} \qquad 10\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 49y = 20 \cos 4t \ ,$$

donde $y(t)$ es el desplazamiento (desde el equilibrio) de la masa en el instante t.

Para determinar la respuesta de estado estable, debemos producir una solución particular de (10) que sea sinusoidal. Podemos lograr esto mediante el método de coeficientes indeterminados, estimando una solución de la forma $A_1 \cos 4t + A_2 \operatorname{sen} 4t$. Pero así fue cómo dedujimos la ecuación (7). Así, sustituimos directamente en (7) y vemos que

$$\textbf{(11)} \qquad y_p(t) = \frac{20}{\sqrt{(49 - 160)^2 + (9)(16)}} \operatorname{sen}(4t + \theta) \approx (0.18) \operatorname{sen}(4t + \theta) \ ,$$

donde $\tan \theta = (49 - 160)/12 \approx -9.25$. Como el numerador $(49 - 160)$ es negativo y el denominador 12 es positivo, θ es un ángulo en el cuarto cuadrante. Así,

$$\theta \approx \arctan(-9.25) \approx -1.46 \ ,$$

y la solución de estado estable está dada (aproximadamente) por

$$\textbf{(12)} \qquad y_p(t) = (0.18) \operatorname{sen}(4t - 1.46) \ . \ \blacksquare$$

El ejemplo anterior ilustra un punto importante ya marcado antes. La respuesta de estado estable (12) a la función de fuerza sinusoidal 20 cos $4t$ es una sinusoide de la misma frecuencia pero distinta amplitud. El factor de ganancia [véase (9)] en este caso es $(0.18)/20 = 0.09$ m/N.

En general, la amplitud de la solución de estado estable a la ecuación (1) depende de la frecuencia angular γ de la función de fuerza y está dada por $A(\gamma) = F_0 M(\gamma)$, donde

$$\textbf{(13)} \qquad M(\gamma) := \frac{1}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}$$

es la ganancia de frecuencia [véase (9)]. Esta fórmula es válida incluso cuando $b^2 \geq 4mk$. Para un sistema dado (m, b y k fijos), con frecuencia es de interés conocer la forma en que este sistema reacciona a entradas sinusoidales de varias frecuencias (γ es una variable). Para este fin es muy útil la gráfica de la ganancia $M(\gamma)$, conocida como **curva de respuesta de frecuencia**, o **curva de resonancia** para el sistema.

Para trazar la curva de respuesta de frecuencia, primero observamos que para $\gamma = 0$ tenemos $M(0) = 1/k$. Por supuesto, $\gamma = 0$ implica que la fuerza $F_0 \cos \gamma t$ es estática; no hay movimiento en el estado estable, de modo que este valor de $M(0)$ es adecuado. Observe también que cuando $\gamma \to \infty$ la ganancia $M(\gamma) \to 0$; la inercia del sistema limita la medida en que puede responder a vibraciones muy rápidas. Como ayuda adicional para describir la gráfica, calculamos de (13)

$$\textbf{(14)} \qquad M'(\gamma) = -\frac{2m^2\gamma\left[\gamma^2 - \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}\right)\right]}{\left[(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2\right]^{3/2}} \ .$$

Se sigue de (14) que $M'(\gamma) = 0$ si y sólo si

$$\textbf{(15)} \qquad \gamma = 0 \quad \text{o} \quad \gamma = \gamma_r := \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} \ .$$

Ahora, cuando el sistema está sobreamortiguado o críticamente amortiguado, de modo que $b^2 \geq 4mk > 2mk$, el término dentro del radical en (15) es negativo, y por tanto $M'(\gamma) = 0$ sólo cuando $\gamma = 0$. En este caso, cuando γ crece desde 0 hasta infinito, $M(\gamma)$ decrece desde $M(0) = 1/k$ hasta el valor límite cero.

Cuando $b^2 < 2mk$ (lo que implica que el sistema está subamortiguado), entonces γ_r es real y positivo, y es fácil verificar que $M(\gamma)$ tiene un *máximo* en γ_r. Al sustituir γ_r en (13) se tiene

$$\textbf{(16)} \qquad M(\gamma_r) = \frac{1/b}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}} \ .$$

El valor $\gamma_r/2\pi$ se llama la **frecuencia de resonancia** para el sistema. Cuando el sistema es estimulado por una fuerza externa a esta frecuencia, se dice que está **en resonancia**.

Para ilustrar el efecto de la constante de amortiguamiento b sobre la curva de resonancia, consideramos un sistema en que $m = k = 1$. En este caso, las curvas de respuesta de frecuencia están dadas por

$$\textbf{(17)} \qquad M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \ ,$$

y para $b < \sqrt{2}$, la frecuencia de resonancia es $\gamma_r/2\pi = (1/2\pi)\sqrt{1 - b^2/2}$. La figura 4.33 de la página 222 exhibe las gráficas de las curvas de respuesta de frecuencia para $b = 1/4$,

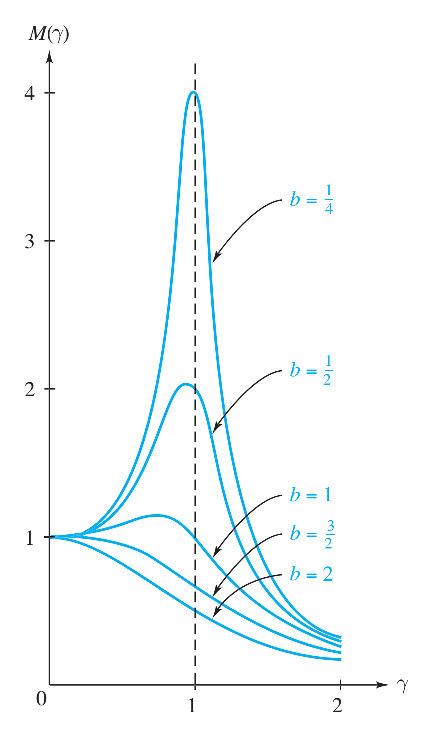


Figura 4.33 Curvas de frecuencia de respuesta para diversos valores de b

$1/2$, 1, $3/2$ y 2. Observe que cuando $b \to 0$ la magnitud máxima de la ganancia de frecuencia aumenta y la frecuencia de resonancia $\gamma_r/2\pi$ para el sistema amortiguado se acerca a $\sqrt{k/m}\big/2\pi = 1/2\pi$, la frecuencia natural del sistema no amortiguado.

Para entender lo que está ocurriendo, considere el sistema no amortiguado ($b = 0$) con término de fuerza $F_0 \cos \gamma t$. Este sistema queda descrito por

$$\textbf{(18)} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = F_0 \cos \gamma t \ .$$

Una solución general de (18) es la suma de una solución particular y una solución general de la ecuación homogénea. En la sección 4.8 mostramos que esta última describe al movimiento armónico simple:

$$\textbf{(19)} \qquad y_h(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \phi)\ , \qquad \omega := \sqrt{k/m}\ .$$

La fórmula para la solución particular dada en (7) es válida para $b = 0$, siempre que $\gamma \neq \omega = \sqrt{k/m}$. *Sin embargo, cuando* $b = 0$ y $\gamma = \omega$, la forma que usamos con los coeficientes determinados para deducir (7) no funciona, debido a que $\cos \omega t$ y $\text{sen}\ \omega t$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente. La forma correcta es

$$\textbf{(20)} \qquad y_p(t) = A_1 t \cos \omega t + A_2 t\ \text{sen}\ \omega t\ ,$$

que conduce a la solución

$$\textbf{(21)} \qquad y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega} t \operatorname{sen} \omega t \; .$$

[La verificación de (21) es directa]. Por tanto, en el *caso de resonancia no amortiguada* (cuando $\gamma = \omega$), una solución general de (18) es

$$\textbf{(22)} \qquad y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{2m\omega} t \operatorname{sen} \omega t \; .$$

Regresando a la cuestión de resonancia, observe que la solución particular en (21) oscila entre $\pm(F_0 t)/(2m\omega)$. Por tanto, cuando $t \to +\infty$ la magnitud máxima de (21) tiende a ∞ (véase la figura 4.34).

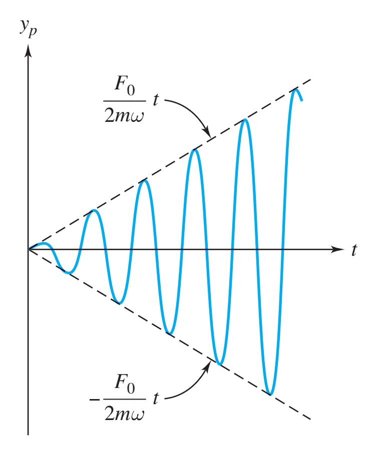


Figura 4.34 Oscilación no amortiguada de la solución particular en (21)

Es claro del análisis anterior que **si la constante de amortiguamiento *b* es muy pequeña, el sistema queda sujeto a grandes oscilaciones cuando la función de fuerza tiene una frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia del sistema**. Son estas grandes vibraciones en la resonancia las que preocupan a los ingenieros. De hecho, se sabe que las vibraciones de resonancia han provocado el rompimiento de las alas de los aviones, el colapso de los puentes† y (algo menos catastrófico) que los vasos de vino se hagan añicos.

Cuando el sistema masa-resorte cuelga verticalmente como en la figura 4.35 de la página 224, la fuerza de gravedad debe tomarse en cuenta. Esto se logra fácilmente. Si y se mide hacia abajo desde la posición en que el resorte no está estirado, la ecuación correspondiente es

$$my'' + by' + ky = mg \; ,$$

†Un análisis interesante de uno de tales desastres, el del puente Tacoma Narrows en el estado de Washington, aparece en *Differential Equations and Their Applications*, cuarta edición, por M. Braun (Springer-Verlag, Nueva York, 1993). Los investigadores siguen tratando de entender este desastre; véanse los artículos "Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis", por A. C. Lazer y P. J. McKenna, *SIAM Review*, vol. 32 (1990): 537-578, o "Still Twisting", por Henry Petroski, *American Scientist*, vol. 19 (1991): 398-401.

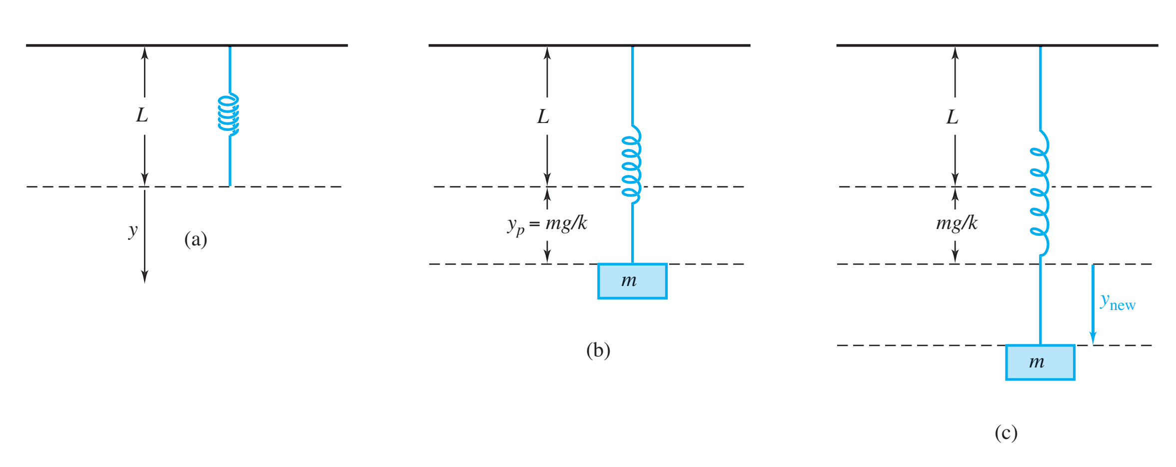


Figura 4.35 Resorte (a) en posición natural, (b) en equilibrio, (c) en movimiento

y si el lado derecho se reconoce como un término de fuerza sinusoidal con frecuencia nula (mg cos $0t$), entonces la respuesta síncrona de estado estable es una constante igual a $y_p(t) = mg/k$. Ahora, si redefinimos de modo que $y(t)$ se mida *desde este nivel* (*real*) *de equilibrio*, como se indica en la figura 4.35 (c),

$$y_{\text{nueva}}(t) := y(t) - mg/k \ ,$$

entonces la ecuación

$$my'' + by' + ky = mg + F_{\text{ext}}(t)$$

se simplifica; vemos que

$$\begin{aligned} my''_{\text{nueva}} + by'_{\text{nueva}} + ky_{\text{nueva}} &= m(y - mg/k)'' + b(y - mg/k)' + k(y - mg/k) \\ &= my'' + by' + ky - mg \\ &= mg + F_{\text{ext}}(t) - mg \ , \end{aligned}$$

o bien

(23) $$my''_{\text{nueva}} + by'_{\text{nueva}} + ky_{\text{nueva}} = F_{\text{ext}}(t) \ .$$

Así, la fuerza gravitacional se puede ignorar si $y(t)$ se mide desde la posición de equilibrio. Al adoptar esta convención, podemos eliminar el subíndice de aquí en adelante.

EJEMPLO 2 Suponga que el sistema masa-resorte del ejemplo 1 cuelga en forma vertical. Determinar la solución de estado estable.

SOLUCIÓN Esto es trivial; la solución de estado estable es idéntica a la que calculamos antes,

$$y_p(t) = \frac{20}{\sqrt{(49 - 160)^2 + (9)(16)}} \operatorname{sen}(4t + \theta)$$

[ecuación (11)], pero ahora y_p se mide desde la posición de equilibrio, que es $mg/k = 10 \times \approx 9.8/49 = 2$ m por debajo de la posición del resorte sin estirar. ■

EJEMPLO 3 Un peso de 64 libras se une a un resorte vertical, haciendo que se estire 3 pulgadas al llegar al reposo en el equilibrio. La constante de amortiguamiento para el sistema es 3 lb-seg/pie.

Se aplica una fuerza externa $f(t) = 3 \cos 12t$ libras al peso. Determinar la solución de estado estable para el sistema.

Si un peso de 64 libras estira un resorte en 3 pulgadas (0.25 pies), entonces la rigidez del resorte debe ser $64/0.25 = 256$ libras/pie. Así, si medimos el desplazamiento desde el nivel (real) de equilibrio, la ecuación (23) se convierte en

(24) $$my'' + by' + ky = 3 \cos 12t \ ,$$

con $b = 3$ y $k = 256$. Pero recordemos que la unidad de masa en el sistema inglés es el *slug*, que es igual al peso dividido entre la constante de aceleración gravitacional $g \approx 32$ pies/seg^2 (tabla 3.2, página 110). Por tanto, m en la ecuación (24) es $64/32 = 2$ slugs y tenemos

$$2y'' + 3y' + 256y = 3 \cos 12t \ .$$

La solución de estado estable está dada por la ecuación (6) con $F_0 = 3$ y $\gamma = 12$:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{3}{(256 - 2 \cdot 12^2)^2 + 3^2 \cdot 12^2}\left[(256 - 2 \cdot 12^2)\cos 12t + 3 \cdot 12 \operatorname{sen} 12t\right] \\ &= \frac{3}{580}(-8 \cos 12t + 9 \operatorname{sen} 12t) \ . \ \blacksquare \end{aligned}$$

EJERCICIOS 4.9

En los problemas siguientes, haga $g = 32$ pies/seg^2 para el sistema inglés y $g = 9.8$ m/seg^2 para el sistema mks.

1. Bosqueje la curva de respuesta de frecuencia (13) para el sistema en que $m = 4$, $k = 1$, $b = 2$.

2. Bosqueje la curva de respuesta de frecuencia (13) para el sistema en que $m = 2$, $k = 3$, $b = 3$.

3. Determine la ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado en resonancia descrito por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 2 \cos 3t \ ;$$

$$y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0 \ .$$

Bosqueje la solución.

4. Determine la ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado en resonancia descrito por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 5 \cos t \ ;$$

$$y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1 \ .$$

Bosqueje la solución.

5. Un sistema no amortiguado queda descrito por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = F_0 \cos \gamma t \ ;$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \ ,$$

donde $\gamma \neq \omega := \sqrt{k/m}$.

(a) Determine la ecuación de movimiento del sistema.

(b) Use identidades trigonométricas para mostrar que la solución puede escribirse en la forma

$$y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega + \gamma}{2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \gamma}{2}t\right) \ .$$

(c) Cuando γ está cerca de ω, entonces $\omega - \gamma$ es pequeño, mientras que $\omega + \gamma$ es relativamente grande en comparación con $\omega - \gamma$. Por tanto, $y(t)$ puede verse como el producto de una función sinusoidal con variación lenta, $\operatorname{sen}[(\omega - \gamma)t/2]$ y una función sinusoidal con variación rápida, $\operatorname{sen}[(\omega + \gamma)t/2]$. El efecto neto es una función sinusoidal $y(t)$ con frecuencia $(\omega - \gamma)/4\pi$, que sirve como la amplitud variable con el tiempo de una función sinusoidal con frecuencia $(\omega + \gamma)/4\pi$. Este fenómeno vibratorio

se conoce como **latidos** y se usa para afinar instrumentos de cuerda. Este mismo fenómeno se llama en electrónica **modulación de la amplitud**. Para ilustrar este fenómeno, bosqueje la curva $y(t)$ para $F_0 = 32$, $m = 2$, $\omega = 9$ y $\gamma = 7$.

6. Deduzca la fórmula para $y_p(t)$ dada en (21).

7. Los amortiguadores en autos, aviones, etcétera, pueden describirse como sistemas masa-resorte forzados *sobreamortiguados*. Deduzca una expresión análoga a la ecuación (8) para la solución general de la ecuación diferencial (1) cuando $b^2 > 4mk$.

8. La respuesta de un sistema sobreamortiguado a una fuerza constante queda descrita mediante la ecuación (1) con $m = 2$, $b = 8$, $k = 6$, $F_0 = 18$ y $\gamma = 0$. Si el sistema parte del reposo [$y(0) = y'(0) = 0$], calcule y bosqueje el desplazamiento $y(t)$. ¿Cuál es el valor límite de $y(t)$ cuando $t \to +\infty$? Interprete esto físicamente.

9. Una masa de 8 kg se une a un resorte que cuelga desde el techo, haciendo que el resorte se estire 1.96 m hasta llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$ se aplica una fuerza externa $F(t) = \cos 2t$ N al sistema. La constante de amortiguamiento del sistema es 3 N-seg/m. Determine la solución de estado estable para el sistema.

10. Muestre que el periodo del movimiento armónico simple de una masa que cuelga de un resorte es $2\pi\sqrt{l/g}$, *donde* l denota la cantidad (más allá de su longitud natural) que se estira el resorte cuando la masa está en equilibrio.

11. Una masa con un peso de 8 libras se une a un resorte que cuelga del techo y alcanza el reposo en su posición de equilibrio. En $t = 0$ se aplica una fuerza externa $F(t) = 2 \cos 2t$ libras al sistema. Si la constante de resorte es 10 libras/pie y la constante de amortiguamiento es 1 lb-seg/pie, determine la ecuación de movimiento de la masa. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia para el sistema?

12. Una masa de 2 kg se une a un resorte que cuelga del techo, haciendo que el resorte se estire 20 cm hasta llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 5 cm por debajo de la posición de equilibrio y se libera. En este mismo instante se aplica una fuerza externa $F(t) = 0.3 \cos t$ N al sistema. Si la constante de amortiguamiento para el sistema es 5 N-seg/m, determine la ecuación de movimiento para la masa. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia para el sistema?

13. Una masa que pesa 32 libras se une a un resorte que cuelga del techo y llega al reposo en su posición de equilibrio. En el instante $t = 0$ se aplica una fuerza externa $F(t) = 3 \cos 4t$ libras al sistema. Si la constante de resorte es 5 libras/pie y la constante de amortiguamiento es 2 libras-seg/pie, determine la solución de estado estable para el sistema.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo analizamos la teoría de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes y presentamos métodos para resolver estas ecuaciones. También estudiamos la descripción matemática de los sistemas mecánicos en vibración y vimos cómo la analogía masa-resorte puede usarse para predecir características cualitativas de las soluciones a algunas ecuaciones no lineales con coeficientes variables.

Las características importantes y las técnicas de solución para el caso lineal se enumeran a continuación.

Ecuaciones lineales homogéneas (coeficientes constantes)

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a(\neq 0), b, c \quad \text{constante} .$$

Soluciones linealmente independientes: y_1, y_2. Dos soluciones y_1 y y_2 a la ecuación homogénea en el intervalo I son linealmente independientes en I si ninguna de las funciones es un múltiplo de la otra en I. Esto será cierto si su Wronskiano,

$$W[y_1, y_2](t) := y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \; ,$$

es distinto de cero para algún (y por tanto para todo) t en I.

Solución general de una ecuación homogénea: $c_1y_1 + c_2y_2$. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, entonces una solución general es

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Forma de la solución general. La forma de una solución general para una ecuación homogénea con coeficientes constantes depende de las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ , \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0 \ , \qquad a \neq 0 \ .$$

(a) Cuando $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales distintas r_1 y r_2 y una solución general es

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \ .$$

(b) Cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación auxiliar tiene una raíz real repetida $r = r_1 = r_2$ y una solución general es

$$y(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt} \ .$$

(c) Cuando $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación auxiliar tiene raíces complejas conjugadas $r = \alpha \pm i\beta$ y una solución general es

$$y(t) = c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \ .$$

Ecuaciones lineales no homogéneas (coeficientes constantes)

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = g(t)}$$

Solución general de una ecuación no homogénea: $y_p + c_1y_1 + c_2y_2$. Si y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea y y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, entonces una solución general es

$$y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \ ,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Dos métodos para hallar una solución particular y_p son los de coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

Coeficientes indeterminados: $g(t) = p_n(t)e^{\alpha t}\begin{Bmatrix} \cos \beta t \\ \text{sen } \beta t \end{Bmatrix}$**.** Si el lado derecho $g(t)$ de una ecuación no homogénea con coeficientes constantes es un polinomio $p_n(t)$, una exponencial de la forma $e^{\alpha t}$, una función trigonométrica de la forma $\cos \beta t$ o $\text{sen } \beta t$, o cualquier producto de estos tipos de funciones, entonces se puede hallar una solución particular de una forma adecuada. La forma de la solución particular implica ciertos coeficientes por determinar y depende de que $\alpha + i\beta$ sea una raíz de la ecuación auxiliar correspondiente. Véase el cuadro resumen en la página 189. Los coeficientes por determinar se hallan sustituyendo la forma en la ecuación diferencial e igualar los coeficientes de términos semejantes.

Variación de parámetros: $y(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t)$**.** Si y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, entonces una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t) \ ,$$

donde v_1' y v_2' se determinan mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' &= g(t)/a \ . \end{aligned}$$

Principio de superposición. Si y_1 y y_2 son soluciones a las ecuaciones

$$ay'' + by' + cy = g_1 \quad \text{y} \quad ay'' + by' + cy = g_2 \ ,$$

respectivamente, entonces $c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = c_1 g_1 + c_2 g_2 \ .$$

El principio de superposición permite determinar una solución particular cuando el término no homogéneo es la suma de no homogeneidades para los que puedan calcularse soluciones particulares.

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1-28, determine una solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + 8y' - 9y = 0$ **2.** $49y'' + 14y' + y = 0$

3. $4y'' - 4y' + 10y = 0$ **4.** $9y'' - 30y' + 25y = 0$

5. $6y'' - 11y' + 3y = 0$ **6.** $y'' + 8y' - 14y = 0$

7. $36y'' + 24y' + 5y = 0$ **8.** $25y'' + 20y' + 4y = 0$

9. $16z'' - 56z' + 49z = 0$ **10.** $u'' + 11u = 0$.

11.† $t^2x''(t) + 5x(t) = 0 \ , \quad t > 0$

12. $2y''' - 3y'' - 12y' + 20y = 0$

13. $y'' + 16y = te^t$

14. $v'' - 4v' + 7v = 0$

15. $3y''' + 10y'' + 9y' + 2y = 0$

16. $y''' + 3y'' + 5y' + 3y = 0$

17. $y''' + 10y' - 11y = 0$

18. $y^{(4)} = 120t$

19. $4y''' + 8y'' - 11y' + 3y = 0$

---

†Véase el análisis de las ecuaciones de Cauchy-Euler en el problema 38 de los ejercicios 4.3, en la página 176.

20. $2y'' - y = t \operatorname{sen} t$

21. $y'' - 3y' + 7y = 7t^2 - e^t$

22. $y'' - 8y' - 33y = 546 \operatorname{sen} t$

23. $y''(\theta) + 16y(\theta) = \tan 4\theta$

24. $10y'' + y' - 3y = t - e^{t/2}$

25. $4y'' - 12y' + 9y = e^{5t} + e^{3t}$

26. $y'' + 6y' + 15y = e^{2t} + 75$

27.† $x^2y'' + 2xy' - 2y = 6x^{-2} + 3x \;, \qquad x > 0$

28.† $y'' = 5x^{-1}y' - 13x^{-2}y \;, \qquad x > 0$

En los problemas 29-36, determine la solución al problema con valores iniciales dado.

29. $y'' + 4y' + 7y = 0$
$y(0) = 1 \;, \qquad y'(0) = -2$

30. $y''(\theta) + 2y'(\theta) + y(\theta) = 2\cos\theta$
$y(0) = 3 \;, \qquad y'(0) = 0$

31. $y'' - 2y' + 10y = 6\cos 3t - \operatorname{sen} 3t$
$y(0) = 2 \;, \qquad y'(0) = -8$

32. $4y'' - 4y' + 5y = 0$
$y(0) = 1 \;, \qquad y'(0) = -11/2$

33. $y''' - 12y'' + 27y' + 40y = 0$
$y(0) = -3 \;, \qquad y'(0) = -6 \;, \qquad y''(0) = -12$

34. $y'' + 5y' - 14y = 0$
$y(0) = 5 \;, \qquad y'(0) = 1$

35. $y''(\theta) + y(\theta) = \sec\theta \;; \quad y(0) = 1 \;, \quad y'(0) = 2$

36. $9y'' + 12y' + 4y = 0$
$y(0) = -3 \;, \qquad y'(0) = 3$

37. Use la analogía oscilador masa-resorte para decidir si todas las soluciones a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales están acotadas cuando $t \to +\infty$.

(a) $y'' + t^4y = 0$ **(b)** $y'' - t^4y = 0$
(c) $y'' + y^7 = 0$ **(d)** $y'' + y^8 = 0$
(e) $y'' + (3 + \operatorname{sen} t)y = 0$ **(f)** $y'' + t^2y' + y = 0$
(g) $y'' - t^2y' - y = 0$

38. Una masa de 3 kg se une a un resorte con rigidez $k = 75$ N/m, como en la figura 4.1, página 152. La masa se desplaza 1/4 m a la izquierda y recibe una velocidad de 1 m/seg a la derecha. La fuerza de amortiguamiento es despreciable. Determine la ecuación de movimiento de la masa así como su amplitud, periodo y frecuencia. ¿Cuánto tiempo después de su liberación ocurre que la masa pasa por la posición de equilibrio?

39. Un peso de 32 libras se une a un resorte vertical, haciendo que se estire 6 pulgadas al llegar al reposo en equilibrio. La constante de amortiguamiento para el sistema es 2 libras-seg/pie. Se aplica una fuerza externa $F(t) = 4\cos 8t$ libras al peso. Determine la solución de estado estable del sistema. ¿Cuál es su frecuencia resonante?

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. Compare los dos métodos (coeficientes indeterminados y variación de parámetros) para determinar una solución particular de una ecuación no homogénea. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno?

2. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b\frac{dy}{dx} + y = 0 \;,$$

donde b es una constante. Describa la forma en que cambia el comportamiento de las soluciones a esta ecuación cuando b varía.

3. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + cy = 0 \;,$$

donde c es constante. Describa la forma en que cambia el comportamiento de las soluciones a esta ecuación cuando c varía.

4. Para estudiantes con conocimientos de álgebra lineal: Compare la teoría para ecuaciones lineales de segundo orden con la de sistemas de n ecuaciones lineales en n incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene rango $n - 2$. Use la terminología del álgebra lineal (por ejemplo, subespacio, base, dimensión, transformación lineal y núcleo. Analice ecuaciones homogéneas y no homogéneas.

†Ver la discusión de las ecuaciones de Cauchy-Euler en el problema 38 del ejercicio 4.3 en la página 176.

PROYECTOS DE GRUPO PARA EL CAPÍTULO 4

A. Coeficientes indeterminados y aritmética compleja

La técnica de coeficientes indeterminados descrita en la sección 4.5 se puede mejorar con la ayuda de la aritmética compleja y las propiedades de la función exponencial compleja. Las fórmulas esenciales son

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) ,$$

$$\frac{d}{dt} e^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} ,$$

$$\operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cos \beta t , \qquad \operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t ,$$

y más en general,

(1) $$\operatorname{Re}\left[(a + ib)e^{(\alpha+i\beta)t}\right] = e^{\alpha t}(a \cos \beta t - b \operatorname{sen} \beta t) ,$$

(2) $$\operatorname{Im}\left[(a + ib)e^{(\alpha+i\beta)t}\right] = e^{\alpha t}(b \cos \beta t + a \operatorname{sen} \beta t) .$$

Ahora consideremos una ecuación de segundo orden de la forma

(3) $$L[y] := ay'' + by' + cy = g ,$$

donde a, b y c son números reales y g tiene la forma particular

(4) $$\boldsymbol{g(t) = e^{\alpha t}\left[(a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0)\cos \beta t + (b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0)\operatorname{sen} \beta t\right] ,}$$

donde los a_j's, b_j's, α y β son números reales. Tal función se puede expresar siempre como la parte real o imaginaria de una función que implica a la exponencial compleja. Por ejemplo, si usamos la ecuación (1), se puede verificar rápidamente que

(5) $$\boldsymbol{g(t) = \operatorname{Re}[G(t)] ,}$$

donde

(6) $$\boldsymbol{G(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}\left[(a_n + ib_n)t^n + \cdots + (a_1 + ib_1)t + (a_0 + ib_0)\right] .}$$

Ahora, supóngase por el momento que podemos hallar una solución con valores complejos Y de la ecuación

(7) $$L[Y] = aY'' + bY' + cY = G .$$

Entonces, como a, b y c son números reales, obtenemos una solución y de (3) con valores reales, considerando la parte real de Y; es decir, $y = \operatorname{Re} Y$ resuelve (3). (Recuerde que en el lema 2, página 170, demostramos este hecho para ecuaciones homogéneas). Así, necesitamos enfocarnos sólo en determinar una solución de (7).

El método de coeficientes indeterminados implica que cualquier ecuación diferencial de la forma

(8) $$L[Y] = e^{(\alpha\pm i\beta)t}\left[(a_n + ib_n)t^n + \cdots + (a_1 + ib_1)t + (a_0 + ib_0)\right]$$

tiene una solución de la forma

(9) $$Y_p(t) = t^s e^{(\alpha\pm i\beta)t}\left[A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0\right] ,$$

donde $A_n, \ldots, A_0$ son constantes complejas y s es el menor entero no negativo tal que ningún término en (9) sea solución (compleja) de la ecuación homogénea correspondiente $L[Y] = 0$.

Podemos determinar las constantes incógnitas A_j sustituyendo (9) en (8) e igualando los coeficientes de términos semejantes. Con estos hechos en mente, podemos (pagando el precio del uso de la aritmética compleja) evitar los métodos de la sección 4.5 y evitar la poco placentera tarea de calcular derivadas de una función como $e^{3t}(2 + 3t + t^2)\text{sen}(2t)$, que incluye factores exponenciales y trigonométricos.

Realice este procedimiento para determinar soluciones particulares de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' + y = e^{-t}(\cos 2t - 3 \text{ sen } 2t)$.
(b) $y'' - 2y' + 10y = te^t \text{sen } 3t$.

El uso de la aritmética compleja no sólo mejora los cálculos sino que muestra su utilidad al analizar la respuesta de un sistema lineal a una entrada sinusoidal. Los ingenieros eléctricos han hecho buen uso de esto en su estudio de los circuitos *RLC* introduciendo el concepto de la **impedancia**.

B. Una alternativa al método de coeficientes indeterminados†

Sea

$$L[y] = y'' + by' + cy = g(t)$$

una ecuación general no homogénea con coeficientes constantes. El proyecto anterior demostró que cualquiera de las formas que aparece en la sección 4.5 (es decir, las formas permisibles para la no homogeneidad $g(t)$ que hacen de la ecuación susceptible al método de coeficientes indeterminados) se puede expresar en la forma genérica

$$g(t) = \text{Re}[p_n(t)e^{\gamma t}] ,$$

donde $p_n(t)$ es un polinomio complejo de grado n y γ es una constante compleja. [Véanse las ecuaciones (5) y (6) del Proyecto A]. Esto sugiere que un cambio de variable dependiente de la forma

$$Y(t) = V(t)e^{\gamma t}$$

podría simplificar la ecuación (compleja) $L[Y](t) = p_n(t)e^{\gamma t}$, pues cada uno de los términos Y', Y'' contendrían el factor exponencial común $e^{\gamma t}$, que entonces se cancelaría en la ecuación:

$$Y' = V'e^{\gamma t} + \gamma Ve^{\gamma t} ,$$
$$Y'' = V''e^{\gamma t} + 2\gamma V'e^{\gamma t} + \gamma^2 Ve^{\gamma t} ,$$
$$L[Ve^{\gamma t}] = (V'' + 2\gamma V' + \gamma^2 V)e^{\gamma t} + b(V' + \gamma V)e^{\gamma t} + cVe^{\gamma t} = p_n(t)e^{\gamma t} .$$

Después de reordenar, podemos enfrentar una tarea más sencilla, la de resolver una ecuación con coeficientes constantes con una no homogeneidad polinomial:

$$(10) \qquad V'' + \alpha V' + \beta V = p_n(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 ,$$

donde $\alpha = 2\gamma + b$ y $\beta = \gamma^2 + b\gamma + c$.

†Sugerido en artículos de E. R. Love y R. C. Gupta

La ecuación (10) se puede resolver *directamente* mediante la siguiente estrategia. Calculamos sus primeras n derivadas, reduciendo el polinomio a una constante:

$$V''' + \alpha V'' + \beta V' = na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \cdots + a_1$$
$$V^{(4)} + \alpha V''' + \beta V'' = n(n-1)a_n t^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}t^{n-3} + \cdots + 2a_2$$
$$\vdots$$
$$V^{(n+1)} + \alpha V^{(n)} + \beta V^{(n-1)} = n!a_n t$$
$$V^{(n+2)} + \alpha V^{(n+1)} + \beta V^{(n)} = n!a_n \ .$$

Ahora, si $\beta \neq 0$, la última ecuación tiene una solución $V^{(n)}(t) = \text{constante} = n!a_n/\beta$; esto puede sustituirse en la penúltima ecuación [junto con el hecho de que $V^{(n+1)} \equiv 0$] para obtener $V^{(n-1)}$; al continuar esta sustitución regresiva obtendremos una fórmula para $V(t)$ [usando la ecuación (10)].

Por otro lado, si $\beta = 0$ pero $\alpha \neq 0$, la última ecuación tiene una solución $V^{(n+1)}(t) = \text{constante} = n!a_n/\alpha$. A su vez, esto puede sustituirse en la penúltima ecuación para obtener $V^{(n)}$ (recuerde que $\beta = 0$) y así sucesivamente, hasta llegar a la primera ecuación, lo que proporciona una fórmula para $V'(t)$. Una integración simple (con la constante aditiva usual) nos da $V(t)$.

Por último, si α y β son *ambos* nulos, no hay necesidad de implantar este proceso debido a que la ecuación

$$V'' = p_n(t)$$

se puede resolver directamente con dos integraciones.

Realice este procedimiento para determinar soluciones particulares a las siguientes ecuaciones.

(a) $y'' + 3y' + 2y = 3t + 1$.
(b) $y'' + y' = 3t + 1$.
(c) $y'' = 3t + 1$.
(d) $y'' - y' - 12y = e^{4t}$.
(e) $y'' + 2y' - 3y = (t^2 + 3t)e^t$.
(f) $y'' + 2y' - 3y = t^2 \cos \pi t$.
(g) $y'' + 2y' - 3y = 2te^t \operatorname{sen} t - e^t \cos t$.
(h) $y'' - 2y' + 10y = te^t \operatorname{sen} 3t$.
(i) $y'' + y = e^{-t}[\cos 2t - 3 \operatorname{sen} 2t]$.

Explique el significado de la constante de integración para el caso $\beta = 0$. ¿Qué ocurrió con el factor "t^s" mencionado en la sección 4.4?

C. Método de convolución

La **convolución** de dos funciones g y f es la función $g * f$ definida por

$$(g * f)(t) := \int_0^t g(t - v)f(v)dv \ .$$

El objetivo de este proyecto es mostrar cómo usar las convoluciones para obtener una solución particular a una ecuación no homogénea de la forma

(11) $\quad ay'' + by' + cy = f(t)$,

donde a, b y c son constantes, $a \neq 0$.

(a) Use la regla de Leibniz,

$$\frac{d}{dt}\int_a^t h(t,v)\,dv = \int_a^t \frac{\partial h}{\partial t}(t,v)\,dv + h(t,t) \ ,$$

para mostrar que

$$(y*f)'(t) = (y'*f)(t) + y(0)f(t)$$

y

$$(y*f)''(t) = (y''*f)(t) + y'(0)f(t) + y(0)f'(t) \ ,$$

suponiendo que y y f son suficientemente diferenciables.

(b) Sea $y_s(t)$ la solución de la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ que satisface $y_s(0) = 0$, $y_s'(0) = 1/a$. Muestre que $y_s * f$ es la solución particular de la ecuación (11) que satisface $y(0) = y'(0) = 0$.

(c) Sea $y_k(t)$ la solución de la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ que satisface $y(0) = Y_0$, $y'(0) = Y_1$, y sea y_s como se definió en la parte (b). Muestre que

$$(y_s * f)(t) + y_k(t)$$

es la única solución al problema con valores iniciales

(12) $$ay'' + by' + cy = f(t) \ ; \qquad y(0) = Y_0 \ , \qquad y'(0) = Y_1 \ .$$

(d) Use el resultado de la parte (c) para determinar la solución de cada uno de los siguientes problemas con valores iniciales. Realice todas las integraciones y exprese sus respuestas en términos de funciones elementales.

(i) $y'' + y = \tan t \ ; \qquad y(0) = 0 \ , \qquad y'(0) = -1 \ .$

(ii) $2y'' + y' - y = e^{-t}\,\text{sen}\, t \ ; \qquad y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 1 \ .$

(iii) $y'' - 2y' + y = \sqrt{t}\,e^t \ ; \qquad y(0) = 2 \ , \qquad y'(0) = 0 \ .$

D. Linealización de problemas no lineales

Un punto de vista útil para analizar una ecuación no lineal consiste en estudiar su **ecuación linealizada**, que se obtiene reemplazando los términos no lineales mediante aproximaciones lineales. Por ejemplo, la ecuación no lineal

(13) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \text{sen}\,\theta = 0 \ ,$$

que describe el movimiento de un péndulo simple, tiene

(14) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0$$

como linealización para θ pequeña. (El término no lineal sen θ ha sido reemplazado por la aproximación lineal θ).

Una solución general de la ecuación (13) utiliza las funciones elípticas de Jacobi (véase el Proyecto G), que son algo complicadas, de modo que trataremos de aproximar las soluciones. Para esto usaremos dos métodos: las series de Taylor y las linealizaciones.

(a) Deduzca los primeros seis términos de la serie de Taylor en torno de $t = 0$ de la solución a la ecuación (13) con condiciones iniciales $\theta(0) = \pi/12, \theta'(0) = 0$. (El método de las series de Taylor se analiza en el proyecto A del capítulo 1 y la sección 8.1).

(b) Resuelva la ecuación (14) sujeta a las mismas condiciones iniciales $\theta(0) = \pi/12$, $\theta'(0) = 0$.

(c) En los mismos ejes de coordenadas, grafique las dos aproximaciones determinadas en las partes (a) y (b).

(d) Analice las ventajas y desventajas del método de series de Taylor y el método de linealización.

(e) Dé una linealización para el problema con valores iniciales.

$$x''(t) + 0.1[1 - x^2(t)]x'(t) + x(t) = 0 \qquad x(0) = 0.4\ , \qquad x'(0) = 0\ ,$$

para x pequeña. Resuelva este problema linealizado para obtener una aproximación al problema no lineal.

E. Ecuaciones no lineales que pueden resolverse mediante técnicas de primer orden

Ciertas ecuaciones *no lineales* de segundo orden (a saber, aquellas que carecen de variables dependientes o independientes) pueden resolverse reduciéndolas a un par de *ecuaciones de primer orden*. Esto se lleva a cabo haciendo la sustitución $w = dy/dx$, donde x es la variable independiente.

(a) Para resolver una ecuación de la forma $y'' = F(x, y')$ donde falta la variable dependiente y, hacemos $w = y'$ (de modo que $w' = y''$), obteniendo el par de ecuaciones

$$w' = F(x, w)\ ,$$

$$y' = w\ .$$

Como $w' = F(x, w)$ es una ecuación de primer orden, disponemos de las técnicas del capítulo 2 para resolver en términos de $w(x)$. Una vez determinada $w(x)$, la integramos para obtener $y(x)$.

Use este método para resolver

$$2xy'' - y' + \frac{1}{y'} = 0\ , \qquad x > 0\ .$$

(b) Para resolver una ecuación de la forma $y'' = F(y, y')$ en donde falta la variable independiente x, hacemos $w = dy/dx$ para obtener, usando la regla de la cadena,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx} = w\frac{dw}{dy}\ .$$

Así, $y'' = F(y, y')$ es equivalente al par de ecuaciones

(15) $$w\frac{dw}{dy} = F(y, w)\ ,$$

(16) $$\frac{dy}{dx} = w\ .$$

En la ecuación (15), observe que y juega el papel de la variable *independiente*; por tanto, al resolverla se obtiene $w(y)$. Luego, al sustituir $w(y)$ en (16), obtenemos una ecuación separable que determina a $y(x)$.

Con este método, resuelva las siguientes ecuaciones.

(i) $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\ .$ (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} = 0\ .$

(c) Cable suspendido. En el estudio de un cable suspendido entre dos puntos fijos (véase la figura 4.36), aparece el problema con valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; ; \qquad y(0) = a \; , \qquad y'(0) = 0 \; ,$$

donde $(\neq 0)$ es constante. Resuelva este problema con valores iniciales en términos de y. La curva resultante se llama **catenaria**.

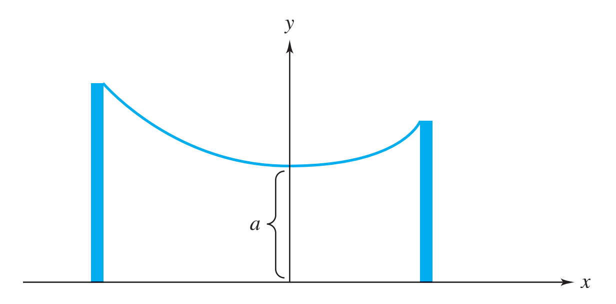


Figura 4.36 Cable suspendido

F. Reingreso del *Apolo*

Alar Toomre, Massachussets Institute of Technology

Cada vez que los astronautas de las naves Apolo regresaban de la Luna en la década de 1970, tenían cuidado en ingresar a la atmósfera de la Tierra a lo largo de una trayectoria que formase un pequeño ángulo α con la horizontal. (Véase la figura 4.37). Esto era necesario para evitar fuerzas "g" intolerablemente grandes durante su reingreso.

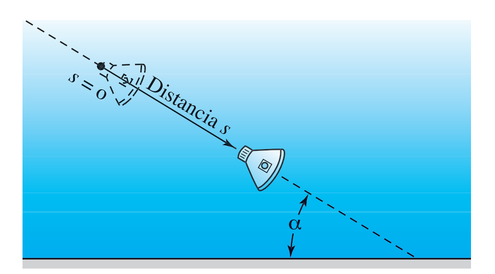


Figura 4.37 Trayectoria de reingreso

Para apreciar las bases de su preocupación, considere el problema idealizado

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -Ke^{s/H}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

donde K y H son constantes y la distancia s se mide hacia abajo desde algún punto de referencia sobre la trayectoria, como se muestra en la figura. Esta ecuación aproximada pretende que la única fuerza sobre la cápsula durante el reingreso es la resistencia del aire. Para un cuerpo como el *Apolo*, la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad y a la densidad at-

mosférica local, que decae exponencialmente con la altura. Intuitivamente, sería de esperar que la desaceleración predicha por este modelo dependería fuertemente de la constante K (que toma en cuenta la masa y el área del vehículo, entre otras cosas); pero de manera notable, para cápsulas que entran a la atmósfera (en "$s = -\infty$") con una velocidad común V_0, la desaceleración *máxima* resulta ser independiente de K.

(a) Verifique esta última afirmación demostrando que esta desaceleración máxima no es más que $V_0^2/(eH)$. [*Sugerencia*: La variable independiente *t no* aparece en la ecuación diferencial, de modo que es útil hacer la sustitución $v = ds/dt$; véase el proyecto E, parte (b)].

(b) Verifique también que en el instante de mayor desaceleración, cualquiera de estas naves viajará precisamente a la velocidad $V_0/\sqrt{e}$, habiendo perdido casi 40% de su velocidad original.

(c) Use los datos plausibles $V_0 = 11$ km/seg y $H = 10/(\text{sen}\ \alpha)$ km, estime cuán pequeño debe elegirse α para no perturbar a los viajeros que retornan con no más de 10 g.

G. Péndulo simple

En la sección 4.7 analizamos el péndulo simple consistente en una masa m suspendida por una varilla de longitud ℓ con masa despreciable y obtuvimos el problema no lineal con valores iniciales

$$\textbf{(17)}\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\theta = 0\ ; \qquad \theta(0) = \alpha\ , \qquad \theta'(0) = 0\ ,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y $\theta(t)$ es el ángulo que forma la varilla con la vertical en el instante t (véase la figura 4.18, página 204). En este caso se supone que la masa se libera con velocidad nula con un ángulo inicial α, $0 < \alpha < \pi$. Queremos determinar la ecuación de movimiento para el péndulo y su periodo de oscilación.

(a) Use la ecuación (17) y el lema de la integral de la energía analizado en la sección 4.7 para mostrar que

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\alpha)$$

y por tanto

$$dt = -\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}\ .$$

(b) Use la identidad trigonométrica $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2(x/2)$ para expresar dt como

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2(\alpha/2) - \text{sen}^2(\theta/2)}}\ .$$

(c) Haga el cambio de variable $\text{sen}(\theta/2) = \text{sen}(\alpha/2)\,\text{sen}\,\phi$ para escribir dt en la forma

$$\textbf{(18)}\qquad dt = -\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\phi}}\ , \qquad \text{donde } k := \text{sen}(\alpha/2)\ .$$

(d) El periodo $P(\alpha)$ del péndulo se define como el tiempo necesario para que el péndulo oscile desde un extremo hasta el otro y regrese (es decir, de α a $-\alpha$ y de regreso a α). Muestre que el periodo de oscilación está dado por

(19) $$P(\alpha) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\phi}} \ ,$$

donde $k := \operatorname{sen}(\alpha/2)$. [*Sugerencia*: El periodo es justamente cuatro veces el tiempo que tarda el péndulo en ir de $\theta = 0$ hasta $\theta = \alpha$].

La integral en (19) se llama una **integral elíptica del primer tipo** y se denota por $F(k, \pi/2)$. Como es de esperar, el periodo del péndulo simple depende de la longitud ℓ de la varilla y el desplazamiento inicial α. De hecho, al verificar la tabla de integrales elípticas mostrará que el periodo casi se duplica cuando el desplazamiento inicial se incrementa de $\pi/8$ hasta $15\pi/16$ (para ℓ fija). ¿Qué ocurre cuando a tiende a π?

(e) Integre la ecuación (18) para mostrar que

(20) $$-t + \frac{P(\alpha)}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\phi}\frac{ds}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2 s}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}F(k, \phi) \ .$$

Para k fijo, $F(k, \phi)$ tiene una "inversa", denotada $\operatorname{sn}(k,u)$, que satisface $u = F(k, \phi)$ si y sólo si $\operatorname{sn}(k,u) = \operatorname{sen}\phi$. La función $\operatorname{sn}(k, u)$ es una **función elíptica de Jacobi** y tiene muchas propiedades que recuerdan a las de la función seno. Use la función elíptica de Jacobi $\operatorname{sn}(k, u)$ y exprese la ecuación de movimiento para el péndulo en la forma

(21) $$\theta = 2\operatorname{arcsen}\left\{k\operatorname{sn}\left[k, \sqrt{\frac{g}{\ell}}\left(-t + \frac{P(\alpha)}{4}\right)\right]\right\} \ , \qquad 0 \le t \le \frac{P(\alpha)}{4} \ ,$$

donde $k \coloneqq \operatorname{sen}(\alpha/2)$.

H. Comportamiento asintótico de las soluciones

En la aplicación de la teoría de sistemas lineales a problemas mecánicos encontramos la ecuación

(22) $$y'' + py' + qy = f(t) \ ,$$

donde p y q son constantes positivas con $p^2 < 4q$ y $f(t)$ es una función de fuerza para el sistema. En muchos casos es importante que el ingeniero de diseño sepa que una función de fuerza acotada dé lugar sólo a soluciones acotadas. Más específicamente, ¿cómo afecta el comportamiento de $f(t)$ para valores grandes de t al comportamiento asintótico de la solución? Para responder esta cuestión, haga lo siguiente:

(a) Muestre que la ecuación homogénea asociada a la ecuación (22) tiene dos soluciones linealmente independientes dadas por

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \ , \qquad e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \ ,$$

donde $\alpha = -p/2 < 0$ y $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$.

(b) Sea $\phi(t)$ una función continua definida en el intervalo $[0, \infty)$. Use la fórmula de variación de parámetros para mostrar que cualquier solución a (22) en $[0, \infty)$ se puede expresar en la forma

(23)
$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$
$$-\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t\int_0^t f(v)e^{-\alpha v}\operatorname{sen}\beta v\,dv$$
$$+\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\int_0^t f(v)e^{-\alpha v}\cos\beta v\,dv\ .$$

(c) Suponiendo que f está acotada en $[0, \infty)$ (es decir, existe una constante K tal que $|f(v)| \le K$ para toda $v \ge 0$) use la desigualdad del triángulo y otras propiedades del valor absoluto para mostrar que $y(t)$ dada en (23) satisface

$$|y(t)| \le (|c_1| + |c_2|)e^{\alpha t} + \frac{2K}{|\alpha|\beta}(1 - e^{\alpha t})$$

para toda $t > 0$.

(d) De manera similar, muestre que si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos funciones continuas y acotadas en $[0, \infty)$ tales que $|f_1(t) - f_2(t)| \le \varepsilon$ para toda $t > t_0$ y si ϕ_1 es una solución de (22) con $\phi = f_1$ y f_2 es una solución de (22) con $\phi = f_2$, entonces

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \le Me^{\alpha t} + \frac{2\varepsilon}{|\alpha|\beta}(1 - e^{\alpha(t-t_0)})$$

para toda $t > t_0$, donde M es una constante que depende de ϕ_1 y ϕ_2 pero no de t.

(e) Ahora, suponga que $f(t) \to F_0$ cuando $t \to +\infty$, donde F_0 es una constante. Use el resultado de la parte (d) para demostrar que cualquier solución ϕ de (22) debe satisfacer $\phi(t) \to F_0/q$ cuando $t \to +\infty$. [*Sugerencia*: Elija $f_1 = f$, $f_2 \equiv F_0$, $\phi_1 = \phi$, $\phi_2 \equiv F_0/q$].

CAPÍTULO 5

Introducción a los sistemas y el análisis del plano fase

5.1 TANQUES INTERCONECTADOS

Dos grandes tanques, cada uno de los cuales contiene 24 litros de una solución salina, están conectados entre sí mediante unos tubos, como se muestra en la figura 5.1. El tanque A recibe agua pura a razón de 6 litros/minuto y el líquido sale del tanque B con la misma razón; además, se bombean 8 litros/minuto de líquido del tanque A al tanque B y 2 litros/minuto del tanque B al tanque A. Los líquidos dentro de cada tanque se mantienen bien revueltos, de modo que cada mezcla es homogénea. Si en un principio la solución salina en el tanque A contiene x_0 kg de sal y la del tanque B contiene inicialmente y_0 kg de sal, determinar la masa de sal en cada tanque en el instante $t > 0$.

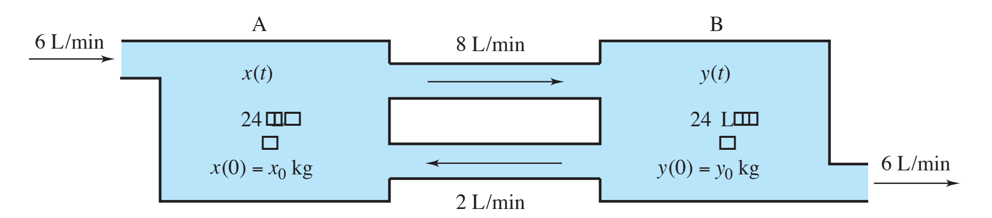


Figura 5.1 Tanques interconectados

Observe que el *volumen* de líquido en cada tanque es constante e igual a 24 litros, debido al equilibrio entre las razones de entrada y salida. Por lo tanto, tenemos dos funciones incógnitas de t: la masa de sal $x(t)$ en el tanque A y la masa de sal $y(t)$ en el tanque B. Si centramos nuestra atención en un tanque a la vez, podemos deducir dos ecuaciones que relacionen estas incógnitas. Como el sistema es alimentado con agua pura, esperamos que el contenido de sal de cada tanque tienda a cero cuando $t \to +\infty$.

Para formular las ecuaciones de este sistema, igualamos la razón de cambio de sal en cada tanque con la razón *neta* con la que se transfiere la sal a ese tanque. La *concentración* de sal en el tanque A es $[x(t)/24]$ [kg/litro], de modo que el tubo superior saca sal del tanque A a razón de $[8x/24]$ [kg/minuto]; de manera similar, el tubo inferior lleva sal al tanque A a razón de $[2y/24]$ [kg/minuto] (la concentración de sal en el tanque B es $[y/24]$ [kg/litro]). El flujo de agua pura, por supuesto no transfiere sal (simplemente mantiene el volumen del tanque A en 24 litros). Por nuestra premisa,

$$\frac{dx}{dt} = \text{razón de entrada} - \text{razón de salida} \ ,$$

de modo que la razón de cambio de la masa de sal en el tanque A es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{24}y - \frac{8}{24}x = \frac{1}{12}y - \frac{1}{3}x \ .$$

La razón de cambio de sal en el tanque B se determina mediante los mismos tubos de conexión *y* por el tubo de drenado, que saca $[6y/24]$ [kg /minuto]:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{24}x - \frac{2}{24}y - \frac{6}{24}y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \ .$$

Así, los tanques interconectados quedan descritos mediante un *sistema* de ecuaciones diferenciales:

(1)
$$x' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{12}y \ ,$$
$$y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \ .$$

Aunque ambas incógnitas $x(t)$ y $y(t)$ aparecen en cada una de las ecuaciones (1) (están "acopladas"), la estructura es tan transparente que podemos obtener una ecuación sólo en términos de *y*, despejando *x* en la segunda ecuación,

(2) $$x = 3y' + y \ ,$$

y sustituyendo (2) en la primera ecuación para eliminar *x*:

$$(3y' + y)' = -\frac{1}{3}(3y' + y) + \frac{1}{12}y \ ,$$
$$3y'' + y' = -y' - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}y \ ,$$

o

$$3y'' + 2y' + \frac{1}{4}y = 0 \ .$$

Esta última ecuación, que es lineal con coeficientes constantes, se resuelve fácilmente mediante los métodos de la sección 4.2 Como la ecuación auxiliar

$$3r^2 + 2r + \frac{1}{4} = 0$$

tiene raíces $-1/2$, $-1/6$, una solución general es

(3) $$y(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/6} \ .$$

Una vez determinada y, usamos la ecuación (2) para deducir una fórmula para x:

(4) $$x(t) = 3\left(-\frac{c_1}{2}e^{-t/2} - \frac{c_2}{6}e^{-t/6}\right) + c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/6} = -\frac{1}{2}c_1 e^{-t/2} + \frac{1}{2}c_2 e^{-t/6} \ .$$

Las fórmulas (3) y (4) contienen dos parámetros indeterminados, c_1 y c_2, que podemos ajustar para cumplir con las condiciones iniciales dadas:

$$x(0) = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = x_0 \ , \qquad y(0) = c_1 + c_2 = y_0 \ ,$$

o

$$c_1 = \frac{y_0 - 2x_0}{2} \ , \qquad c_2 = \frac{y_0 + 2x_0}{2} \ .$$

Así, las masas de sal en los tanques A y B en el instante t son, respectivamente,

(5)
$$x(t) = -\left(\frac{y_0 - 2x_0}{4}\right)e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{4}\right)e^{-t/6} \ ,$$

$$y(t) = \left(\frac{y_0 - 2x_0}{2}\right)e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{2}\right)e^{-t/6} \ .$$

El procedimiento de eliminación que utilizamos para resolver este ejemplo se generaliza y formaliza en la siguiente sección, para hallar soluciones de todos los *sistemas lineales con coeficientes constantes*. Además, en secciones posteriores mostraremos la forma de extender los algoritmos numéricos para ecuaciones de primer orden a sistemas *generales* y veremos aplicaciones a los osciladores acoplados y los circuitos eléctricos.

Es interesante observar en (5) que *todas* las soluciones del problema de tanques interconectados tienden a la solución constante $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ cuando $t \to +\infty$, lo que es consistente con nuestras expectativas físicas. Esta solución constante se identificará como una *solución de equilibrio estable* en la sección 5.4, donde presentamos el análisis del plano fase. Para una clase general de sistemas es posible identificar y clasificar los equilibrios y obtener así información cualitativa acerca de las demás soluciones, aunque no podamos resolver el sistema de manera explícita.

La última sección de este capítulo proporciona una introducción a una moderna área de las matemáticas conocida como la *teoría de caos*.

5.2 MÉTODO DE ELIMINACIÓN PARA SISTEMAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

La notación $y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}y$ fue diseñada para sugerir que la derivada de una función y es el resultado de *operar* la función con el operador diferencial $\dfrac{d}{dt}$. De hecho, las segun-

das derivadas se forman iterando la operación: $y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}y$. Por lo general, se usa el símbolo D en vez de $\frac{d}{dt}$, y la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

se representa† mediante

$$D^2y + 4Dy + 3y = (D^2 + 4D + 3)[y] = 0.$$

Así, hemos adoptado en forma implícita la convención de que el "producto" D por D, se interpreta como la *composición* de D consigo mismo al operar sobre funciones: D^2y significa $D(D[y])$; es decir, la segunda derivada. De manera similar, el producto $(D + 3)(D + 1)$ opera sobre una función como

$$\begin{aligned}(D + 3)(D + 1)[y] &= (D + 3)\big[(D + 1)[y]\big] = (D + 3)[y' + y] \\ &= D[y' + y] + 3[y' + y] \\ &= (y'' + y') + (3y' + 3y) = y'' + 4y' + 3y = (D^2 + 4D + 3)[y] .\end{aligned}$$

Así, $(D + 3)(D + 1)$ es el mismo operador que $D^2 + 4D + 3$; al aplicarlos a funciones dos veces diferenciables, los resultados son idénticos.

EJEMPLO 1 Mostrar que el operador $(D + 1)(D + 3)$ es lo mismo que $D^2 + 4D + 3$.

SOLUCIÓN Para cualquier función dos veces diferenciable $y(t)$, se tiene

$$\begin{aligned}(D + 1)(D + 3)[y] &= (D + 1)\big[(D + 3)[y]\big] = (D + 1)[y' + 3y] \\ &= D[y' + 3y] + 1[y' + 3y] = (y'' + 3y') + (y' + 3y) \\ &= y'' + 4y' + 3y = (D^2 + 4D + 3)[y].\end{aligned}$$

Por tanto, $(D + 1)(D + 3) = D^2 + 4D + 3$. ■

Como $(D + 1)(D + 3) = (D + 3)(D + 1) = D^2 + 4D + 3$, es tentador generalizar y proponerse considerar expresiones como $aD^2 + bD + c$ como si fuesen polinomios ordinarios en D. Esto es cierto, siempre que restrinjamos a a, b, c a ser *constantes*. El siguiente ejemplo con coeficientes *variables* es instructivo.

EJEMPLO 2 Mostrar que $(D + 3t)D$ *no* es lo mismo que $D(D + 3t)$.

SOLUCIÓN Con $y(t)$ como antes,

$$\begin{aligned}(D + 3t)D[y] &= (D + 3t)[y'] = y'' + 3ty' ; \\ D(D + 3t)[y] &= D[y' + 3ty] = y'' + 3y + 3ty' .\end{aligned}$$

¡No son iguales! ■

†Algunos autores utilizan el operador de identidad I, definido por $I[y] = y$, y escriben más formalmente $D^2 + 4D + 3I$ en vez de $D^2 + 4D + 3$.

Como el coeficiente $3t$ no es constante, "interrumpe" la interacción del operador diferencial D con la función $y(t)$. Mientras trabajemos con expresiones como $aD^2 + bD + c$ con coeficientes *constantes* a, b y c, el "álgebra" de los operadores diferenciales sigue las mismas reglas que el álgebra de los polinomios. (Véanse los problemas 39-41 para insistir sobre este punto).

Esto significa que el conocido método de eliminación, utilizado para resolver sistemas *algebraicos* como

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \ , \\ x + y - z &= 0 \ , \\ 2x - y + 3z &= 6 \ , \end{aligned}$$

se puede adaptar para resolver cualquier sistema de *ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*. De hecho, usamos este enfoque al resolver el sistema que surgió en el problema de los tanques interconectados de la sección 5.1. Nuestro objetivo en esta sección es formalizar este **método de eliminación** de modo que podamos atacar casos más generales de sistemas lineales con coeficientes constantes.

Primero mostraremos cómo aplicar el método a un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} a_1x'(t) + a_2x(t) + a_3y'(t) + a_4y(t) &= f_1(t) \ , \\ a_5x'(t) + a_6x(t) + a_7y'(t) + a_8y(t) &= f_2(t) \ , \end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_8$ son constantes y $x(t)$, $y(t)$ es la pareja de funciones por determinar. Con notación de operadores, esto es

$$\begin{aligned} (a_1D + a_2)[x] + (a_3D + a_4)[y] &= f_1 \ , \\ (a_5D + a_6)[x] + (a_7D + a_8)[y] &= f_2 \ . \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Resolver el sistema

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 4y(t) + 1 \ , \\ y'(t) &= 4x(t) - 7y(t) + 10t \ . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN El lector que ha permanecido alerta puede observar que como y' no aparece en la primera ecuación, podríamos usar la segunda para expresar y en términos de x y x' y sustituir en la segunda ecuación para deducir una ecuación "desacoplada" que sólo contenga a x y sus derivadas. Sin embargo, este sencillo truco no nos servirá para sistemas más generales (véase el problema 18).

Para utilizar el método de eliminación, primero escribimos el sistema con notación de operadores:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} (D - 3)[x] + 4y &= 1 \ , \\ -4x + (D + 7)[y] &= 10t \ . \end{aligned}$$

Al modelar el procedimiento de eliminación para sistemas algebraicos, podemos eliminar x de este sistema sumando 4 veces la primera ecuación a $(D - 3)$ aplicada a la segunda. Esto da como resultado

$$\big(16 + (D - 3)(D + 7)\big)[y] = 4 \cdot 1 + (D - 3)[10t] = 4 + 10 - 30t \ ,$$

lo que se simplifica como

$$\text{(3)} \qquad (D^2 + 4D - 5)[y] = 14 - 30t \ .$$

La ecuación (3) no es más que una ecuación lineal de segundo orden en y con coeficientes constantes, que tiene la solución general

(4) $$y(t) = C_1e^{-5t} + C_2e^{t} + 6t + 2 ,$$

que podemos hallar mediante coeficientes indeterminados.

Para determinar $x(t)$, tenemos dos opciones.

Método 1. Regresamos al sistema (2) y eliminamos y. Logramos esto "multiplicando" la primera ecuación en (2) por $(D + 7)$ y la segunda por -4 sumando los resultados para obtener

$$(D^2 + 4D - 5)[x] = 7 - 40t .$$

Esta ecuación también se puede resolver mediante coeficientes indeterminados para obtener

(5) $$x(t) = K_1e^{-5t} + K_2e^{t} + 8t + 5 ,$$

donde K_1 y K_2 son constantes arbitrarias, que no necesariamente son iguales a las constantes C_1 y C_2 utilizadas en la fórmula (4).

Es razonable esperar que el sistema (1) sólo implique *dos* constantes arbitrarias, pues consta de dos ecuaciones de primer orden. Así, las cuatro constante C_1, C_2, K_1 y K_2 no son independientes. Para determinar la relación entre ellas, sustituimos las expresiones para $x(t)$ y $y(t)$ dadas en (4) y (5) en una de las ecuaciones en (1), digamos, la primera. Esto da como resultado

$$\begin{aligned} &-5K_1e^{-5t} + K_2e^{t} + 8 = \\ &\qquad 3K_1e^{-5t} + 3K_2e^{t} + 24t + 15 - 4C_1e^{-5t} - 4C_2e^{t} - 24t - 8 + 1 ,\end{aligned}$$

lo que se simplifica como

$$(4C_1 - 8K_1)e^{-5t} + (4C_2 - 2K_2)e^{t} = 0 .$$

Como e^t y e^{-5t} son funciones linealmente independientes en cualquier intervalo, esta última ecuación es válida para toda t sólo si

$$4C_1 - 8K_1 = 0 \quad \text{y} \quad 4C_2 - 2K_2 = 0 .$$

Por lo tanto, $K_1 = C_1/2$ y $K_2 = 2C_2$.

Entonces, una solución del sistema (1) está dada por la pareja

(6) $$x(t) = \frac{1}{2}C_1e^{-5t} + 2C_2e^{t} + 8t + 5 , \qquad y(t) = C_1e^{-5t} + C_2e^{t} + 6t + 2 .$$

Como es de esperar, esta pareja es una **solución general** de (1), en el sentido de que *cualquier* solución de (1) se puede expresar de esta manera.

Método 2. Un método más sencillo para determinar $x(t)$ una vez que se conoce $y(t)$ consiste en usar el sistema para obtener una ecuación para $x(t)$ en términos de $y(t)$ y $y'(t)$. En este ejemplo, al despejar $x(t)$ en la segunda ecuación de (1) obtenemos:

$$x(t) = \frac{1}{4}y'(t) + \frac{7}{4}y(t) - \frac{5}{2}t .$$

Al sustituir la $y(t)$ dada en (4) se tiene

$$x(t) = \frac{1}{4}\left[-5C_1e^{-5t} + C_2e^t + 6\right] + \frac{7}{4}\left[C_1e^{-5t} + C_2e^t + 6t + 2\right] - \frac{5}{2}t$$
$$= \frac{1}{2}C_1e^{-5t} + 2C_2e^t + 8t + 5 \;,$$

lo que coincide con (6). ■

El procedimiento anterior sirve, de manera más general, para cualquier sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas con *coeficientes constantes*, sin importar el orden de las ecuaciones. Por ejemplo, si L_1, L_2, L_3, y L_4 denotan operadores diferenciales con coeficientes constantes (por ejemplo, polinomios en D), entonces el método se puede aplicar al sistema lineal

$$L_1[x] + L_2[y] = f_1 \;,$$
$$L_3[x] + L_4[y] = f_2 \;.$$

Como el sistema tiene coeficientes constantes, los operadores conmutan (por ejemplo, $L_2L_4 = L_4L_2$) y podemos eliminar variables de la manera algebraica usual. Al eliminar la variable y se tiene

(7) $$(L_1L_4 - L_2L_3)[x] = g_1 \;,$$

donde $g_1 := L_4[f_1] - L_2[f_2]$. De manera similar, eliminando la variable x se tiene

(8) $$(L_1L_4 - L_2L_3)[y] = g_2 \;,$$

donde $g_2 := L_1[f_2] - L_3[f_1]$. Ahora, si $L_1L_4 - L_2L_3$ es un operador diferencial de orden n, entonces una solución general de (7) contiene n constantes arbitrarias, y una solución general para (8) también contiene n constantes arbitrarias. Así, surge un total de $2n$ constantes. Sin embargo, como vimos en el ejemplo 3, sólo n de estas constantes son independientes para el sistema y las restantes se pueden expresar en términos de éstas.† La pareja de soluciones generales de (7) y (8) escritas en términos de las n constantes independientes es llamada **solución general del sistema.**

Si ocurre que $L_1L_4 - L_2L_3$ es el operador nulo, se dice que el sistema es **degenerado**. Como en el problema donde se buscan los puntos de intersección de dos rectas paralelas o iguales, un sistema degenerado puede no tener soluciones, o si posee soluciones, éstas pueden implicar cualquier cantidad de constantes arbitrarias (véanse los problemas 23 y 24).

PROCEDIMIENTO DE ELIMINACIÓN PARA SISTEMAS 2 × 2

Para determinar una solución general del sistema

$$L_1[x] + L_2[y] = f_1 \;,$$
$$L_3[x] + L_4[y] = f_2 \;,$$

donde L_1, L_2, L_3, y L_4 son polinomios en $D = d/dt$:

(a) Asegúrese de escribir el sistema en forma de operadores.

†Para una demostración de este hecho, véase *Ordinary Differential Equations*, por M. Tenenbaum y H. Pollard (Dover, Nueva York, 1985), capítulo 7.

(b) Elimine una de las variables, por ejemplo y, y resuelva la ecuación resultante para $x(t)$. Si el sistema es degenerado, ¡deténgase! Se necesita un análisis particular para determinar si hay o no soluciones.
(c) (*Atajo*) De ser posible, use el sistema para deducir una ecuación que implique $y(t)$ pero no a sus derivadas. [En caso contrario, vaya al paso (d)]. Sustituya la expresión hallada para $x(t)$ en esta ecuación y obtenga una fórmula para $y(t)$. Las expresiones para $x(t)$, $y(t)$ dan la solución general deseada.
(d) Elimine x del sistema y determine $y(t)$. [Al despejar $y(t)$ se tienen más constantes; de hecho, el doble de las necesarias].
(e) Elimine las constantes adicionales sustituyendo las expresiones para $x(t)$ y $y(t)$ en una o ambas ecuaciones del sistema. Escriba las expresiones para $x(t)$ y $y(t)$ en términos de las demás constantes.

EJEMPLO 4 Determinar una solución general para

$$\textbf{(9)} \qquad \begin{aligned} x''(t) + y'(t) - x(t) + y(t) &= -1 \ , \\ x'(t) + y'(t) - x(t) &= t^2 \ . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Primero expresamos el sistema con notación de operadores:

$$\textbf{(10)} \qquad \begin{aligned} (D^2 - 1)[x] + (D + 1)[y] &= -1 \ , \\ (D - 1)[x] + D[y] &= t^2 \ . \end{aligned}$$

En este caso, $L_1 := D^2 - 1$, $L_2 := D + 1$, $L_3 := D - 1$, y $L_4 := D$.

Al eliminar y se tiene (véase (7)):

$$\big((D^2 - 1)D - (D + 1)(D - 1)\big)[x] = D[-1] - (D + 1)[t^2] \ ,$$

lo que se reduce a

$$\textbf{(11)} \qquad \begin{aligned} (D - 1)\big((D + 1)D - (D + 1)\big)[x] &= -2t - t^2 \ , \\ (D - 1)^2(D + 1)[x] &= -2t - t^2 \ . \end{aligned}$$

Como $(D - 1)^2(D + 1)$ es de tercer orden, es de esperar que haya tres constantes arbitrarias en una solución general del sistema (9).

Aunque los métodos del capítulo 4 se centraron en la solución de ecuaciones de segundo orden, hemos visto varios ejemplos de cómo extenderlos naturalmente a ecuaciones de orden superior.[†] Al aplicar esta estrategia a la ecuación de tercer orden (11), observamos que la ecuación homogénea correspondiente tiene la ecuación auxiliar $(r - 1)^2(r + 1) = 0$ con raíces $r = 1, 1, -1$. Por lo tanto, una solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-t} \ .$$

Para determinar una solución particular de (11), usamos el método de coeficientes indeterminados con $x_p(t) = At^2 + Bt + C$. Al sustituir esto en (11) y determinar A, B y C, tenemos (después de un poco de álgebra)

$$x_p(t) = -t^2 - 4t - 6 \ .$$

[†]En el capítulo 6 se da un tratamiento detallado a las ecuaciones de órdenes más altas.

Así, una solución general de la ecuación (11) es

(12) $$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-t} - t^2 - 4t - 6 .$$

Para determinar $y(t)$, seguimos el atajo descrito en el paso (c) del recuadro con el procedimiento de eliminación. Al restar la segunda ecuación en (10) de la primera, tenemos

$$(D^2 - D)[x] + y = -1 - t^2 ,$$

de modo que

$$y = (D - D^2)[x] - 1 - t^2 .$$

Al insertar la expresión para $x(t)$ dada en (12), obtenemos

$$y(t) = C_1e^t + C_2(te^t + e^t) - C_3e^{-t} - 2t - 4$$
$$-[C_1e^t + C_2(te^t + 2e^t) + C_3e^{-t} - 2] - 1 - t^2 ,$$

(13) $$y(t) = -C_2e^t - 2C_3e^{-t} - t^2 - 2t - 3 .$$

Las fórmulas para $x(t)$ en (12) y $y(t)$ en (13) proporcionan la solución general de (9). ■

El método de eliminación también se aplica a sistemas lineales con tres o más ecuaciones e incógnitas; sin embargo, se vuelve demasiado complejo al aumentar el número de ecuaciones o incógnitas. Los métodos matriciales que se presentan en el capítulo 9 son más adecuados para sistemas más grandes. En este caso ilustramos la técnica de eliminación para un sistema 3×3.

EJEMPLO 5 Determinar una solución general de

(14) $$x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) ,$$
$$y'(t) = x(t) + z(t) ,$$
$$z'(t) = 4x(t) - 4y(t) + 5z(t) .$$

SOLUCIÓN Primero expresamos el sistema con notación de operadores:

(15) $$(D - 1)[x] - 2y + z = 0 ,$$
$$-x + D[y] - z = 0 ,$$
$$-4x + 4y + (D - 5)[z] = 0 .$$

Al eliminar z de las dos primeras ecuaciones (sumándolas) y luego de las dos últimas, se obtiene (después de algo de álgebra, que omitimos)

(16) $$(D - 2)[x] + (D - 2)[y] = 0 ,$$
$$-(D - 1)[x] + (D - 1)(D - 4)[y] = 0 .$$

Al eliminar x de este sistema de 2×2, obtenemos

$$(D - 1)(D - 2)(D - 3)[y] = 0 ,$$

que tiene la solución general

(17) $$y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} .$$

Al seguir el atajo, sumamos las dos ecuaciones en (16) para obtener una expresión para x en términos de y y sus derivadas, que se simplifica como

$$x = (D^2 - 4D + 2)[y] = y'' - 4y' + 2y \ .$$

Al sustituir la expresión (17) para $y(t)$ en esta ecuación, obtenemos

(18) $$x(t) = -C_1e^t - 2C_2e^{2t} - C_3e^{3t} \ .$$

Por último, al usar la segunda ecuación en (14) para hallar $z(t)$, obtenemos

$$z(t) = y'(t) - x(t) \ ,$$

y sustituirla en $y(t)$ y $x(t)$ tenemos

(19) $$z(t) = 2C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 4C_3e^{3t} \ .$$

Las expresiones para $x(t)$ en (18), $y(t)$ en (17) y $z(t)$ en (19) proporcionan una solución general con C_1, C_2, y C_3 como constantes arbitrarias. ■

EJERCICIOS 5.2

En los problemas 1 a 18, use el método de eliminación para determinar una solución general para el sistema lineal dado, donde la derivación es con respecto de t.

1. $x' + y' = -2y \ ,$
$x - 2y = y'$

2. $x' = 3y \ ,$
$y' = 2x - y$

3. $x' + 2y = 0 \ ,$
$x' - y' = 0$

4. $x' = x - y \ ,$
$y' = y - 4x$

5. $x' + y' - x = 5 \ ,$
$x' + y' + y = 1$

6. $x' = 3x - 2y + \text{sen } t \ ,$
$y' = 4x - y - \cos t$

7. $(D + 1)[u] - (D + 1)[v] = e^t \ ,$
$(D - 1)[u] + (2D + 1)[v] = 5$

8. $(D - 3)[x] + (D - 1)[y] = t \ ,$
$(D + 1)[x] + (D + 4)[y] = 1$

9. $x' + y' + 2x = 0 \ ,$
$x' + y' - x - y = \text{sen } t$

10. $2x' + y' - x - y = e^{-t} \ ,$
$x' + y' + 2x + y = e^t$

11. $(D^2 - 1)[u] + 5v = e^t \ ,$
$2u + (D^2 + 2)[v] = 0$

12. $D^2[u] + D[v] = 2 \ ,$
$4u + D[v] = 6$

13. $\dfrac{dx}{dt} = x - 4y \ ,$
$\dfrac{dy}{dt} = x + y$

14. $\dfrac{dx}{dt} + y = t^2 \ ,$
$-x + \dfrac{dy}{dt} = 1$

15. $\dfrac{dw}{dt} = 5w + 2z + 5t \ ,$
$\dfrac{dz}{dt} = 3w + 4z + 17t$

16. $\dfrac{dx}{dt} + x + \dfrac{dy}{dt} = e^{4t} \ ,$
$2x + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$

17. $x'' + 5x - 4y = 0 \ ,$
$-x + y'' + 2y = 0$

18. $x'' + y'' - x' = 2t$
$x'' + y' - x + y = -1$

En los problemas 19 a 21, resuelva el problema con valores iniciales dado.

19. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + y \ ; \quad x(0) = 1 \ ,$
$\dfrac{dy}{dt} = -2x + y \ ; \quad y(0) = 0 \ .$

20. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y - e^{2t} \ ; \quad x(0) = 1 \ ,$
$\dfrac{dy}{dt} = x + 2y \ ; \quad y(0) = -1$

21. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = y \; ; \quad x(0) = 3 \; , \qquad x'(0) = 1 \; ,$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = x \; ; \quad y(0) = 1 \; , \qquad y'(0) = -1$

22. Verifique que la solución al problema con valores iniciales

$$x' = 5x - 3y - 2 \; ; \qquad x(0) = 2 \; ,$$
$$y' = 4x - 3y - 1 \; ; \qquad y(0) = 0$$

satisface $|x(t)| + |y(t)| \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.

En los problemas 23 y 24, muestre que el sistema lineal dado es degenerado. Al tratar de resolver el sistema, determine si no tiene soluciones o si tiene una infinidad.

23. $(D - 1)[x] + (D - 1)[y] = -3e^{-2t} \; ,$

$(D + 2)[x] + (D + 2)[y] = 3e^{t}$

24. $D[x] + (D + 1)[y] = e^{t} \; ,$

$D[x] + (D + 1)[y] = 0$

En los problemas 25 a 28, use el método de eliminación para determinar una solución general para el sistema dado de tres ecuaciones con las tres funciones incógnitas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

25. $x' = x + 2y - z \; ,$

$y' = x + z \; ,$

$z' = 4x - 4y + 5z$

26. $x' = 3x + y - z \; ,$

$y' = x + 2y - z \; ,$

$z' = 3x + 3y - z$

27. $x' = 4x - 4z \; ,$

$y' = 4y - 2z \; ,$

$z' = -2x - 4y + 4z$

28. $x' = x + 2y + z \; ,$

$y' = 6x - y \; ,$

$z' = -x - 2y - z$

En los problemas 29 y 30, determine el rango de valores (si éste existe) del parámetro λ que garantice que ***todas*** *las soluciones $x(t)$, $y(t)$ del sistema dado permanezcan acotadas cuando $t \to +\infty$.*

29. $\dfrac{dx}{dt} = \lambda x - y \; ,$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x + y$

30. $\dfrac{dx}{dt} = -x + \lambda y \; ,$

$\dfrac{dy}{dt} = x - y$

31. Dos grandes tanques, cada uno con 100 litros de líquido, están conectados entre sí mediante tubos, de modo que el líquido fluye del tanque A al tanque B a razón de 3 litros/minuto y de B al A a razón de 1 litro/minuto (véase la figura 5.2). El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Una solución salina con una concentración de 0.2 kg/litro de sal fluye hacia el tanque A a razón de 6 litros/minuto. La solución (diluida) sale del sistema del tanque A a 4 litros/minuto y del tanque B a 2 litros/minuto. Si en un principio, el tanque A contiene agua pura y el tanque B contiene 20 kg de sal, determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$.

32. En el problema 31 fluían 3 litros/minuto de líquido del tanque A al tanque B y 1 litro/minuto del B al A. Determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$ si ahora fluyen 5 litros/minuto del A al B y 3 litros/minuto del B al A, manteniendo los demás datos.

33. En el problema 31, suponga que no hay salida de la solución del sistema desde el tanque B, que sólo fluye 1 litro/minuto del A al B y sólo entran 4 litros/minuto al sistema en el tanque A, manteniendo los demás datos. Determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$.

34. **Sistema de retroalimentación con retraso acumulado.** Muchos sistemas físicos y biológicos implican retrasos de tiempo. Un retraso de tiempo puro tiene una salida igual a la entrada, pero retrasada en el tiempo. Un tipo más común de retraso es el *retraso acumulado*. Un ejemplo de tal sistema de retroalimentación aparece en la figura 5.3 en la página 250. En este caso, el nivel de fluido en el tanque B determina la razón con que el fluido entra al tanque A. Suponga que esta razón está dada por $R_1(t) = \alpha[V - V_2(t)]$, donde α y V son constantes positivas y $V_2(t)$ es el volumen de fluido en el tanque B en el instante t.

(a) Si la razón de salida R_3 del tanque B es constante y la razón de flujo R_2 del tanque A al B es

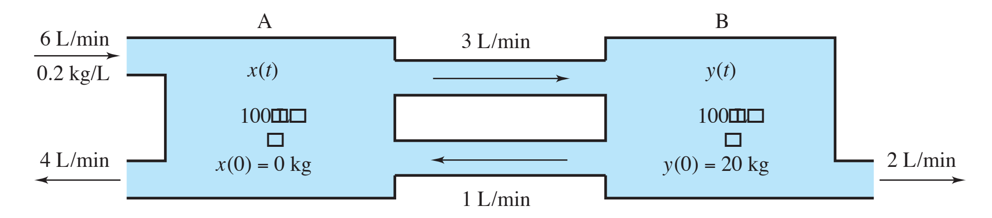


Figura 5.2 Problema de mezclas para tanques interconectados entre sí

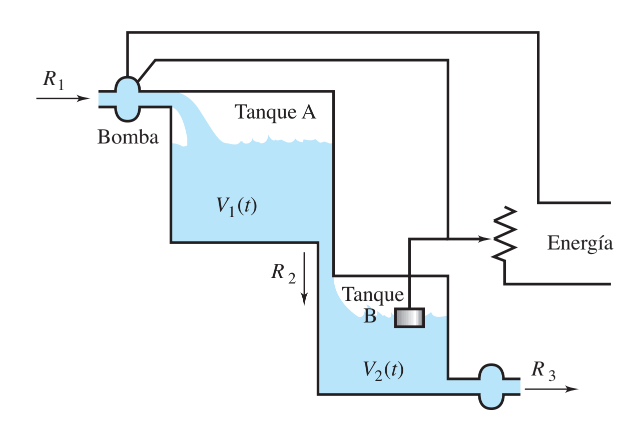


Figura 5.3 Sistema de retroalimentación con retraso acumulado

$R_2(t) = KV_1(t)$, donde K es una constante positiva y $V_1(t)$ es el volumen de fluido en el tanque A en el instante t, muestre entonces que este sistema de retroalimentación queda descrito mediante el sistema

$$\frac{dV_1}{dt} = \alpha\big(V - V_2(t)\big) - KV_1(t) \ ,$$

$$\frac{dV_2}{dt} = KV_1(t) - R_3 \ .$$

(b) Determine una solución general para el sistema de la parte (a) cuando $\alpha = (\text{min})^{-1}$, $V = 20$ Litros, $K = 2\ (\text{min})^{-1}$, y $R_3 = 10$ litros/minuto.

(c) Use la solución general obtenida en la parte (b). ¿Qué se puede decir acerca del volumen de fluido en cada uno de los tanques cuando $t \to +\infty$?

35. Para fines de enfriamiento, una casa consta de dos zonas: la zona A del desván y la zona B habitable (véase la figura 5.4). El área habitable se enfría mediante un sistema de aire acondicionado que elimina 24,000 Btu/h. La capacidad calórica de la zona B es de $1/2$°F por cada mil Btu. La constante de tiempo para la transferencia de calor entre la zona A y el exterior es de 2 horas, entre la zona B y el exterior es de 4 horas y entre las dos zonas es de 4 horas. Si la temperatura exterior se mantiene en 100°F, ¿qué temperatura puede alcanzarse en la zona A del desván? (En la sección 3.3 se estudió el calentamiento y el enfriamiento de edificios).

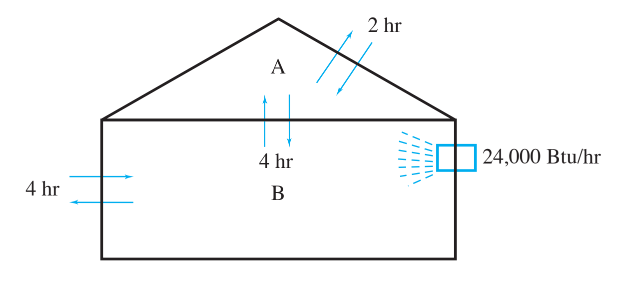


Figura 5.4 Casa con aire acondicionado y desván

36. Un edificio consta de dos zonas, A y B (véase la figura 5.5). Sólo la zona A es calentada mediante una caldera que genera 80,000 Btu/h. La capacidad calórica de la zona A es de $1/4$°F por cada mil Btu. La constante de tiempo para la transferencia de calor entre la zona A y el exterior es de 4 horas, entre la zona B no calentada y el exterior es de 5 horas y entre las dos zonas es de 2 horas. Si la temperatura exterior permanece en 0°F, ¿hasta qué temperatura podrá enfriarse la zona B no calentada B?

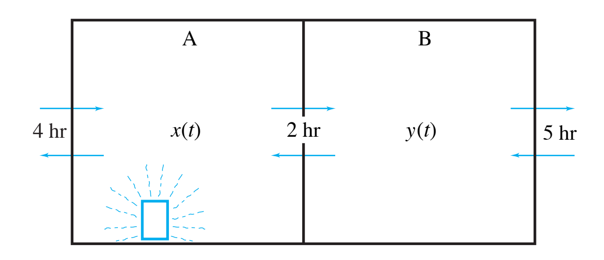


Figura 5.5 Edificio con dos zonas, una de ellas calentada

37. En el problema 36, si se coloca una pequeña caldera que genera 1,000 Btu/h en la zona B, determine la mínima temperatura que podría tenerse en la zona B si ésta tiene una capacidad calórica de 2°F por cada 1,000 Btu.

38. Carrera armamentista. Un modelo matemático simplificado para una carrera armamentista entre dos países cuyos gastos en defensa quedan expresados mediante las variables $x(t)$ y $y(t)$ está dado por el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = 2y - x + a \ ; \qquad x(0) = 1 \ ,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 3y + b \ ; \qquad y(0) = 4 \ ,$$

donde a y b son constantes que miden la confianza (o desconfianza) que cada país tiene en el otro. Determine si habrá un desarme (x y y tienden a cero al crecer t), una carrera armamentista estabilizada (x y y tienden a una constante cuando $t \to +\infty$) o una carrera armamentista desenfrenada (x y y tiende $+\infty$ cuando $t \to +\infty$).

39. Operadores diferenciales con coeficientes constantes. Sean A y B dos operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes; por ejemplo,

$$\boldsymbol{A := a_2D^2 + a_1D + a_0} \ ,$$
$$\boldsymbol{B := b_2D^2 + b_1D + b_0} \ ,$$

donde a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, y b_2 son constantes. Definimos la **suma** $A + B$ como

$$\boldsymbol{(A + B)[y] := A[y] + B[y]},$$

y el **producto** AB como

$$\boldsymbol{(AB)[y] := A\big[B[y]\big]} \ .$$

Observe que el producto AB es el operador compuesto que se obtiene al aplicar primero B y luego A. Decimos que dos operadores A y B son **iguales** si $A[y] = B[y]$ para cualquier función y con las derivadas necesarias. Con estas definiciones, verifique las siguientes propiedades:

(a) Leyes conmutativas:

$$A + B = B + A \ ,$$
$$AB = BA \ .$$

(b) Leyes asociativas:

$$(A + B) + C = A + (B + C) \ ,$$
$$(AB)C = A(BC) \ .$$

(c) Ley distributiva: $A(B + C) = AB + AC$.

40. Sean $A = (D - 1), B = (D + 2)$, y $y = x^3$. Calcule

(a) $A[y]$. **(b)** $B\big[A[y]\big]$. **(c)** $B[y]$.
(d) $A\big[B[y]\big]$. **(e)** AB. **(f)** $(AB)[y]$.

41. Factorice los siguientes operadores diferenciales:

(a) $D^2 + 3D - 4$. **(b)** $D^2 + D - 6$.
(c) $2D^2 + 9D - 5$. **(d)** $D^2 - 2$.

5.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SISTEMAS Y ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

Aunque en el capítulo 2 estudiamos una media docena de métodos analíticos para obtener soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, las técnicas para las ecuaciones de orden superior o los sistemas de ecuaciones son mucho más limitadas. En el capítulo 4 nos centramos en resolver la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. El método de eliminación de la sección anterior también se restringía a sistemas con coeficientes constantes. De hecho, las ecuaciones lineales de orden superior y los sistemas con coeficientes constantes se pueden resolver de manera analítica mediante extensiones de estos métodos, como veremos en los capítulos 6, 7 y 9.

Sin embargo, si las ecuaciones (incluso una sola ecuación lineal de segundo orden) tienen coeficientes variables, el proceso de solución es mucho menos satisfactorio. Como veremos en el capítulo 8, las soluciones se expresan como series infinitas, y su cálculo puede ser más laborioso. (Una notable excepción es la ecuación de Cauchy-Euler, o equidimensional; una sencilla sustitución la transforma en una ecuación con coeficientes constantes; véase la página 176). Virtualmente no sabemos nada de la forma para obtener soluciones exactas a ecuaciones no lineales de segundo orden.

Por fortuna, todos los casos (ecuaciones o sistemas no lineales, de orden superior, con coeficientes constantes o variables) pueden enfrentarse mediante una única formulación que conduce a varios enfoques *numéricos*. En esta sección veremos la forma de expresar las ecuaciones diferenciales como un *sistema en forma normal* y la forma de "vectorizar" el método de Euler para el cálculo de soluciones y aplicarlo a tales sistemas. Aunque en los capítulos posteriores volveremos a los métodos analíticos de solución, la versión vectorizada de la técnica de Euler o la técnica más eficiente de Runge-Kutta estarán disponibles para la exploración numérica de problemas intratables.

Forma normal

Un sistema de m ecuaciones diferenciales en las m funciones incógnitas $x_1(t)$, $x_2(t)$,…, $x_m(t)$ expresado en el formato

$$\textbf{(1)}\qquad \begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)\ , \\ x'_2(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)\ , \\ &\vdots \\ x'_m(t) &= f_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

es llamado **forma normal**. Observe que (1) consta de m ecuaciones de primer orden que en conjunto se ve como una versión *vectorizada* de una única ecuación genérica de primer orden

$$\textbf{(2)}\qquad x' = f(t, x)\ ,$$

y que el sistema expresado en la ecuación (1) de la sección 5.1 asume esta forma, al igual que las ecuaciones (1) y (14) de la sección 5.2. Un problema con valores iniciales para (1) implica determinar una solución de este sistema que satisfaga las condiciones iniciales

$$x_1(t_0) = a_1, \quad x_2(t_0) = a_2, \quad \ldots, \quad x_m(t_0) = a_m$$

para valores prescritos $t_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$.

La importancia de la forma normal está subvaluada por el hecho de que la mayor parte de los códigos profesionales para problemas con valores iniciales suponen que el sistema está escrito en esta forma. Además, para un sistema *lineal* en forma normal, se puede aplicar la poderosa maquinaria del álgebra lineal. [De hecho, en el capítulo 9 mostraremos que las soluciones $x(t) = ce^{at}$ de la sencilla ecuación $x' = ax$ se puede generalizar a sistemas con coeficientes constantes en forma normal].

Por estas razones, es gratificante observar que una (sola) ecuación de orden superior se puede convertir en un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden.

Un método para convertir una ecuación diferencial de orden m

$$\textbf{(3)}\qquad y^{(m)}(t) = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}\right)$$

en un sistema de primer orden consiste en introducir, como incógnitas adicionales, la serie de derivadas de y:

$$\boldsymbol{x_1(t) := y(t),\ \ x_2(t) := y'(t),\ \ldots,\ \ x_m(t) := y^{(m-1)}(t)\ .}$$

Con este esquema obtenemos $m - 1$ ecuaciones de primer orden de manera muy sencilla:

$$\textbf{(4)}\qquad \boldsymbol{\begin{aligned} x'_1(t) &= y'(t) = x_2(t)\ , \\ x'_2(t) &= y''(t) = x_3(t)\ , \\ &\vdots \\ x'_{m-1}(t) &= y^{(m-1)}(t) = x_m(t)\ . \end{aligned}}$$

La m–ésima y última ecuación constituye entonces una reformulación de la ecuación original (3) en términos de las nuevas incógnitas:

$$\textbf{(5)}\qquad \boldsymbol{x'_m(t) = y^{(m)}(t) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)\ .}$$

Si la ecuación (3) tiene condiciones iniciales $y(t_0) = a_1, y'(t_0) = a_2, \ldots, y^{(m-1)}(t_0) = a_m$, el sistema (4)-(5) tiene condiciones iniciales $x_1(t_0) = a_1, x_2(t_0) = a_2, \ldots, x_m(t_0) = a_m$.

EJEMPLO 1 Convertir el problema con valores iniciales

(6) $$y''(t) + 3ty'(t) + y(t)^2 = \text{sen}\, t\,; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$$

en un problema con valores iniciales para un sistema en forma normal.

SOLUCIÓN Primero expresamos la ecuación diferencial en (6) como

$$y''(t) = -3ty'(t) - y(t)^2 + \text{sen}\, t \;.$$

Al hacer $x_1(t) := y(t)$ y $x_2(t) := y'(t)$, obtenemos

$$x_1'(t) = x_2(t) \;,$$
$$x_2'(t) = -3tx_2(t) - x_1(t)^2 + \text{sen}\, t \;.$$

Las condiciones iniciales se transforman en $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 5$. ■

Método de Euler para sistemas en forma normal

Recuerde de la sección 1.4 que el método de Euler para resolver una sola ecuación de primer orden (2) se basa en la estimación de la solución x en el instante $(t_0 + h)$ mediante la aproximación

(7) $$x(t_0 + h) \approx x(t_0) + hx'(t_0) = x(t_0) + hf\big(t_0, x(t_0)\big) \;,$$

y que como consecuencia, el algoritmo se puede resumir mediante las fórmulas recursivas

(8) $$t_{n+1} = t_n + h \;,$$

(9) $$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

[compare las ecuaciones (2) y (3), sección 1.4]. Ahora podemos aplicar la aproximación (7) a cada una de las ecuaciones en el sistema (1):

(10) $$x_k(t_0 + h) \approx x_k(t_0) + hx_k'(t_0) = x_k(t_0) + hf_k\big(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_m(t_0)\big) \;,$$

y para $k = 1, 2, \ldots m$, llegamos a las fórmulas recursivas

(11) $$t_{n+1} = t_n + h \;,$$

(12) $$\begin{aligned} x_{1;n+1} &= x_{1;n} + hf_1(t_n, x_{1;n}, x_{2;n}, \ldots, x_{m;n}) \;, \\ x_{2;n+1} &= x_{2;n} + hf_2(t_n, x_{1;n}, x_{2;n}, \ldots, x_{m;n}) \;, \\ &\vdots \\ x_{m;n+1} &= x_{m;n} + hf_m(t_n, x_{1;n}, x_{2;n}, \ldots, x_{m;n}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \;. \end{aligned}$$

Aquí nos estorba la inútil notación $x_{p;n}$ para la aproximación al valor de la p-ésima función x_p en el instante $t = t_0 + nh$; es decir, $x_{p;n} \approx x_p(t_0 + nh)$. Sin embargo, si consideramos las incógnitas y los lados derechos de (1) como componentes de vectores

$$\mathbf{x}(t) := \big[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)\big] \;,$$
$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \big[f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_m), f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)\big] \;,$$

entonces (12) se puede expresar en la forma más agradable

(13) $$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) \;.$$

EJEMPLO 2 Use el método de Euler vectorizado con tamaño de paso $h = 0.1$ para determinar una aproximación de la solución al problema con valores iniciales

$$\textbf{(14)} \qquad y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0; \qquad y(0) = 1.5 \ , \quad y'(0) = -2.5 \ ,$$

en el intervalo [0, 1].

SOLUCIÓN Para el tamaño de paso dado, el método proporcionaría aproximaciones para $y(0.1), y(0.2), \ldots, y(1.0)$. Para aplicar el método de Euler vectorizado a (14), primero convertimos el problema a su forma normal. Al hacer $x_1 = y$ y $x_2 = y'$, obtenemos el sistema

$$\textbf{(15)} \qquad \begin{aligned} x_1' &= x_2; & x_1(0) &= 1.5 \ , \\ x_2' &= -4x_2 - 3x_1; & x_2(0) &= -2.5 \ . \end{aligned}$$

Al comparar (15) con (1), vemos que $f_1(t, x_1, x_2) = x_2$ y $f_2(t, x_1, x_2) = -4x_2 - 3x_1$. Con los valores de partida of $t_0 = 0$, $x_{1;0} = 1.5$, y $x_{2;0} = -2.5$, calculamos

$$\begin{cases} x_1(0.1) \approx x_{1;1} = x_{1;0} + hx_{2;0} = 1.5 + 0.1(-2.5) = 1.25 \ , \\ x_2(0.1) \approx x_{2;1} = x_{2;0} + h(-4x_{2;0} - 3x_{1;0}) = -2.5 + 0.1[-4(-2.5) - 3 \cdot 1.5] = -1.95 \ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0.2) \approx x_{1;2} = x_{1;1} + hx_{2;1} = 1.25 + 0.1(-1.95) = 1.055 \ , \\ x_2(0.2) \approx x_{2;2} = x_{2;1} + h(-4x_{2;1} - 3x_{1;1}) = -1.95 + 0.1[-4(-1.95) - 3 \cdot 1.25] = -1.545 \ . \end{cases}$$

Continuamos con el algoritmo para obtener los valores restantes, que aparecen en la tabla 5.1, junto con los valores exactos calculados mediante los métodos del capítulo 4. Observe que la columna $x_{2;n}$ proporciona las aproximaciones de $y'(t)$, pues $x_2(t) \equiv y'(t)$. ■

TABLA 5.1 APROXIMACIONES DE LA SOLUCIÓN A (14) EN EL EJEMPLO 2

$t = n(0.1)$	$x_{1;n}$	y Exacta	$x_{2;n}$	y' Exacta
0	1.5	1.5	−2.5	−2.5
0.1	1.25	1.275246528	−1.95	−2.016064749
0.2	1.055	1.093136571	−1.545	−1.641948207
0.3	0.9005	0.944103051	−1.2435	−1.35067271
0.4	0.77615	0.820917152	−1.01625	−1.122111364
0.5	0.674525	0.71809574	−0.842595	−0.9412259
0.6	0.5902655	0.63146108	−0.7079145	−0.796759968
0.7	0.51947405	0.557813518	−0.60182835	−0.680269946
0.8	0.459291215	0.494687941	−0.516939225	−0.585405894
0.9	0.407597293	0.440172416	−0.4479509	−0.507377929
1	0.362802203	0.392772975	−0.391049727	−0.442560044

El método de Euler es más o menos preciso para este problema, con un tamaño de paso de $h = 0.1$. El siguiente ejemplo demuestra los efectos del uso de menores valores de h para mejorar la precisión.

EJEMPLO 3 Para el problema con valores iniciales del ejemplo 2, usar el método de Euler para estimar $y(1)$ para mitades sucesivas de tamaño de paso $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$.

SOLUCIÓN Con el mismo esquema del ejemplo 2, hallamos las siguientes aproximaciones, denotadas por $y(1;h)$ (obtenida con tamaño de paso h):

h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
$y(1;h)$	0.36280	0.37787	0.38535	0.38907	0.39092

[Recuerde que el valor exacto, redondeado a cinco cifras decimales, es $y(1) = 0.39277$]. ■

El esquema de Runge-Kutta descrito en la sección 3.7 también es fácil de vectorizar; los detalles aparecen en la página siguiente. Como sería de esperar, su desempeño es mucho más preciso, pues proporciona una coincidencia de 5 cifras decimales con la solución exacta para un tamaño de paso de 0.05:

h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
$y(1;h)$	0.39278	0.39277	0.39277	0.39277	0.39277

Como en la sección 3.7, ambos algoritmos se pueden codificar para repetir el cálculo de $y(1)$ con una sucesión de tamaños de paso cada vez menores hasta que dos estimaciones consecutivas coincidan salvo cierta tolerancia dada ε. Aquí hay que interpretar "dos estimaciones que coinciden salvo ε" como la diferencia entre *los componentes* de las aproximaciones sucesivas [es decir, las aproximaciones a $y(1)$ y $y'(1)$] sea menor que ε.

Una aplicación a la dinámica de poblaciones

A principios del siglo XX, A. J. Lotka y V. Volterra desarrollaron en forma independiente un modelo matemático para la dinámica de poblaciones de especies en competencia, una de las cuales es un depredador con población $x_2(t)$ y la otra es su presa con población $x_1(t)$. Este modelo supone que hay una gran cantidad de alimento disponible para la presa, de modo que la tasa de natalidad de la presa debe seguir la ley de Malthus o exponencial (véase la sección 3.2); es decir, la tasa de natalidad de la presa es Ax_1, donde A es una constante positiva. La tasa de mortalidad de la presa depende del número de interacciones entre los depredadores y las presas. Esto queda descrito por la expresión Bx_1x_2, donde B es una constante positiva. Por lo tanto, la razón de cambio en la población de las presas por unidad de tiempo es $dx_1/dt = Ax_1 - Bx_1x_2$. Suponiendo que los depredadores dependan completamente de la presa como su alimento, entonces la tasa de natalidad de los depredadores depende del número de interacciones con las presas; es decir, la tasa de natalidad de los depredadores es Dx_1x_2, donde D es una constante positiva. Suponemos que la tasa de mortalidad de los depredadores es Cx_2, pues sin alimento, la población moriría a una razón proporcional a la población presente. Por lo tanto, la razón de cambio en la población de depredadores por unidad de tiempo es $dx_2/dt = -Cx_2 + Dx_1x_2$. Al combinar estas dos ecuaciones obtenemos

el sistema de Lotka-Volterra para la dinámica de poblaciones de dos especies en competencia:

$$\textbf{(16)}\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x_1'} &= \boldsymbol{Ax_1 - Bx_1x_2} \ , \\ \boldsymbol{x_2'} &= \boldsymbol{-Cx_2 + Dx_1x_2} \ . \end{aligned}$$

En general, tales sistemas no se pueden resolver de manera explícita. En el siguiente ejemplo obtenemos una solución aproximada de tal sistema mediante la forma vectorizada del algoritmo de Runge-Kutta.

Para el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2) \ , \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2) \ , \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x_1(t_0) = x_{1;0}$, $x_2(t_0) = x_{2;0}$, la forma vectorizada de las ecuaciones (14), página 136, se convierte en

$$\textbf{(17)}\qquad \begin{cases} t_{n+1} := t_n + h \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \ , \\ x_{1;n+1} := x_{1;n} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) \ , \\ x_{2;n+1} := x_{2;n} + \frac{1}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) \ , \end{cases}$$

donde h es el tamaño de paso; para $i = 1$ y 2,

$$\textbf{(18)}\qquad \begin{cases} k_{i,1} := hf_i(t_n, x_{1;n}, x_{2;n}) \ , \\ k_{i,2} := hf_i\left(t_n + \frac{h}{2},\ x_{1;n} + \frac{1}{2}k_{1,1},\ x_{2;n} + \frac{1}{2}k_{2,1}\right) \ , \\ k_{i,3} := hf_i\left(t_n + \frac{h}{2},\ x_{1;n} + \frac{1}{2}k_{1,2},\ x_{2;n} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right) \ , \\ k_{i,4} := hf_i(t_n + h,\ x_{1;n} + k_{1,3},\ x_{2;n} + k_{2,3}) \ . \end{cases}$$

Es importante observar que $k_{1;1}$ y $k_{2;1}$ deben calcularse antes que $k_{1,2}$ y $k_{2,2}$. De manera similar, hay que calcular $k_{1;2}$ y $k_{2;2}$ para calcular $k_{1;3}$ y $k_{2;3}$, etcétera. En el programa del apéndice E se bosqueja la aplicación del método para graficar soluciones aproximadas en un intervalo dado $[t_0, t_1]$ o bien obtener aproximaciones de las soluciones en un punto dado, con la tolerancia deseada.

EJEMPLO 4 Usar el algoritmo clásico de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas con el fin de aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$\textbf{(19)}\qquad \begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - 2x_1x_2 \ ; &\quad x_1(0) &= 1 \ , \\ x_2' &= x_1x_2 - x_2 \ ; &\quad x_2(0) &= 3 \end{aligned}$$

en $t = 1$. Comenzando desde $h = 1$, continúe dividiendo a la mitad el tamaño de paso hasta que dos aproximaciones sucesivas de $x_1(1)$ y de $x_2(1)$ difieran a lo más en 0.0001.

SOLUCIÓN En este caso, $f_1(t, x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_1x_2$ y $f_2(t, x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2$. Con los datos $t_0 = 0$, $x_{1;0} = 1$, $x_{2;0} = 3$, procedemos con el algoritmo para calcular $x_1(1; 1)$ y $x_2(1; 1)$, las aproximaciones de $x_1(1)$, $x_2(1)$ usando $h = 1$. Por las fórmulas en (18) tenemos que

$$k_{1,1} = h(2x_{1;0} - 2x_{1;0}x_{2;0}) = 2(1) - 2(1)(3) = -4 \ ,$$

$$k_{2,1} = h(x_{1;0}x_{2;0} - x_{2;0}) = (1)(3) - 3 = 0 \ ,$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= h\left[2\left(x_{1;0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}\right) - 2\left(x_{1;0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}\right)\left(x_{2;0} + \tfrac{1}{2}k_{2,1}\right)\right] \\ &= 2\left[1 + \tfrac{1}{2}(-4)\right] - 2\left[1 + \tfrac{1}{2}(-4)\right]\left[3 + \tfrac{1}{2}(0)\right] \\ &= -2 + 2(3) = 4 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2,2} &= h\left[\left(x_{1;0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}\right)\left(x_{2;0} + \tfrac{1}{2}k_{2,1}\right) - \left(x_{2;0} + \tfrac{1}{2}k_{2,1}\right)\right] \\ &= \left[1 + \tfrac{1}{2}(-4)\right]\left[3 + \tfrac{1}{2}(0)\right] - \left[3 + \tfrac{1}{2}(0)\right] \\ &= (-1)(3) - 3 = -6 \ , \end{aligned}$$

De manera análoga calculamos

$$k_{1,3} = h\left[2\left(x_{1;0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}\right) - 2\left(x_{1;0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}\right)\left(x_{2;0} + \tfrac{1}{2}k_{2,2}\right)\right] = 6 \ ,$$

$$k_{2,3} = h\left[\left(x_{1;0} + \tfrac{1}{2}k_{1;2}\right)\left(x_{2;0} + \tfrac{1}{2}k_{2,2}\right) - \left(x_{2;0} + \tfrac{1}{2}k_{2,2}\right)\right] = 0 \ ,$$

$$k_{1,4} = h[2(x_{1;0} + k_{1,3}) - 2(x_{1;0} + k_{1,3})(x_{2;0} + k_{2,3})] = -28 \ ,$$

$$k_{2,4} = h[(x_{1;0} + k_{1,3})(x_{2;0} + k_{2,3}) - (x_{2;0} + k_{2,3})] = -18 \ .$$

Insertando estos valores en la fórmula (17) obtenemos

$$\begin{aligned} x_{1;1} &= x_{1;0} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) \\ &= 1 + \frac{1}{6}(-4 + 8 + 12 - 28) = -1 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{2;1} &= x_{2;0} + \frac{1}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) \ , \\ &= 3 + \frac{1}{6}(0 - 12 + 0 + 18) = 4 \ , \end{aligned}$$

como las aproximaciones respectivas a $x_1(1)$ y $x_2(1)$.

Al repetir el algoritmo con $h = 1/2$ $(N = 2)$ obtenemos las aproximaciones $x_1(1; 2^{-1})$ y $x_2(1; 2^{-1})$ para $x_1(1)$ y $x_2(1)$ En la tabla 5.2 enumeramos las aproximaciones $x_1(1; 2^{-m})$ y $x_2(1; 2^{-m})$ para $x_1(1)$ y $x_2(1)$ usando el tamaño de paso $h = 2^{-m}$ para $m = 0, 1, 2, 3$ y 4. Nos detenemos en $m = 4$, pues

$$|x_1(1; 2^{-3}) - x_1(1; 2^{-4})| = 0.00006 < 0.0001$$

y

$$|x_2(1; 2^{-3}) - x_2(1; 2^{-4})| = 0.00001 < 0.0001 \ .$$

Por tanto, $x_1(1) \approx 0.07735$ y $x_2(1) \approx 1.46445$, con tolerancia 0.0001. ■

TABLA 5.2 APROXIMACIONES DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA (17) EN EL EJEMPLO 4

m	h	$x_1(1; h)$	$x_2(1; h)$
0	1.0	−1.0	4.0
1	0.5	0.14662	1.47356
2	0.25	0.07885	1.46469
3	0.125	0.07741	1.46446
4	0.0625	0.07735	1.46445

Para hacerse una mejor idea de la solución del sistema (19), en la figura 5.6 hemos graficado la aproximación de la solución para $0 \leq t \leq 12$, usando interpolación lineal para unir las aproximaciones vectorizadas de Runge-Kutta para los puntos $t = 0, 0.125, 0.25, \ldots,$ 12.0 (es decir, con $h = 0.125$). La gráfica sugiere que los componentes x_1 y x_2 son periódicos en la variable t. En el proyecto D usamos el análisis en el plano fase para mostrar que, en efecto, las ecuaciones de Volterra-Lotka tienen soluciones periódicas.

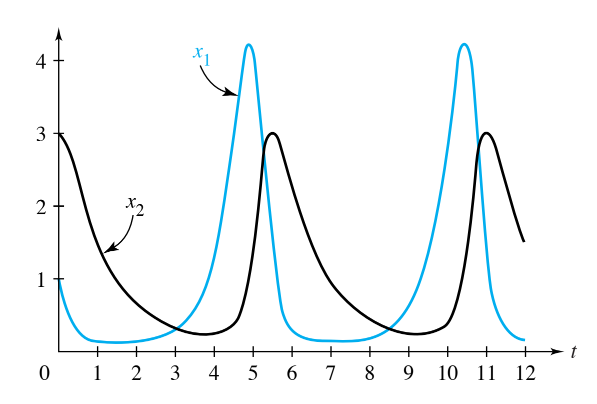


Figura 5.6 Gráficas de los componentes de una solución aproximada del sistema de Volterra-Lotka (17)

EJERCICIOS 5.3

En los problemas 1 a 7, convierta el problema con valores iniciales dado en un problema con valores iniciales para un sistema en forma normal.

1. $y''(t) + ty'(t) - 3y(t) = t^2$;
$y(0) = 3$, $y'(0) = -6$.

2. $y''(t) = \cos(t - y) + y^2(t)$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

3. $y^{(4)}(t) - y^{(3)}(t) + 7y(t) = \cos t$;
$y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 2$

4. $y^{(6)}(t) = [y'(t)]^3 - \operatorname{sen}\big(y(t)\big) + e^{2t}$;
$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(5)}(0) = 0$

5. $x'' + y - x' = 2t$; $x(3) = 5$, $x'(3) = 2$,
$y'' - x + y = -1$; $y(3) = 1$, $y'(3) = -1$
[*Sugerencia:* haga $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = y$, $x_4 = y'$].

6. $3x'' + 5x - 2y = 0$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$,
$4y'' + 2y - 6x = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

7. $x''' - y = t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 4$,
$2x'' + 5y'' - 2y = 1$; $y(0) = y'(0) = 1$

8. Forma de Sturm-Liouville. Una ecuación de segundo orden está en la **Forma de Sturm-Liouville.** si se expresa como

$$[p(t)y'(t)]' + q(t)y(t) = 0 \ .$$

Muestre que las sustituciones $x_1 = y$, $x_2 = py'$ producen la forma normal

$$x_1' = x_2/p \ ,$$
$$x_2' = -qx_1 \ .$$

Si $y(0) = a$ y $y'(0) = b$ son los valores iniciales para el problema de Sturm-Liouville, ¿cuál es el valor de $x_1(0)$ y $x_2(0)$?

9. En la sección 3.6 analizamos el método de Euler mejorado para aproximar la solución de una ecuación de primer orden. Extienda este método a sistemas normales y proporcione las fórmulas recursivas para resolver el problema con valores iniciales.

Usted necesitará una computadora y una versión programada del método de Euler vectorizado y del algoritmo clásico de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver los problemas 10 a 30. (El instructor puede indicar si se utiliza otro software).

En los problemas 10 a 13, use el método de Euler vectorizado con h = 0.25 para determinar una aproximación de la solución al problema con valores iniciales dado en el intervalo indicado. (Para un intervalo $t_0 \le t \le c$, recuerde que el dato con el número de pasos N y el tamaño de pasos h cumplen la relación $Nh = c - t_0$).

10. $y'' + ty' + y = 0$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ en $[0, 1]$.

11. $(1 + t^2)y'' + y' - y = 0$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ en $[0, 1]$.

12. $t^2y'' + y = t + 2$;
$y(1) = 1$, $y'(1) = -1$ en $[1, 2]$.

13. $y'' = t^2 - y^2$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ en $[0, 1]$.
(¿Podría estimar la solución?).

14. Use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta con $h = 0.5$ para aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$3t^2y'' - 5ty' + 5y = 0 \ ;$$
$$y(1) = 0 \ , \qquad y'(1) = \frac{2}{3}$$

en $t = 8$. Compare esta aproximación con la solución real $y(t) = t^{5/3} - t$.

15. Use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta para aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$y'' = t^2 + y^2 \ ; \qquad y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0$$

en $t = 1$. Partiendo de $h = 1$, continúe dividiendo a la mitad el tamaño de paso hasta que dos aproximaciones sucesivas de $[y(0)$ y $y'(0)]$ difieran a lo más 0.01.

16. Use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.125$, para aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$x' = 2x - y \ ; \qquad x(0) = 0 \ ,$$
$$y' = 3x + 6y \ ; \qquad y(0) = -2$$

en $t = 1$. Compare esta aproximación con la solución real

$$x(t) = e^{5t} - e^{3t} \ , \qquad y(t) = e^{3t} - 3e^{5t} \ .$$

17. Use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta para aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{du}{dx} = 3u - 4v \ ; \qquad u(0) = 1 \ ,$$
$$\frac{dv}{dx} = 2u - 3v \ ; \qquad v(0) = 1$$

en $x = 1$. Partiendo de $h = 1$, continúe dividiendo a la mitad el tamaño de paso hasta que dos aproximaciones sucesivas de $u(1)$ y $v(1)$ difieran a lo más 0.001.

18. Modelo de combate. Un modelo matemático sencillo para el combate de un ejército convencional contra la guerrilla está dado por el sistema

$$x_1' = -(0.1)x_1x_2 \ ; \qquad x_1(0) = 10 \ ,$$
$$x_2' = -x_1 \ ; \qquad x_2(0) = 15 \ ,$$

donde x_1 y x_2 son la fuerza de la guerrilla y las tropas convencionales, respectivamente, y 0.1 y 1 son los *coeficientes de eficacia en combate*. ¿Quién ganará el conflicto, las tropas convencionales o la guerrilla? [*Sugerencia:* Use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.1$ para aproximar las soluciones].

19. Modelo presa-depredador. El modelo presa-depredador de Volterra-Lotka predice cierto comportamiento interesante que es claro en ciertos sistemas biológicos. Por ejemplo, suponga que fija la población inicial de presas pero que incrementa la población inicial de depredadores. Entonces el ciclo de población de las presas se vuelve más severo, en el sentido de que hay un largo periodo de tiempo con una población reducida de presas, seguido de un breve periodo en que la población de presas es muy grande. Para demostrar este comportamiento, use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.5$ y aproxime la población de presas x y de depredadores y en el periodo $[0, 5]$ que satisface el sistema de Volterra-Lotka

$$x' = x(3 - - y) \ ,$$
$$y' = y(x - 3)$$

bajo cada una de las siguientes condiciones iniciales:

(a) $x(0) = 2 \ , \quad y(0) = 4$
(b) $x(0) = 2 \ , \quad y(0) = 5$
(c) $x(0) = 2 \ , \quad y(0) = 7 \ .$

20. En el proyecto G del capítulo 4 se mostró que la ecuación del péndulo simple

$$\theta''(t) + \operatorname{sen} \theta(t) = 0$$

tiene soluciones periódicas cuando el desplazamiento y la velocidad iniciales son pequeños. Muestre que el periodo de solución puede depender de las condiciones iniciales usando el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta con $h = 0.02$ para aproximar las soluciones al problema del péndulo simple en $[0, 4]$ las condiciones iniciales siguientes:

(a) $\theta(0) = 0.1 \ , \quad \theta'(0) = 0$
(b) $\theta(0) = 0.5 \ , \quad \theta'(0) = 0$
(c) $\theta(0) = 1.0 \ , \quad \theta'(0) = 0 \ .$

[*Sugerencia:* Aproxime la longitud de tiempo que tarda en llegar a $-\theta(0)$].

21. Eyección de fluido. En el diseño de una planta de tratamiento de aguas negras surge la siguiente ecuación:†

$$60 - H = (77.7)H'' + (19.42)(H')^2 \ ;$$
$$H(0) = H'(0) = 0 \ ,$$

donde H es el nivel de fluido en una cámara de eyección y t es el tiempo en segundos. Use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta con $h = 0.5$ para aproximar $H(t)$ en el intervalo $[0, 5]$.

22. Oscilaciones y ecuaciones no lineales. Para el problema con valores iniciales

$$x'' + (0.1)(1 - x^2)x' + x = 0 \ ;$$
$$x(0) = x_0 \ , \qquad x'(0) = 0 \ ,$$

use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta con $h = 0.02$ para mostrar que cuando t crece de 0 a 20, la solución x exhibe oscilaciones amortiguadas cerca de $x_0 = 1$, mientras que x exhibe oscilaciones con expansión cerca de $x_0 = 2.1$.

23. Resorte no lineal. La **ecuación de Duffing**

$$y'' + y + ry^3 = 0 \ ,$$

donde r es una constante, modela las vibraciones de una masa unida a un resorte *no lineal*. Para este modelo, ¿varía el periodo de vibración al variar el parámetro r? ¿Varía el periodo al modificar las condiciones iniciales? [*Sugerencia:* Use el algoritmo vectorizado de Runge-Kutta con $h = 0.1$ para apro-

†Véase *Numerical Solution of Differential Equations*, por William Milne (Dover, Nueva York, 1970), página 82.

ximar las soluciones para $r = 1$ y 2, con condiciones iniciales $y(0) = a, y'(0) = 0$ para $a = 1, 2$, y 3].

24. Péndulo con longitud variable. Se construye un péndulo mediante una masa m unida extremo de un cable sujetado al techo. Suponga que la longitud $l(t)$ del cable varía con el tiempo de cierta manera predeterminada. Si $\theta(t)$ es el ángulo entre el péndulo y la vertical, entonces el movimiento del péndulo queda descrito mediante el problema con valores iniciales

$$l^2(t)\theta''(t) + 2l(t)l'(t)\theta'(t) + gl(t)\theta(t) = 0 \ ;$$
$$\theta(0) = \theta_0 \ , \qquad \theta'(0) = \theta_1 \ ,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Suponga que

$$l(t) = l_0 + l_1 \cos(\omega t - \phi) \ ,$$

donde l_1 es mucho menor que l_0. (Esto podría ser un modelo para una persona en un columpio, donde la acción de *empuje* cambia la distancia del centro de masa del columpio al punto donde está sostenido éste). Para simplificar los cálculos, haga $g = 1$. Use el algoritmo de Runge-Kutta con $h = 0.1$, para estudiar el movimiento del péndulo cuando $\theta_0 = 0.5$, $\theta_1 = 0$, $l_0 = 1$, $l_1 = 0.1$, $\omega = 1$, y $\phi = 0.02$. En particular, ¿alcanza el péndulo un ángulo mayor en valor absoluto que el ángulo inicial θ_0? ¿Excede al valor 1 el arco transversal recorrido durante la mitad de una oscilación?

En los problemas 25-30, use un paquete de software o la SUBRUTINA del apéndice E.

25. Use el algoritmo de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.05$, para aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$y''' + y'' + y^2 = t \ ;$$
$$y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0 \ , \qquad y''(0) = 1$$

en $t = 1$.

26. Use el algoritmo de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$x' = yz \ ; \qquad x(0) = 0 \ ,$$
$$y' = -xz \ ; \qquad y(0) = 1 \ ,$$
$$z' = -xy/2 \ ; \qquad z(0) = 1$$

en $t = 1$.

27. Ecuación de Blasius generalizada. H. Blasius, en su estudio del flujo laminar de un fluido, encontró una ecuación de la forma

$$y''' + yy'' = (y')^2 - 1 \ .$$

Use el algoritmo de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.1$ para aproximar la solución que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, y $y''(0) = 1.32824$. Bosqueje esta solución en el intervalo $[0, 2]$.

28. Órbita lunar. El movimiento de una luna que se mueve en una órbita plana en torno de un planeta queda descrito mediante las ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{mx}{r^3} \ , \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -G\frac{my}{r^3} \ ,$$

donde $r := (x^2 + y^2)^{1/2}$, G es la constante gravitacional y m s la masa de la luna. Suponga que $Gm = 1$. Cuando $x(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = 0$, y $y'(0) = 1$, el movimiento es una órbita circular de radio 1 y periodo 2π.

(a) Haga $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = y$, $x_4 = y'$, y exprese las ecuaciones como un sistema de primer orden en forma normal

(b) Use $h = 2\pi/100 \approx 0.0628318$, para calcular una órbita de esta luna (es decir, haga $N = 100$). ¿Coinciden sus aproximaciones con el hecho de que la órbita sea un círculo de radio 1?

29. Especies en competencia. Sea $p_i(t)$ la población de tres especies en competencia S_i, $i = 1, 2, 3$, respectivamente. Suponga que estas especies tienen la misma tasa de crecimiento y que la población máxima que puede soportar el hábitat es la misma para cada especie. (Suponemos que es la unidad). Suponga además que la ventaja competitiva que tiene S_1 sobre S_2 es la misma que la de S_2 sobre S_3 y la de S_3 sobre S_1. Modelamos esta situación mediante el sistema

$$p_1' = p_1(1 - p_1 - ap_2 - bp_3) \ ,$$
$$p_2' = p_2(1 - bp_1 - p_2 - ap_3) \ .$$
$$p_3' = p_3(1 - ap_1 - bp_2 - p_3) \ ,$$

donde a y b son constantes positivas. Para demostrar la dinámica de poblaciones de este sistema cuando $a = b = 0.5$, use el algoritmo de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.1$ para aproximar las poblaciones p_i en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ bajo cada una de las siguientes condiciones iniciales:

(a) $p_1(0) = 1.0$, $p_2(0) = 0.1$, $p_3(0) = 0.1$
(b) $p_1(0) = 0.1$, $p_2(0) = 1.0$, $p_3(0) = 0.1$
(c) $p_1(0) = 0.1$, $p_2(0) = 0.1$, $p_3(0) = 1.0$.

Con base en los resultados de las partes (a)–(c), Con base en los resultados de las partes $t \to +\infty$?

Cuando $a = 0.5$ y $b = 2.0$, el comportamiento de estas poblaciones es totalmente distinto (véase el proyecto F).

30. Péndulo con resorte. Consideremos una masa unida a un extremo de un resorte con constante de resorte k y el otro extremo unido al techo. Sea l_0 la longitud natural del resorte y $l(t)$ su longitud en el instante t. Si $\theta(t)$ es el ángulo entre el péndulo y la vertical, entonces el movimiento del péndulo con resorte queda descrito mediante el sistema

$$l''(t) - l(t)\theta'(t) - g\cos\theta(t) + \frac{k}{m}(l - l_0) = 0 \ ,$$

$$l^2(t)\theta''(t) + 2l(t)l'(t)\theta'(t) + gl(t)\,\text{sen}\,\theta(t) = 0 \ .$$

Suponga que $g = 1$, $k = m = 1$, y $l_0 = 4$. Cuando el sistema está en reposo, $l = l_0 + mg/k = 5$.

(a) Describa el movimiento del péndulo cuando $l(0) = 5.5$, $l'(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, y $\theta'(0) = 0$.

(b) Cuando el péndulo se estira y recibe un desplazamiento angular, su movimiento es más complejo. Use el algoritmo de Runge-Kutta para sistemas con $h = 0.1$ para aproximar la solución, bosqueje las gráficas de la longitud l y el desplazamiento angular θ en el intervalo $[0, 10]$ si $l(0) = 5.5$, $l'(0) = 0$, $\theta(0) = 0.5$, y $\theta'(0) = 0$.

5.4 INTRODUCCIÓN AL PLANO FASE

En esta sección estudiamos sistemas de dos ecuaciones de primer orden de la forma

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Observe que la variable independiente t no aparece en los términos del lado derecho $f(x, y)$ y $g(x, y)$; tales sistemas se llaman **autónomos**. Por ejemplo, el sistema que modeló el problema de los tanques interconectados de la sección 5.1,

$$x' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{12}y \ ,$$

$$y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \ ,$$

es autónomo. También lo es el sistema de Volterra-Lotka,

$$x' = Ax - Bxy \ ,$$

$$y' = -Cy + Dxy \ ,$$

(con A, B, C, D constantes) que analizamos en el ejemplo 4 de la sección 5.3 como un modelo para la dinámica de poblaciones.

Para referencia posterior, observemos que las soluciones de los sistemas autónomos son "inmunes a los corrimientos en el tiempo", en sentido de que si la pareja $x(t)$, $y(t)$ resuelve (1), también lo hace la pareja **recorrida en el tiempo** $x(t + c)$, $y(t + c)$ para cualquier

constante c. Específicamente, si $X(t) := x(t + c)$ y $Y(t) := y(t + c)$, la regla de la cadena implica que

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t + c) = f\big(x(t + c), y(t + c)\big) = f\big(X(t), Y(t)\big) \ ,$$

$$\frac{dY}{dt}(t) = \frac{dy}{dt}(t + c) = g\big(x(t + c), y(t + c)\big) = g\big(X(t), Y(t)\big) \ ,$$

lo cual demuestra que $X(t)$, $Y(t)$ también es una solución de (1).

Como t no aparece en forma explícita en el sistema (1), ciertamente es tentador dividir las dos ecuaciones, invocar a la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \ ,$$

y considerar la ecuación diferencial de primer orden

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{g(x, y)}}{\boldsymbol{f(x, y)}} \ .$$

Nos referiremos a (2) como la **ecuación en el plano fase**. En los capítulos 1 y 2 presentamos varios enfoques de las ecuaciones de tipo (2): usamos *campos de direcciones* para visualizar las gráficas solución y las técnicas analíticas para los casos de separabilidad, linealidad, exactitud, etcétera.

Así, la forma (2) tiene claras ventajas sobre (1), pero es importante mantener la perspectiva con las siguientes distinciones:

(i) Una solución del problema original (1) es una *pareja* de funciones de t, a saber, $x(t)$ y $y(t)$, que satisfacen (1) para toda t en algún intervalo I. Estas funciones se pueden visualizar como una pareja de gráficas, como en la figura 5.7. Si en el plano xy localizamos el punto $\big(x(t), y(t)\big)$ al variar t en I, la curva resultante es la **trayectoria** de la pareja solución $x(t)$, $y(t)$, y el plano xy es el **plano fase** en este contexto (véase la figura 5.8 en la página 264). Observe, sin embargo, que la trayectoria en este plano contiene menos información que las gráficas originales, pues hemos eliminado la dependencia de t. En principio, podemos reconstruir punto por punto la trayectoria a partir de las gráficas solución, pero no podemos reconstruir las gráficas solución sólo a partir de la trayectoria en el plano fase (pues no sabríamos qué valor de t asignar a cada punto).

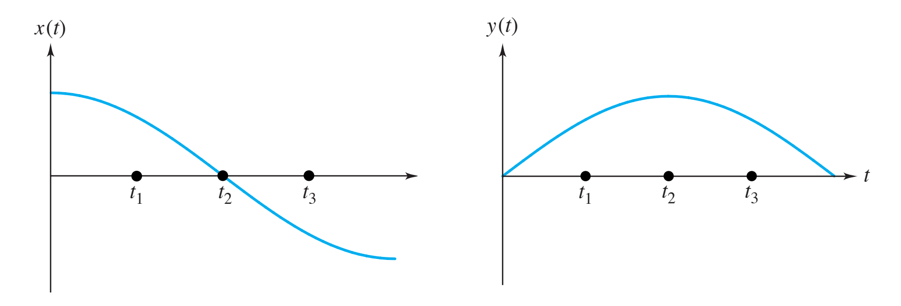


Figura 5.7 Pareja solución para el sistema (1)

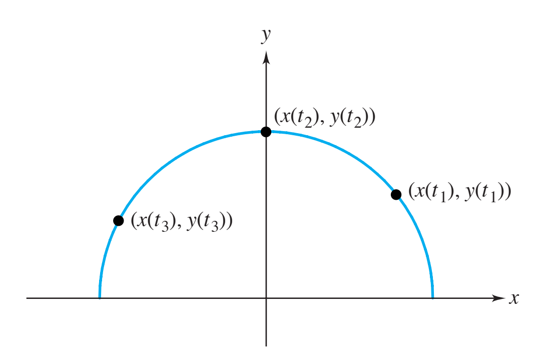


Figura 5.8 Trayectoria en el plano fase para la pareja solución del sistema (1)

(ii) No obstante, la pendiente dy/dx de una trayectoria en el plano fase está dada por el lado derecho de (2). Así, al resolver la ecuación (2) estamos localizando las *trayectorias* del sistema (1) en el plano fase. Más precisamente, hemos mostrado que las trayectorias satisfacen la ecuación (2); por lo tanto, las curvas solución de (2), que en este contexto se conocen como **curvas integrales**, contienen a las trayectorias.

(iii) En los capítulos 1 y 2 consideramos a x como la variable independiente y a y como la variable dependiente; en ecuaciones de la forma (2). Esto ya no es cierto en el contexto del sistema (1); x y y son variables dependientes del mismo nivel y t es la variable independiente.

Así, parece que un retrato en el plano fase podría ser una herramienta útil, aunque incompleta, para analizar los sistemas autónomos de primer orden como (1).

Excepto por el caso particular de los sistemas lineales con coeficientes constantes, analizado en la sección 5.2, en general es imposible determinar todas las soluciones del sistema (1), aunque es relativamente fácil hallar *soluciones constantes*; si $f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$, entonces las funciones constantes $x(t) \equiv x_0, y(t) \equiv y_0$ resuelven (1). Usamos la siguiente terminología para tales soluciones:

PUNTOS CRÍTICOS Y SOLUCIONES DE EQUILIBRIO

Definición 1. Un punto (x_0, y_0) donde $f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$ es un **punto crítico** o **punto de equilibrio** del sistema $dx/dt = f(x, y), dy/dt = g(x, y)$ y la solución constante correspondiente $x(t) \equiv x_0, y(t) \equiv y_0$ es una **solución de equilibrio**. El conjunto de todos los puntos críticos es el **conjunto de puntos críticos**.

Observe que las trayectorias de las soluciones de equilibrio constan precisamente de puntos únicos (los puntos de equilibrio). ¿Pero qué podemos decir de las demás trayectorias? ¿Podemos predecir algunas de sus características analizado con detalle a los puntos de equilibrio? Para explorar estas cuestiones nos concentraremos en la ecuación en el plano fase (2) y aprovecharemos su campo de direcciones (recuerde la sección 1.3, página 16). Sin embargo, aumentaremos la información del campo de direcciones añadiendo puntas de flecha a los segmentos de recta, indicado la dirección del “flujo” de soluciones al crecer t. Esto es fácil: cuando dx/dt es positiva, $x(t)$ aumenta, de modo que la trayectoria fluye hacia la

derecha. Por lo tanto, de acuerdo con (1), todos los segmentos del campo de direcciones trazados en una región donde $f(x, y)$ es positiva deben apuntar hacia la derecha (y, por supuesto, apuntar hacia la izquierda cuando $f(x, y)$ es negativa). Si $f(x, y)$ se anula, podemos usar $g(x, y)$ para decidir si el flujo es hacia arriba [$y(t)$ crece] o hacia abajo [$y(t)$ disminuye]. [*¿Qué ocurre si tanto* $f(x, y)$ *como* $g(x, y)$ *se anulan*?].

En los siguientes ejemplos abogamos por el uso de computadoras o calculadoras para generar estos campos de direcciones.

EJEMPLO 1 Bosquejar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema

(3)
$$\frac{dx}{dt} = -x \ ,$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

e identificar su punto crítico.

SOLUCIÓN En este caso, $f(x, y) = -x$ y $g(x, y) = -2y$ se anulan a la vez cuando $x = y = 0$, de modo que $(0, 0)$ es el punto crítico. El campo de direcciones para la ecuación en el plano fase es:

(4)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{-x} = \frac{2y}{x}$$

aparece en la figura 5.9. Como $dx/dt = -x$ en (3), las trayectorias del semiplano derecho (donde $x > 0$) fluyen hacia la izquierda y viceversa. De la figura podemos ver que todas las soluciones "fluyen hacia" el punto crítico $(0, 0)$. Tal punto crítico es **asintóticamente estable**. ■

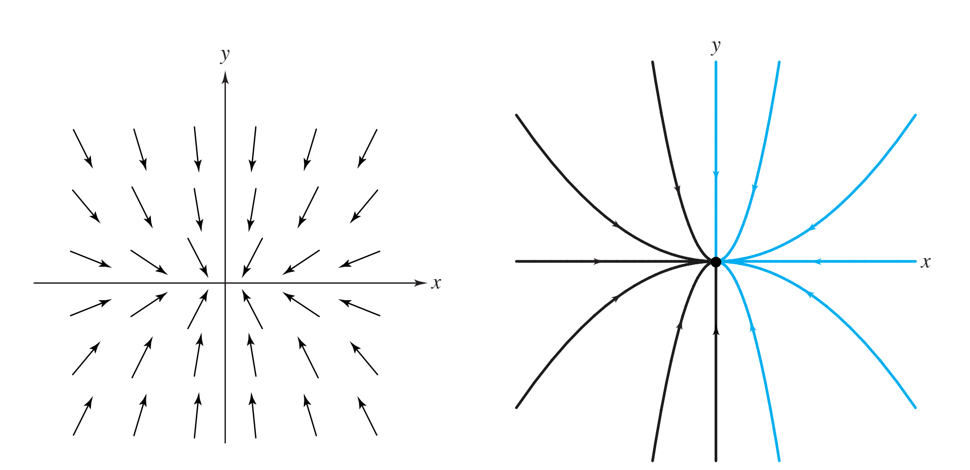


Figura 5.9 Campo de direcciones para el ejemplo 1

Figura 5.10 Trayectorias para el ejemplo 1

Observación. En este sencillo ejemplo podemos resolver el sistema (3) de manera explícita; de hecho, (3) es una pareja no acoplada de ecuaciones lineales cuyas soluciones son $x(t) = c_1e^{-t}$ y $y(t) = c_2e^{-2t}$. Al eliminar t obtenemos la ecuación $y = c_2e^{-2t} = c_2[x(t)/c_1]^2 = cx^2$. Así, las trayectorias se encuentran a lo largo de las parábolas $y = cx^2$.

[En forma alternativa, podríamos haber separado las variables en (4) e identificar tales parábolas como las curvas integrales]. Observe que cada una de estas parábolas está formada por tres trayectorias: una trayectoria que tiende hacia el origen en el semiplano derecho; la trayectoria que es reflejo de la anterior y tiende hacia el origen en el semiplano izquierdo, y el propio origen, un punto de equilibrio. Algunas trayectorias de muestra aparecen en la figura 5.10 de la página 265.

EJEMPLO 2 Bosquejar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema

(5) $$\frac{dx}{dt} = x\ , \qquad \frac{dy}{dt} = 2y$$

y describir el comportamiento de las soluciones cerca del punto crítico $(0, 0)$.

SOLUCIÓN Este ejemplo es casi idéntico al anterior; de hecho, se podría decir que simplemente hemos "invertido el tiempo" en (3). Los segmentos del campo de direcciones para

(6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

son iguales a los de (4), pero las flechas de dirección se invierten. Ahora, todas las soluciones *se alejan* del punto crítico $(0, 0)$; el equilibrio es **inestable**. ■

EJEMPLO 3 Para el sistema (7) dado a continuación, determinar los puntos críticos, bosquejar el campo de direcciones en el plano fase y predecir la naturaleza asintótica (es decir, comportamiento cuando $t \to +\infty$) de la solución que parte de $x = 2$, $y = 0$ cuando $t = 0$.

(7) $$\frac{dx}{dt} = 5x - 3y - 2\ , \qquad \frac{dy}{dt} = 4x - 3y - 1\ .$$

SOLUCIÓN El único punto crítico es la solución de las ecuaciones simultáneas $f(x, y) = g(x, y) = 0$:

(8) $$5x_0 - 3y_0 - 2 = 0\ , \qquad 4x_0 - 3y_0 - 1 = 0\ ,$$

de donde $x_0 = y_0 = 1$. El campo de direcciones para la ecuación del plano fase

(9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y - 1}{5x - 3y - 2}$$

aparece en la figura 5.11, donde hemos bosquejado algunas trayectorias a mano.† Observe que las soluciones fluyen hacia la derecha para $5x - 3y - 2 > 0$, es decir, para todos los puntos *debajo* de la recta $5x - 3y - 2 = 0$.

La curva integral que pasa por $(2, 0)$ en la figura 5.11 parece extenderse hasta infinito. ¿Implica esto que la solución correspondiente del *sistema* $x(t)$, $y(t)$ también tiende a infi-

†Las curvas integrales se pueden obtener en forma analítica resolviendo la ecuación (9) mediante los métodos de la sección 2.6.

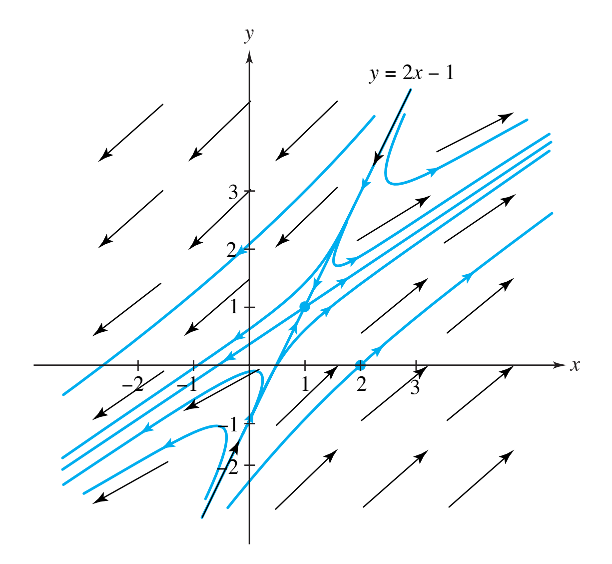


Figura 5.11 Campo de direcciones y trayectorias para el ejemplo 3

nito en el sentido de que $|x(t)| + |y(t)| \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$, o sería posible que esta trayectoria se "estanque" en algún punto a lo largo de la curva integral, o hasta "retroceda"? *No puede retroceder*, pues las flechas de dirección a lo largo de la curva integral apuntan sin ambigüedad hacia la derecha. Y si $\big(x(t), y(t)\big)$ se detuviera en algún punto (x_1, y_1), entonces intuitivamente concluiríamos que (x_1, y_1) sería un punto de equilibrio (pues las "velocidades" dx/dt y dy/dt tenderían a cero en ese punto). Pero ya hemos hallado el único punto crítico. Así, podemos concluir con un alto grado de confianza[†] que el sistema realmente tiende a infinito.

El punto crítico $(1, 1)$ es **inestable**, pues aunque muchas soluciones se acercan tanto como queramos a $(1, 1)$, la mayor parte se alejan de él. Las soluciones que están sobre la recta $y = 2x - 1$, realmente convergen a $(1, 1)$. Tal equilibrio es un ejemplo de **punto silla**. ■

En el ejemplo anterior argumentamos informalmente que si una trayectoria se "estanca" (es decir, si tiene un extremo), entonces este extremo debe ser un punto crítico. Esto se enuncia con cuidado en el siguiente teorema, cuya demostración se bosqueja en el problema 30.

En la figura 5.12 se muestran algunas configuraciones típicas de trayectorias en torno

LOS PUNTOS LÍMITE SON PUNTOS CRÍTICOS

Teorema 1. Sea $x(t)$, $y(t)$ una pareja solución en $[0, +\infty)$ del sistema autónomo $dx/dt = f(x, y)$, $dy/dt = g(x, y)$, donde f y g son continuas en el plano. Si los límites

$$x^* := \lim_{t \to +\infty} x(t) \qquad \text{y} \qquad y^* := \lim_{t \to +\infty} y(t)$$

existen y son finitos, entonces el punto límite (x^*, y^*) es un punto crítico del sistema.

[†]Estos argumentos informales se establecen con rigor en el capítulo 12. Todas las referencias a los capítulos 11-13 se refieren al texto ampliado *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, cuarta edición.

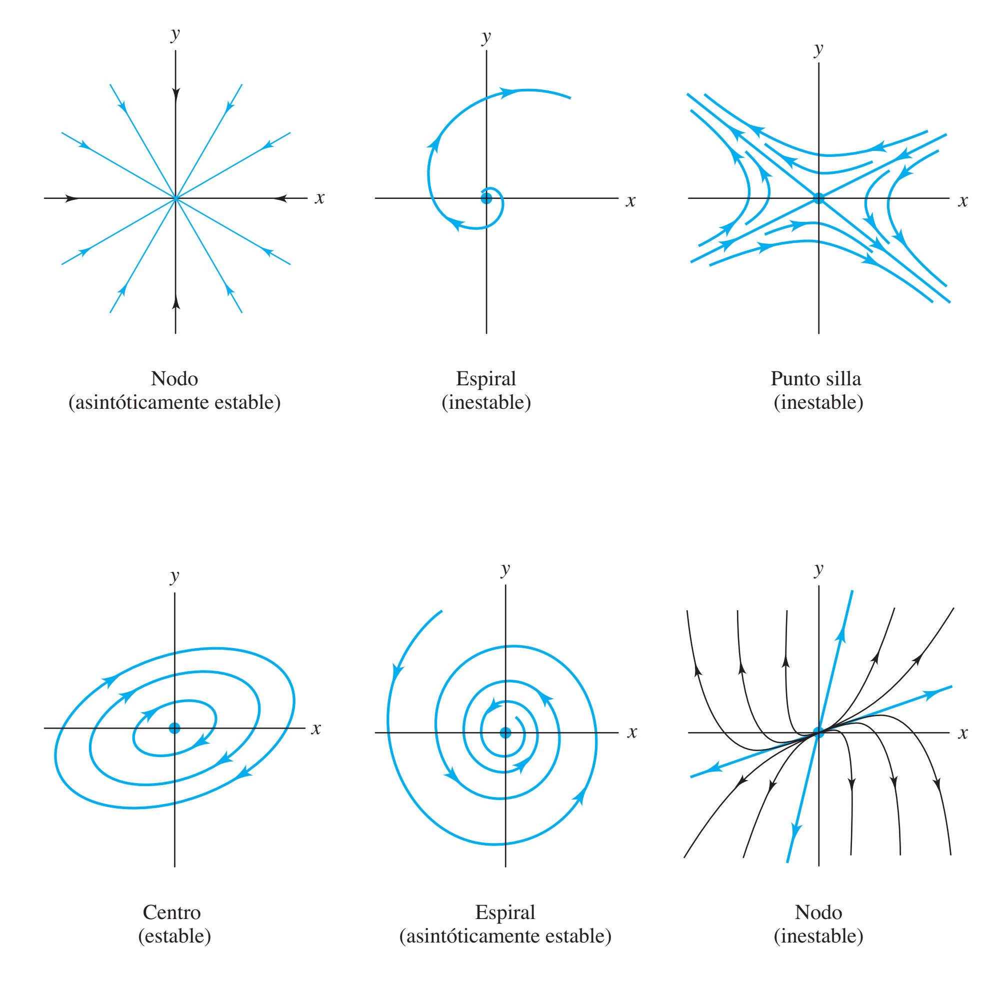


Figura 5.12 Ejemplos de diferentes comportamientos de las trayectorias cerca de un punto crítico en el origen

de puntos críticos. Estos retratos en el plano fase surgen de los sistemas enumerados en el problema 29, y pueden ser generados por paquetes de software con opciones para bosquejo de trayectorias. Podemos observar que los puntos críticos inestables se distinguen por las trayectorias que "se alejan" desde puntos arbitrariamente cercanos, mientras que los equilibrios estables "atrapan" todas las trayectorias cercanas. Los puntos críticos asintóticamente estables *atraen* a sus trayectorias cercanas cuando $t \to +\infty$.

Desde el punto de vista histórico, el plano fase fue introducido para facilitar el análisis de los sistemas mecánicos descritos por la segunda ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración. Un sistema mecánico autónomo surge cuando esta fuerza es independiente del tiempo y puede modelarse mediante una ecuación de segundo orden de la forma

(10) $$y'' = f(y, y') \ .$$

Como hemos visto en la sección 5.3, esta ecuación se puede convertir en un sistema normal de primer orden introduciendo la velocidad $v = dy/dt$ y escribiendo

$$\textbf{(11)} \qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \ , \\ \frac{dv}{dt} &= f(y, v) \ . \end{aligned}$$

Así, podemos analizar el comportamiento de un sistema mecánico autónomo estudiando el diagrama de plano fase en el plano yv. Observe que al ser v el eje vertical, las trayectorias $\big(y(t), v(t)\big)$ fluyen hacia la derecha en el semiplano superior (donde $v > 0$) y hacia la izquierda en el semiplano inferior.

EJEMPLO 4 Bosquejar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema de primer orden correspondiente al oscilador masa-resorte no forzado, no amortiguado descrito en la sección 4.1 (figura 4.1 de la página 152). Bosquejar varias trayectorias e interpretarlas físicamente.

SOLUCIÓN La ecuación deducida en la sección 4.1 para este oscilador es $my'' + ky = 0$ o, en forma equivalente, $y'' = -ky/m$. Por lo tanto, el sistema (11) asume la forma

$$\textbf{(12)} \qquad \begin{aligned} y' &= v \ , \\ v' &= -\frac{ky}{m} \ . \end{aligned}$$

El punto crítico está en el origen $y = v = 0$. El campo de direcciones en la figura 5.13 indica que las trayectorias parecen ser curvas cerradas (¿elipses?) o espirales que encierran al punto crítico.

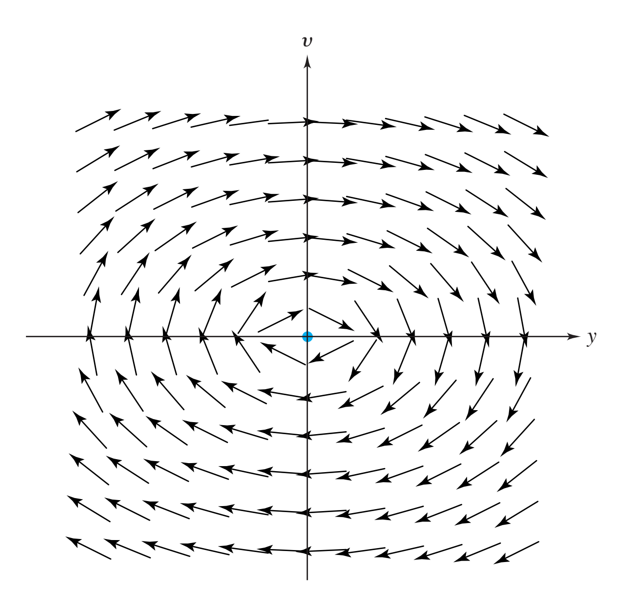


Figura 5.13 Campo de direcciones para el ejemplo 4

En la sección 4.8 vimos que los movimientos del oscilador no amortiguado son periódicos; pasan cíclicamente por los mismos conjuntos de puntos, con las mismas velocidades.

Sus trayectorias en el plano fase, entonces, deben ser curvas cerradas.† Confirmemos esto matemáticamente resolviendo la ecuación del plano fase

$$\textbf{(13)} \qquad \frac{dv}{dy} = -\frac{ky}{mv} \ .$$

La ecuación (13) es separable y vemos que

$$v\,dv = -\frac{ky}{m}dy \qquad \text{o} \qquad d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{k}{m}d\left(\frac{y^2}{2}\right) ,$$

de modo que sus soluciones son las elipses $v^2/2 + ky^2/2m = C$, como se muestra en la figura 5.14. Las soluciones de (12) están restringidas a estas elipses y por tanto no tienden ni se alejan de la solución de equilibrio. El punto crítico es entonces un **centro** como en la figura 5.12 de la página 268.

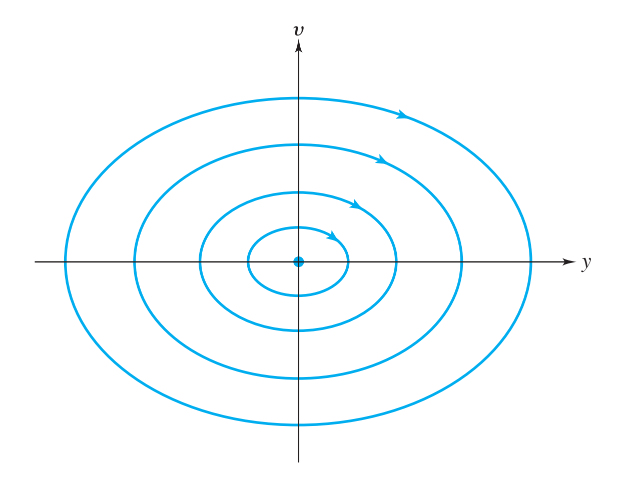


Figura 5.14 Trayectorias para el ejemplo 4

Además, las soluciones del sistema deben circular en forma continua en torno de las elipses, pues no hay puntos críticos que las detengan. Esto confirma que todas las soluciones son periódicas. ■

Observación. Más en general, si una solución de un sistema autónomo como (1) pasa por un punto en el plano fase *dos veces* y si se comporta lo bastante bien como para satisfacer un *teorema de unicidad*, entonces el segundo “recorrido” satisface las mismas condiciones iniciales que el primer recorrido, y por lo tanto, debe reproducirlo. En otras palabras, *las trayectorias cerradas que no contienen puntos críticos corresponden a soluciones periódicas.*

Mediante estos ejemplos hemos visto que el estudio del plano fase permite anticipar algunas de las características (ser acotada, periódica, etcétera) de las soluciones de los sistemas autónomos sin resolverlos de manera explícita. Gran parte de esta información se puede

†Con el mismo razonamiento, las oscilaciones *subamortiguadas* corresponderían a trayectorias espirales que tienden asintóticamente al origen cuando $t \to +\infty$.

predecir simplemente a partir de los puntos críticos y el campo de direcciones (orientado por puntas de flechas), que se pueden obtener mediante paquetes estándar de software.[†] El ejemplo final reúne varias de estas ideas.

EJEMPLO 5 Determinar los puntos críticos y resolver la ecuación del plano fase (2) para

(14)
$$\frac{dx}{dt} = -y(y-2) ,$$
$$\frac{dy}{dt} = (x-2)(y-2) .$$

¿Cuál es el comportamiento asintótico de las soluciones que parten de $(3, 0)$, $(5, 0)$ y $(2, 3)$?

SOLUCIÓN Para hallar los puntos críticos, resolvemos el sistema

$$-y(y-2) = 0, \qquad (x-2)(y-2) = 0 .$$

Una familia de soluciones de este sistema está dada por $y = 2$, con x arbitrario; es decir, la recta $y = 2$. Si $y \neq 2$, entonces el sistema se simplifica a $-y = 0$, y $x - 2 = 0$, que tiene la solución $x = 2$ y $y = 0$. Por lo tanto, el conjunto de puntos críticos consta del punto aislado $(2, 0)$ y la recta horizontal $y = 2$. Las soluciones de equilibrio correspondientes son $x(t) \equiv 2$, $y(t) \equiv 0$, y la familia $x(t) \equiv c$, $y(t) \equiv 2$, donde c es una constante arbitraria.

Las trayectorias del plano fase satisfacen la ecuación

(15)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)(y-2)}{-y(y-2)} = -\frac{x-2}{y} .$$

Al resolver (15) separando las variables,

$$y\,dy = -(x-2)dx \qquad \text{or} \qquad y^2 + (x-2)^2 = C ,$$

se muestra que las trayectorias están en círculos concéntricos con centro en $(2, 0)$. Véase la figura 5.15.

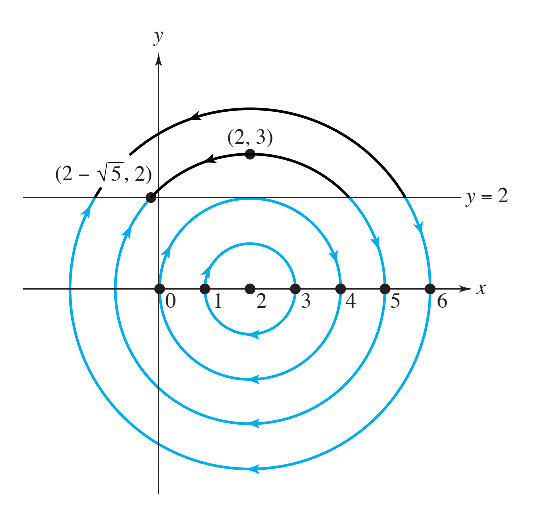


Figura 5.15 Diagrama del plano fase para el ejemplo 5

[†]Algunos paquetes tienen características avanzadas que facilitan el análisis del plano fase, como el bosquejo y acercamiento a las trayectorias.

A continuación analizamos el flujo a lo largo de cada trayectoria. De la ecuación $dx/dt = -y(y-2)$, vemos que x es decreciente cuando $y > 2$. Esto significa que el flujo va de derecha a izquierda a lo largo del arco de círculo que está arriba de la recta $y = 2$. Para $0 < y < 2$, tenemos que $dx/dt > 0$, de modo que en esta región el flujo va de izquierda a derecha. Además, para $y < 0$, tenemos que $dx/dt < 0$ y de nuevo el flujo va de derecha a izquierda.

Observamos en la figura 5.15 que hay cuatro tipos de trayectorias asociadas al sistema (14): (a) las que comienzan arriba de la recta $y = 2$ y siguen el arco de un círculo en sentido contrario al de las manecillas del reloj de regreso hasta esa recta; (b) las que comienzan debajo de la recta $y = 2$ y siguen el arco de un círculo en el sentido de las manecillas del reloj hasta regresar a esa recta; (c) las que se mueven de manera continua en el sentido de las manecillas del reloj en torno de un círculo con centro en $(2, 0)$ con radio menor que 2 (es decir, no cortan a la recta $y = 2$), y por último, (d) los puntos críticos $(2, 0)$ y $y = 2$ con x arbitrario.

La solución que comienza en $(3, 0)$ está en un círculo que no tiene puntos críticos; por lo tanto, es una solución *periódica* y el punto crítico $(2, 0)$ es un centro. Pero el círculo que contiene las soluciones que comienzan en $(5, 0)$ y en $(2, 3)$ tiene puntos críticos en $(2 - \sqrt{5}, 2)$ y $(2 + \sqrt{5}, 2)$. Las flechas indican que ambas soluciones tienden a $(2 - \sqrt{5}, 2)$ en forma asintótica (cuando $t \to +\infty$). Están en el mismo círculo (curva integral), pero son trayectorias bastante diferentes. ■

Observe que para el sistema (14), los puntos críticos de la recta $y = 2$ no están aislados, de modo que no encajan en las categorías de la figura 5.12. Observe también que todas las soluciones de este sistema están acotadas, pues están restringidas a círculos.

EJERCICIOS 5.4

En los problemas 1 y 2, verifique que la pareja $x(t)$, $y(t)$ es una solución del sistema dado. Bosqueje la trayectoria de la solución dada en el plano fase.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 3y^3 , \quad \dfrac{dy}{dt} = y ;$

$x(t) = e^{3t} , \quad y(t) = e^t$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 1 , \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x^2 ;$

$x(t) = t + 1, \quad y(t) = t^3 + 3t^2 + 3t$

En los problemas 3 a 6, determine el conjunto de puntos críticos para el sistema dado.

3. $\dfrac{dx}{dt} = x - y ,$

$\dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 1$

4. $\dfrac{dx}{dt} = y - 1 ,$

$\dfrac{dy}{dt} = x + y + 5$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2xy ,$

$\dfrac{dy}{dt} = 3xy - y^2$

6. $\dfrac{dx}{dt} = y^2 - 3y + 2 ,$

$\dfrac{dy}{dt} = (x - 1)(y - 2)$

En los problemas 7 a 9, determine las curvas integrales para el sistema dado, resolviendo la ecuación en el plano fase dada en (2), página 263.

7. $\dfrac{dx}{dt} = y - 1 ,$

$\dfrac{dy}{dt} = e^{x+y}$

8. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2y^{-3} ,$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x^2 - 2xy$

9. $\dfrac{dx}{dt} = 2y - x ,$

$\dfrac{dy}{dt} = e^x + y$

10. Determine todos los puntos críticos del sistema

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 1 ,$$

$$\frac{dy}{dt} = xy ,$$

y resuelva la ecuación en el plano fase xy para determinar las curvas integrales. Pruebe que hay dos trayectorias que sean semicírculos genuinos. ¿Cuáles son los extremos de los semicírculos?

En los problemas 11 a 14, resuelva la ecuación en el plano fase para el sistema dado. Luego bosqueje a mano algunas trayectorias (con sus flechas para el flujo),

11. $\dfrac{dx}{dt} = 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x$

12. $\dfrac{dx}{dt} = -8y$, $\dfrac{dy}{dt} = 18x$

13. $\dfrac{dx}{dt} = (y - x)(y - 1)$, $\dfrac{dy}{dt} = (x - y)(x - 1)$

14. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{y}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{x}$

En los problemas 15 a 18, determine todos los puntos críticos para el sistema dado. Luego use un paquete de software para bosquejar el campo de direcciones en el plano fase, y a partir de esto describa la estabilidad de los puntos críticos (es decir, compare con la figura 5.12).

15. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 3$, $\dfrac{dy}{dt} = -3x - 2y - 4$

16. $\dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = x - 4y$

17. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 13y$, $\dfrac{dy}{dt} = -x - 2y$

18. $\dfrac{dx}{dt} = x(7 - x - 2y)$, $\dfrac{dy}{dt} = y(5 - x - y)$

En los problemas 19 a 24, convierta la ecuación de segundo orden dada en un sistema de primer orden haciendo $v = y'$. Determine a continuación los puntos críticos en el plano yv. Por último, bosqueje (a mano o mediante algún software) los campos de direcciones, y describa la estabilidad de los puntos críticos (es decir, compare con la figura 5.12).

19. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = 0$

20. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$

21. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y + y^5 = 0$

22. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y^3 = 0$

23. $y''(t) + y(t) - y(t)^4 = 0$

24. $y''(t) + y(t) - y(t)^3 = 0$

25. Use un paquete de software para bosquejar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema

$$dx/dt = y \ ,$$
$$dy/dt = -x + x^3 \ .$$

A partir de este bosquejo, conjeture si la solución que pasa por cada punto dado es periódica:
(a) $(0.25, 0.25)$, **(b)** $(2, 2)$, **(c)** $(1, 0)$.

26. Use un paquete de software para bosquejar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema

$$dx/dt = y \ ,$$
$$dy/dt = -x - x^3 \ .$$

A partir de este bosquejo, conjeture si todas las soluciones de este sistema están acotadas. Resuelva la ecuación en el plano fase y confirme su conjetura.

27. Use un paquete de software para bosquejar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema

$$dx/dt = -2x + y \ ,$$
$$dy/dt = -5x - 4y \ .$$

A partir de este bosquejo, prediga el límite asintótico (cuando $t \to \infty$) de la solución que parte de (1, 1).

28. La figura 5.16 exhibe algunas trayectorias del sistema

$$dx/dt = y \ ,$$
$$dy/dt = -x + x^2 \ .$$

¿Qué tipo de puntos críticos (véase la figura 5.12) aparecen en $(0, 0)$ y $(1, 0)$?

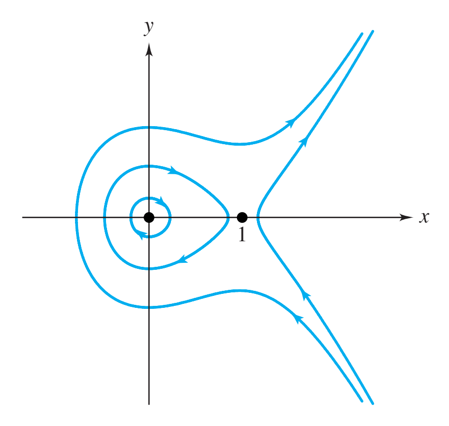


Figura 5.16 Plano fase para el problema 28

29. Los diagramas de plano fase que aparecen en la figura 5.12 se dedujeron de los siguientes sistemas. Use cualquier método (excepto software) para relacionar los sistemas con sus gráficas.

(a) $dx/dt = x$, $dy/dt = 3y$

(b) $dx/dt = y/2$, $dy/dt = -2x$

(c) $dx/dt = -5x + 2y$, $dy/dt = x - 4y$ **(d)** $dx/dt = 2x - y$, $dy/dt = x + 2y$

(e) $dx/dt = 5x - 3y$, $dy/dt = 4x - 3y$ **(f)** $dx/dt = -y$, $dy/dt = x - y$

30. A continuación bosquejamos una demostración del teorema 1 de la página 267. El objetivo es mostrar que $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$. Justifique cada paso.

(a) A partir de las hipótesis, deduzca que $\lim_{t\to+\infty} x'(t) = f(x^*, y^*)$ y $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = g(x^*, y^*)$.

(b) Suponga que $f(x^*, y^*) > 0$. Entonces, por continuidad, $x'(t) > f(x^*, y^*)/2$ para t grande (digamos, para $t \geq T$). Deduzca de esto que $x(t) > tf(x^*, y^*)/2 + C$ para $t > T$, donde C es una constante.

(c) Concluya de la parte (b) que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$, lo que contradice el hecho de que este límite es el número finito x^*. Así, $f(x^*, y^*)$ no puede ser positivo.

(d) Justifique de manera análoga que al suponer que $f(x^*, y^*) < 0$ obtenemos una contradicción; por lo tanto, $f(x^*, y^*)$ debe anularse.

(e) De la misma manera, justifique que $g(x^*, y^*)$ debe anularse.

Por lo tanto, $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ y (x^*, y^*) es un punto crítico.

31. El análisis en el plano fase proporciona una rápida deducción del lema de la integral de la energía de la sección 4.7 (página 196). Realice los siguientes pasos para demostrar que las soluciones de ecuaciones de la forma particular $y'' = f(y)$ satisfacen

$$\frac{1}{2}(y')^2 - F(y) = \text{constante} ,$$

donde $F(y)$ es una antiderivada de $f(y)$.

(a) Haga $v = y'$ y escriba $y'' = f(y)$ como un sistema equivalente de primer orden.

(b) Muestre que las soluciones de la ecuación en el plano fase yv para el sistema de la parte (a) satisfacen $v^2/2 = F(y) + K$. Reemplace v por y' para concluir la demostración.

32. Use el resultado del problema 31 para demostrar que todas las soluciones de la ecuación

$$y'' + y^3 = 0$$

permanecen acotadas. [*Sugerencia*: Justifique que $y^4/4$ está acotada por arriba por la constante que aparece en el problema 31].

33. Modelos epidemiológicos. Un modelo para la difusión de una enfermedad en una población (un modelo epidemiológico) está dado por el sistema

$$\frac{dS}{dt} = -aSI ,$$

$$\frac{dI}{dt} = aSI - bI ,$$

donde a y b son constantes positivas. En este caso, $S(t)$ representa la población susceptible e $I(t)$ la población infectada después de t días. La constante a es una medida de la rapidez de transmisión de la enfermedad de una persona infectada a la población susceptible. La constante b representa la razón con la que sana la población infectada, es decir, sale de la población infectada (y con ello se supone que queda inmune).

(a) Suponga que para cierta enfermedad se determina que $a = 0.003$ y $b = 0.5$. En el plano fase SI, bosqueje la trayectoria correspondiente a la condición inicial de que una persona esté infectada y 700 personas sean susceptibles.

(b) Utilice la gráfica de la parte (a) para estimar el número máximo posible de personas infectadas.

(c) Use las ecuaciones diferenciales que modelan la difusión de la enfermedad para justificar que el número máximo de personas infectadas ocurre cuando $S = b/a = 1000/6 \approx 167$ personas.

34. (a) Para el modelo del problema 33, muestre que el valor máximo para I ocurre siempre cuando $S = b/a = 1000/6$, si $S(0) > b/a$. (El número b/a es el **umbral**).

(b) El análisis del plano fase SI del problema 33 indica que ocurre una epidemia (el número de personas infectadas crece primero y luego decrece a cero) cuando $S(0) > b/a$. Verifique este hecho de manera directa a partir de la expresión para dI/dt.

(c) Al transcurrir el tiempo, ¿qué ocurre con el número de personas infectadas si $S(0) < b/a$?

35. Un problema de corriente. El movimiento de una barra de hierro atraída por el campo magnético producido por un cable de corriente paralelo a ésta y restringido por resortes (véase la figura 5.17) queda descrito mediante la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x + \frac{1}{\lambda - x} , \quad \text{para} \quad -x_0 < x < \lambda ,$$

donde las constantes x_0 y λ son, respectivamente, las distancias de la barra a la pared y al cable *cuando la barra está en equilibrio (reposo) con la corriente apagada*.

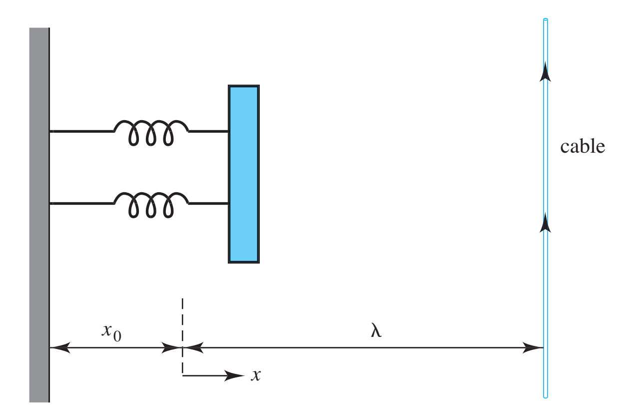


Figura 5.17 Barra restringida por resortes y atraída por una corriente paralela

(a) Haga $v = dx/dt$ y convierta la ecuación de segundo orden en un sistema equivalente de primer orden.

(b) Resuelva la ecuación en el plano fase para el sistema de la parte (a) y muestre así que sus curvas integrales están dadas por

$$v = \pm\sqrt{C - x^2 - 2\ln(\lambda - x)} \ ,$$

donde C es una constante.

(c) Muestre que si $\lambda < 2$, no hay puntos críticos en el plano fase xv, mientras que si $\lambda > 2$ hay dos puntos críticos. Para este último caso, determine esos puntos críticos.

(d) Físicamente, el caso 1$\lambda < 2$ corresponde a una corriente tan alta que la atracción magnética rebasa completamente al resorte. Para tener una mejor idea de esto, use un paquete de software para graficar los diagramas en el plano fase para el sistema cuando $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$.

(e) Use sus diagramas de plano fase de la parte (d) para describir los movimientos posibles de la barra cuando $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$, bajo varias condiciones iniciales.

36. Objeto que cae. El movimiento de un objeto que se mueve de manera vertical en el aire queda descrito mediante la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{g}{V^2}\frac{dy}{dt}\left|\frac{dy}{dt}\right| \ ,$$

donde y es el desplazamiento vertical hacia arriba y V es una constante llamada la velocidad terminal. Haga $g = 32$ pies/segundo^2 y $V = 50$ pies/segundo. Bosqueje trayectorias en el plano fase yv para $-100 \leq y \leq 100$, $-100 \leq v \leq 100$, partiendo de $y = 0$ y $v = -75, -50, -25, 0, 25, 50,$ y 75 pies/segundo. Interprete las trayectorias físicamente. ¿Por qué V se llama la velocidad terminal?

37. Fricción pegajosa. Una alternativa para el modelo de fricción con amortiguamiento $F = -by'$ analizado en la sección 4.1 es el modelo de "fricción pegajosa". Para una masa que se desliza sobre una superficie como se muestra en la figura 5.18, la fricción de contacto es más complicada que simplemente $-by'$. Observamos, por ejemplo, que aunque la masa se desplace ligeramente con respecto de la posición de equilibrio $y = 0$, puede permanecer estacionaria debido a que la fuerza del resorte $-ky$ es insuficiente para contrarrestar la fricción estática. Si la fuerza máxima que puede ejercer la fricción es μ, entonces un modelo plausible está dado por

$$F_{\text{fricción}} = \begin{cases} ky \ , & \text{si } |ky| < \mu \\ & \text{y } \ y' = 0 \ , \\ \mu \,\text{signo}(y) \ , & \text{si } \ |ky| \geq \mu \\ & \text{y } \ y' = 0 \ , \\ -\mu \,\text{signo}(y') \ , & \text{si } y' \neq 0 \ . \end{cases}$$

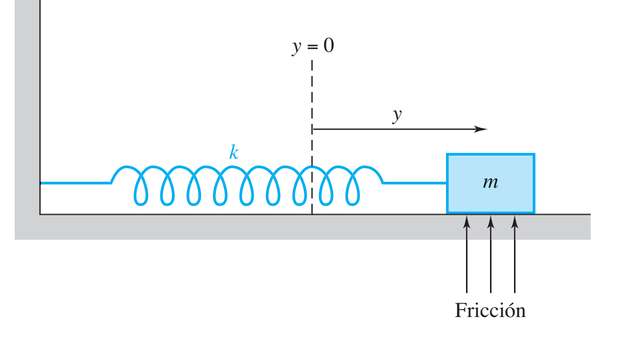


Figura 5.18 Sistema masa-resorte con fricción

(La función signo(s) es $+1$ cuando $s > 0$, -1 cuando $s < 0$, y 0 cuando $s = 0$). El movimiento queda descrito por la ecuación

(16) $$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky + F_{\text{fricción}} .$$

Así, si la masa está en reposo, la fricción *equilibra* la fuerza del resorte si $|y| < \mu/k$ pero simplemente se le *opone* con intensidad μ si $|y| \geq \mu/k$. Si la masa se mueve, la fricción se opone a la velocidad con la misma intensidad μ.

(a) Haga $m = \mu = k = 1$, y convierta (16) en el sistema de primer orden

$$y' = v ,$$

(17) $$v' = \begin{cases} 0 , & \text{si } |y| < 1 \\ & \text{y} \quad v = 0 , \\ -y + \text{signo}(y) , & \text{si } |y| \geq 1 \\ & \text{y} \quad v = 0 , \\ -y - \text{signo}(v) , & \text{si } v \neq 0 . \end{cases}$$

(b) Forme la ecuación en el plano fase para (17) cuando $v \neq 0$ y resuélvala para deducir las curvas integrales

$$v^2 + (y \pm 1)^2 = c ,$$

donde usamos el signo más para $v > 0$ y el signo menos para $v < 0$.

(c) Identifique las trayectorias en el plano fase como dos familias de semicírculos concéntricos. ¿Cuál es el centro de los semicírculos en el semiplano superior? ¿Y en el semiplano inferior?

(d) ¿Cuáles son los puntos críticos para (17)?

(e) Bosqueje la trayectoria en el plano fase para la masa liberada desde el reposo en $y = 7.5$. ¿En qué valor de y la masa queda en reposo?

38. Nutación de un cuerpo rígido. Las ecuaciones de Euler describen el movimiento de los componentes en el eje principal de la velocidad angular de un cuerpo rígido que gira libremente (como una estación espacial) visto por un observador que gira con el cuerpo (los astronautas, por ejemplo). Este movimiento se llama *nutación*. Si los componentes de la velocidad angular se denotan como x, y y z, entonces un ejemplo de las ecuaciones de Euler es el sistema autónomo tridimensional

$$dx/dt = yz ,$$
$$dy/dt = -2xz ,$$
$$dz/dt = xy .$$

La *trayectoria* de una solución $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de estas ecuaciones es la curva generada por los puntos $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ en el espacio fase xyz cuando t varía en un intervalo I.

(a) Muestre que cada trayectoria de este sistema está en la superficie de una esfera (posiblemente degenerada) con centro en el origen $(0, 0, 0)$. [*Sugerencia*: Calcule $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2)$]. ¿Qué puede decir acerca de la magnitud del vector de velocidad angular?

(b) Determine todos los puntos críticos del sistema, es decir, todos los puntos (x_0, y_0, z_0) tales que $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$, $z(t) \equiv z_0$ es una solución. Para tales soluciones, el vector de velocidad angular permanece constante en el sistema del cuerpo.

(c) Muestre que las trayectorias del sistema están a lo largo de la intersección de una esfera y un cilindro elíptico de la forma $y^2 + 2x^2 = C$, para cierta constante C. [*Sugerencia*: Considere la expresión para dy/dx implicada por las ecuaciones de Euler].

(d) Use los resultados de las partes (b) y (c) para justificar que las trayectorias de este sistema son curvas *cerradas*. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones correspondientes?

(e) La figura 5.19 muestra algunas trayectorias típicas de este sistema. Analice la estabilidad de los tres puntos críticos indicados en los ejes positivos.

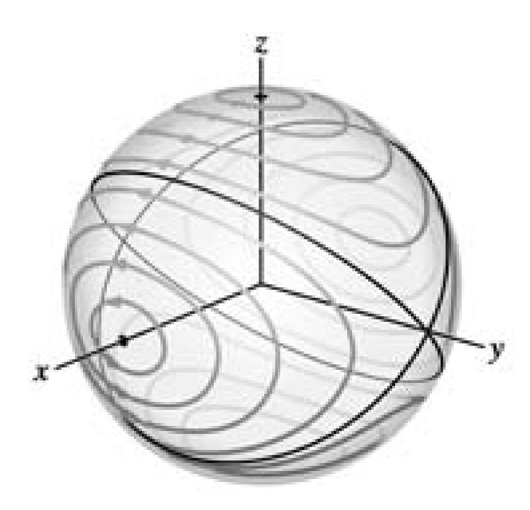


Figura 5.19 Trayectorias para el sistema de Euler

5.5 SISTEMAS ACOPLADOS MASA-RESORTE

En esta sección extenderemos nuestro modelo masa-resorte para incluir situaciones en las que los resortes acoplados unen dos masas que pueden moverse libremente. Los movimientos resultantes pueden ser muy intrincados. Para simplificar la exposición, despreciaremos los efectos de la fricción, la gravedad y las fuerzas externas. Consideremos el siguiente experimento.

EJEMPLO 1 En una superficie horizontal suave, una masa $m_1 = 2$ kg está unida a una pared fija mediante un resorte con constante de resorte $m_1 = 4$ N/m. Otra masa $m_2 = 1$ kg está unida al primer objeto mediante un resorte con constante de resorte $k_2 = 2$ N/m. Los objetos están alineados en forma horizontal, de modo que los resortes tengan su longitud natural (figura 5.20). Si ambos objetos se desplazan 3 m a la derecha de sus posiciones de equilibrio (figura 5.21) y luego se liberan, ¿cuáles son las ecuaciones de movimiento de los dos objetos?

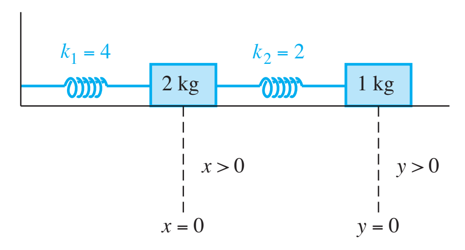


Figura 5.20 Sistema acoplado en equilibrio

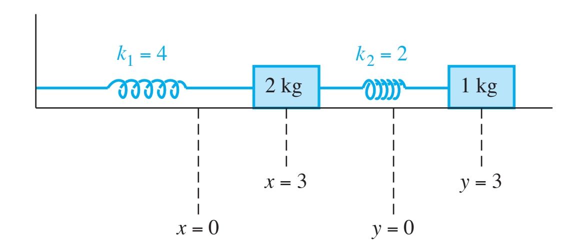


Figura 5.21 Sistema acoplado en su desplazamiento inicial

SOLUCIÓN Por nuestras hipótesis, las únicas fuerzas que debemos tomar en cuenta son las fuerzas inherentes a los propios resortes. Recordemos que la ley de Hooke afirma que la fuerza que actúa sobre un objeto debido a un resorte tiene una magnitud proporcional al desplazamiento del resorte a partir de su longitud natural y tiene dirección opuesta a su desplazamiento. Es decir, si el resorte se estira o comprime, entonces trata de regresar a su longitud natural.

Como cada masa se puede mover libremente, aplicamos la segunda ley de Newton a cada objeto. Sea $x(t)$ el desplazamiento (hacia la derecha) de la masa de 2 kg a partir de su posición de equilibrio, y de manera análoga, sea $y(t)$ el desplazamiento correspondiente para la masa de 1 kg. La masa de 2 kg tiene una fuerza F_1 que actúa por su lado izquierdo debido a un resorte y a una fuerza F_2 que actúa por su lado derecho debido al segundo resorte. En relación con la figura 5.21 y al aplicar la ley de Hooke, vemos que

$$F_1 = -k_1 x \ , \qquad F_2 = +k_2(y - x) \ ,$$

porque $(y - x)$ es el desplazamiento neto del segundo resorte con respecto de su longitud natural. Sólo hay una fuerza que actúa sobre la masa de 1 kg: la fuerza debida al segundo resorte, que es

$$F_3 = -k_2(y - x) \ .$$

Al aplicar la segunda ley de Newton a estos objetos, obtenemos el sistema

(1)
$$m_1\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 = -k_1x + k_2(y - x) \ ,$$
$$m_2\frac{d^2y}{dt^2} = F_3 = -k_2(y - x) \ ,$$

o

(2)
$$m_1\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x - k_2y = 0 \ ,$$
$$m_2\frac{d^2y}{dt^2} + k_2y - k_2x = 0 \ .$$

En este problema vemos que $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, y $k_2 = 2$. Al sustituir estos valores en el sistema (2) obtenemos

(3) $$2\frac{d^2x}{dt^2} + 6x - 2y = 0 \ ,$$

(4) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y - 2x = 0 \ .$$

Utilizaremos el método de eliminación de la sección 5.2 para resolver (3) – (4). Hacemos $D \coloneqq d/dt$ y escribimos el sistema como

(5) $$(2D^2 + 6)[x] - 2y = 0 \ ,$$

(6) $$-2x + (D^2 + 2)[y] = 0 \ .$$

Sumamos $(D^2 + 2)$ aplicado a la ecuación (5) al doble de la ecuación (6) para eliminar y:

$$[(D^2 + 2)(2D^2 + 6) - 4][x] = 0 \ ,$$

lo que se simplifica como

(7) $$2\frac{d^4x}{dt^4} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 8x = 0 \ .$$

Observe que la ecuación (7) es lineal con coeficientes constantes. Para resolverla, procedemos como en el caso de las ecuaciones lineales de segundo orden y tratamos de hallar soluciones de la forma $x = e^{rt}$. Al sustituir e^{rt} en la ecuación (7) tenemos

$$2(r^4 + 5r^2 + 4)e^{rt} = 0 \ .$$

Así, obtenemos una solución de (7) cuando r satisface la ecuación auxiliar

$$r^4 + 5r^2 + 4 = 0 \ .$$

Al factorizar $r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2 + 1)(r^2 + 4)$, vemos que las raíces de la ecuación auxiliar son los números complejos i, $-i$, $2i$, $-2i$. Al usar la fórmula de Euler, tenemos que

$$z_1(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad z_2(t) = e^{2it} = \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t$$

son soluciones de la ecuación (7) con valores complejos. Para obtener soluciones con valores reales, consideramos las partes real e imaginaria de $z_1(t)$ y $z_2(t)$. Así, tenemos cuatro soluciones con valores reales

$$x_1(t) = \cos t \ , \qquad x_2(t) = \operatorname{sen} t \ , \qquad x_3(t) = \cos 2t \ , \qquad x_4(t) = \operatorname{sen} 2t \ ,$$

y una solución general

(8) $$\boldsymbol{x(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + a_3 \cos 2t + a_4 \operatorname{sen} 2t \ ,}$$

donde a_1, a_2, a_3, y a_4 son constantes arbitrarias.[†]

Para obtener una fórmula para $y(t)$, usamos la ecuación (3) para expresar y en términos de x:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} + 3x \\ &= -a_1 \cos t - a_2 \operatorname{sen} t - 4a_3 \cos 2t - 4a_4 \operatorname{sen} 2t \\ &\quad + 3a_1 \cos t + 3a_2 \operatorname{sen} t + 3a_3 \cos 2t + 3a_4 \operatorname{sen} 2t \ , \end{aligned}$$

y entonces

(9) $$\boldsymbol{y(t) = 2a_1 \cos t + 2a_2 \operatorname{sen} t - a_3 \cos 2t - a_4 \operatorname{sen} 2t \ .}$$

Para determinar las constantes a_1, a_2, a_3, y a_4, regresemos al problema original. Sabemos que en un principio, los objetos se desplazaron 3 m hacia la derecha y que luego fueron liberados. Por lo tanto,

(10) $$x(0) = 3 \ , \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \ ; \qquad y(0) = 3 \ , \qquad \frac{dy}{dt}(0) = 0 \ .$$

Al derivar las ecuaciones (8) y (9), tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -a_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos t - 2a_3 \operatorname{sen} 2t + 2a_4 \cos 2t \ ,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2a_1 \operatorname{sen} t + 2a_2 \cos t + 2a_3 \operatorname{sen} 2t - 2a_4 \cos 2t \ .$$

Ahora, si hacemos $t = 0$ en las fórmulas para x, dx/dt, y, y dy/dt, las condiciones iniciales (10) implican las cuatro ecuaciones

$$x(0) = a_1 + a_3 = 3 \ , \qquad \frac{dx}{dt}(0) = a_2 + 2a_4 = 0 \ ,$$

$$y(0) = 2a_1 - a_3 = 3 \ , \qquad \frac{dy}{dt}(0) = 2a_2 - 2a_4 = 0 \ .$$

En este sistema hallamos que $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, y $a_4 = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para los dos objetos son

$$x(t) = 2 \cos t + \cos 2t \ ,$$
$$y(t) = 4 \cos t - \cos 2t \ ,$$

que se muestran en la figura 5.22 de la página 280. ■

[†]En el capítulo 6 se da un análisis más detallado de las soluciones generales.

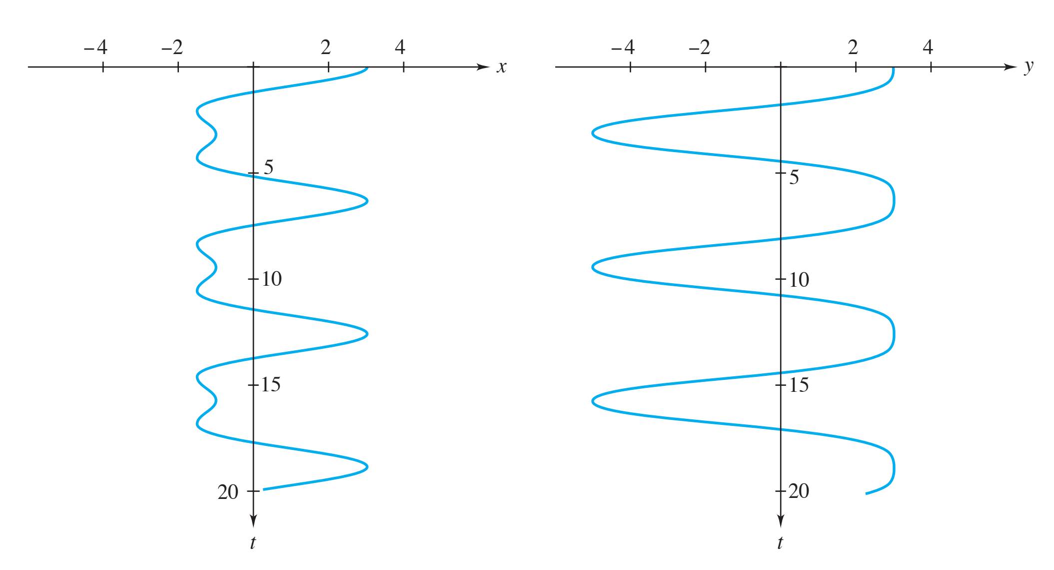


Figura 5.22 Gráficas de movimiento de las dos masas del sistema masa-resorte acoplado

La pareja solución general (8), (9) que se obtiene es una combinación de senoides que oscilan a dos frecuencias angulares distintas: 1 radián/segundo y 2 radianes/segundo. Estas frecuencias amplían la noción de *frecuencia natural* del oscilador masa-resorte simple (libre no amortiguado; sección 4.8, página 208) y se llaman las **frecuencias angulares naturales**[†] (o **normales**) del sistema. Un sistema complejo con más masas y resortes tendría muchas frecuencias normales.

Observe que si las condiciones iniciales se alteran de modo que las constantes a_3 y a_4 en (8) y (9) se anulen, el movimiento sería una senoide pura que oscila con la única frecuencia de un radián/segundo. De manera similar, si a_1 y a_2 se anulan, sólo la oscilación de 2 radianes/segundo se "excitaría". Tales soluciones, donde el movimiento completo queda descrito mediante una única senoide, son los **modos normales** del sistema.[††] Los modos normales del siguiente ejemplo se pueden visualizar fácilmente, pues podemos considerar que todas las masas y todas las constantes de resorte son iguales.

EJEMPLO 2 Tres resortes idénticos con constante de resorte k y dos masas idénticas m se unen en línea recta con los extremos de los resortes exteriores fijos (véase la figura 5.23). Determinar e interpretar los modos normales del sistema.

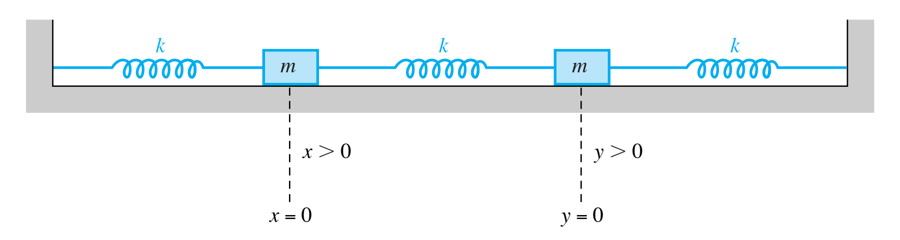


Figura 5.23 Sistema masa-resorte acoplado con extremos fijos

[†]El estudio de las frecuencias naturales de las oscilaciones de sistemas complejos se conoce en ingeniería como **análisis modal**.

[††]Los modos normales se caracterizan de manera más natural en términos de los *valores propios* (véase la sección 9.5).

SOLUCIÓN Definimos los desplazamientos a partir del equilibrio, x y y, como en el ejemplo 1. Las ecuaciones que expresan la segunda ley de Newton para las masas son bastante parecidas a (1), excepto por el efecto del tercer resorte sobre la segunda masa:

(11) $$mx'' = -kx + k(y - x) \; ,$$

(12) $$my'' = -k(y - x) - ky \; ,$$

o

$$(mD^2 + 2k)[x] - ky = 0 \; ,$$
$$-kx + (mD^2 + 2k)[y] = 0 \; .$$

Al eliminar y de la manera usual se tiene

(13) $$\left[(mD^2 + 2k)^2 - k^2\right][x] = 0 \; .$$

Esto tiene la ecuación auxiliar

$$(mr^2 + 2k)^2 - k^2 = (mr^2 + k)(mr^2 + 3k) = 0 \; ,$$

con raíces $\pm i\sqrt{k/m}$, $\pm i\sqrt{3k/m}$. Al hacer $\omega \coloneqq \sqrt{k/m}$, obtenemos la siguiente solución general de (13):

(14) $$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + C_3 \cos\left(\sqrt{3}\,\omega t\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,\omega t\right) \; .$$

Para obtener $y(t)$, despejamos $y(t)$ en (11) y sustituimos $x(t)$ dada en (14). Al simplificar obtenemos

(15) $$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t - C_3 \cos\left(\sqrt{3}\,\omega t\right) - C_4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,\omega t\right) \; .$$

Las fórmulas (14) y (15) muestran que las frecuencias angulares normales son ω y $\sqrt{3}\,\omega$. De hecho, si $C_3 = C_4 = 0$, tenemos una solución donde $y(t) \equiv x(t)$, que oscila

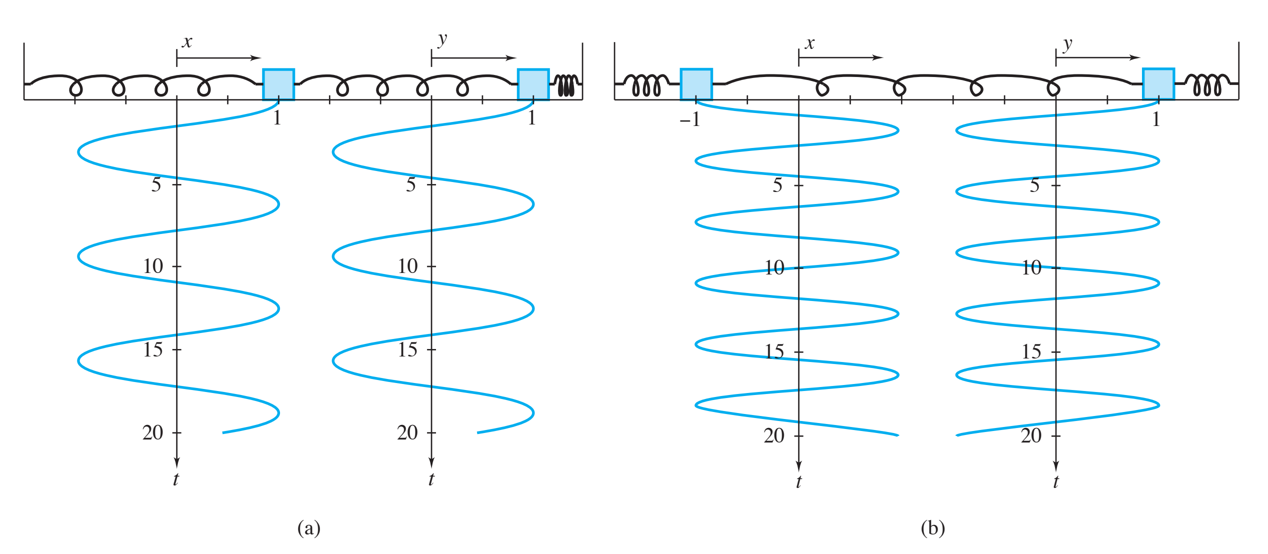


Figura 5.24 Modos normales para el ejemplo 2

con la frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ radianes/segundo (equivalente a una frecuencia de $\sqrt{k/m}/2\pi$ periodos/segundo). Ahora, si $x(t) \equiv y(t)$ en la figura 5.23, las dos masas se mueven como si fuesen un único cuerpo rígido de masa $2m$, forzado por un "resorte doble" con una constante de resorte dada por $2k$. De hecho, de acuerdo con la ecuación (4) de la sección 4.8 (página 208), sería de esperar que tal sistema oscilara con la frecuencia angular $\sqrt{2k/2m} = \sqrt{k/m}$ (!) Este movimiento se muestra en la figura 5.24(a) de la página 281.

De manera análoga, si $C_1 = C_2 = 0$, determinamos el segundo modo normal donde $y(t) = -x(t)$, de modo que en la figura 5.23 hay dos sistemas, uno reflejo del otro, cada uno con masa m y un "resorte y medio" con constante de resorte $k + 2k = 3k$. (El medio resorte sería el doble de rígido). La ecuación (4) de la sección 4.8 predice entonces una frecuencia de oscilación angular para cada sistema, $\sqrt{3k/m} = \sqrt{3}\,\omega$, que de nuevo es consistente con (14) y (15). Este movimiento se muestra en la figura 5.24(b). ■

EJERCICIOS 5.5

1. Dos resortes y dos masas están unidos en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura 5.25. El sistema se pone en movimiento manteniendo la masa m_2 en su posición de equilibrio y jalando la masa m_1 a la izquierda de su posición de equilibrio una distancia de 1 metro, para luego liberar ambas masas. Exprese la ley de Newton para el sistema y determine las ecuaciones de movimiento para las dos masas si $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = 4$ N/m y $k_2 = 10/3$ N/m.

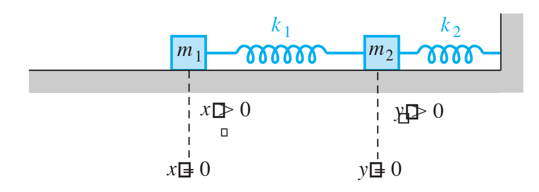


Figura 5.25 Sistema masa-resorte acoplado con un extremo libre

2. Determine las ecuaciones de movimiento para las dos masas descritas en el problema 1 si $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1$ kg, $k_1 = 3$ N/m, y $k_2 = 2$ N/m.

3. Cuatro resortes con la misma constante de resorte y tres masas iguales se unen en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción, según se muestra en la figura 5.26. Determine las frecuencias normales del sistema y describa los tres modos normales de vibración.

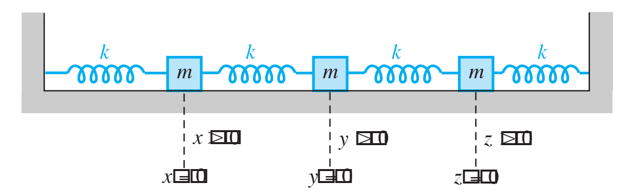


Figura 5.26 Sistema masa-resorte acoplado con tres grados de libertad

4. Dos resortes, dos masas y un amortiguador se unen en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción como se muestra en la figura 5.27. El amortiguador proporciona una fuerza de amortiguamiento sobre la masa m_2, dada por $F = -by'$. Deduzca el sistema de ecuaciones diferenciales para los desplazamientos x y y.

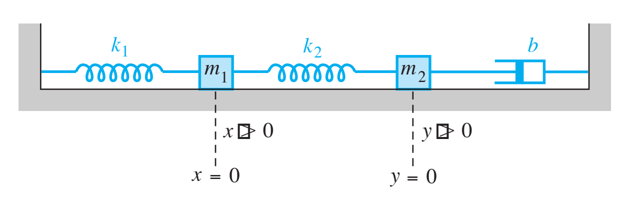


Figura 5.27 Sistema masa-resorte acoplado con un extremo amortiguado

5. Dos resortes, dos masas y un amortiguador se unen en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción como se muestra en la figura 5.28. El sistema se pone en movimiento manteniendo la masa m_2 en su posición de equilibrio y jalando la masa m_1

a la izquierda de su posición de equilibrio a una distancia de 2 metros, para luego liberar ambas masas. Determine las ecuaciones de movimiento para las dos masas si $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k_1 = k_2 = 1$ N/m, y $b = 1$ N-s/m. [*Sugerencia*: El amortiguador actúa sobre m_1 y m_2 con una fuerza de magnitud $b|y' - x'|$].

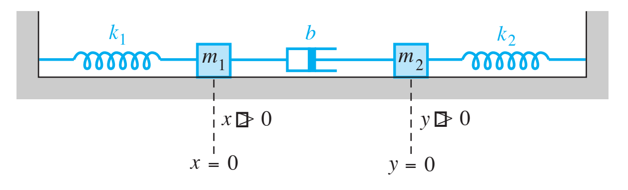


Figura 5.28 Sistema masa-resorte acoplado con amortiguamiento entre las masas

6. En relación con el sistema masa-resorte acoplado del ejemplo 1, suponga que se aplica una fuerza externa $E(t) = 37 \cos 3t$ al segundo objeto de masa 1 kg. Las funciones de desplazamiento $x(t)$, $y(t)$ satisfacen ahora el sistema

(16) $\quad 2x''(t) + 6x(t) - 2y(t) = 0 \; ,$

(17) $\quad y''(t) + 2y(t) - 2x(t) = 37 \cos 3t \; .$

(a) Muestre que $x(t)$ satisface la ecuación

(18) $\quad x^{(4)}(t) + 5x''(t) + 4x(t) = 37 \cos 3t \; .$

(b) Determine una solución general $x(t)$ de la ecuación (18). [*Sugerencia*: Use coeficientes indeterminados, con $x_p = A \cos 3t + B \text{ sen } 3t$].

(c) Sustituya $x(t)$ en (16) para obtener una fórmula para $y(t)$.

(d) Si ambas masas se desplazan 2 m hacia la derecha de sus posiciones de equilibrio y luego se liberan, determine las funciones de desplazamiento $x(t)$ y $y(t)$.

7. Suponga que las funciones de desplazamiento $x(t)$ y $y(t)$ para un sistema masa-resorte acoplado (similar al analizado en el problema 6) satisfacen el problema con valores iniciales

$$x''(t) + 5x(t) - 2y(t) = 0 \; ,$$
$$y''(t) + 2y(t) - 2x(t) = 3 \text{ sen } 2t \; ;$$
$$x(0) = x'(0) = 0 \; ,$$
$$y(0) = 1 \; , \quad y'(0) = 0 \; .$$

Determine $x(t)$ y $y(t)$.

8. Un péndulo doble oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad (véase la figura 5.29) y satisface el sistema

$$(m_1 + m_2)l_1^2\theta_1'' + m_2 l_1 l_2 \theta_2'' + (m_1 + m_2) l_1 g \theta_1 = 0 \; ,$$
$$m_2 l_2^2 \theta_2'' + m_2 l_1 l_2 \theta_1'' + m_2 l_2 g \theta_2 = 0 \; ,$$

donde θ_1 y θ_2 son ángulos pequeños. Resuelva el sistema cuando $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg, $l_1 = l_2 = 5$ m, $\theta_1(0) = \pi/6$, $\theta_2(0) = \theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0$.

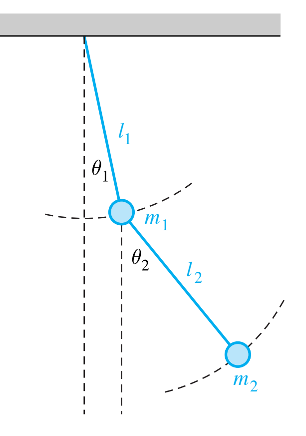


Figura 5.29 Péndulo doble

9. El movimiento de una pareja de péndulos idénticos acoplados mediante un resorte se modela mediante el sistema

$$mx_1'' = -\frac{mg}{l}x_1 - k(x_1 - x_2) \; ,$$

$$mx_2'' = -\frac{mg}{l}x_2 + k(x_1 - x_2)$$

para desplazamientos pequeños (véase la figura 5.30). Determine las dos frecuencias normales del sistema.

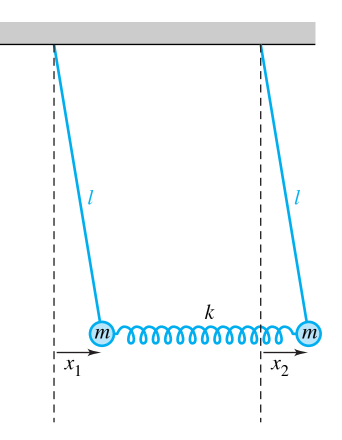


Figura 5.30 Péndulos acoplados

10. Suponga que el sistema masa-resorte acoplado del problema 1 (figura 5.25) se cuelga *verticalmente* en un soporte (con la masa m_2 sobre m_1), como en la sección 4.9, página 218.

(a) Justifique que en el equilibrio, el resorte inferior se estira una distancia l_1 con respecto de su longitud natural L_1, dada por $l_1 = m_1 g/k_1$.

(b) Justifique que en el equilibrio, el resorte superior se estira una distancia $l_2 = (m_1 + m_2)g/k_2$.

(c) Muestre que si x_1 y x_2 se definen ahora como los desplazamientos con respecto de las posiciones de equilibrio de las masas m_1 y m_2, entonces las ecuaciones de movimiento son idénticas a las obtenidas en el problema 1.

5.6 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Las ecuaciones que describen las relaciones voltaje-corriente para una resistencia, un inductor y un condensador se dieron en la sección 3.5, junto con las leyes de Kirchhoff que restringen el comportamiento de estas cantidades cuando los elementos se conectan en forma eléctrica a un circuito. Ahora que tenemos las herramientas para resolver ecuaciones lineales y sistemas de orden superior, podemos analizar circuitos eléctricos más complejos.

EJEMPLO 1 El circuito *RLC* en serie de la figura 5.31 tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) =$ sen 100t voltios (V), una resistencia de 0.02 ohms (Ω), un inductor de 0.001 henrios (H) y un condensador de 2 faradios (F). (Elegimos estos valores por conveniencia; los valores típicos para el condensador son mucho menores). Si la corriente y la carga iniciales en el condensador son iguales a cero, determinar la corriente en el circuito para $t > 0$.

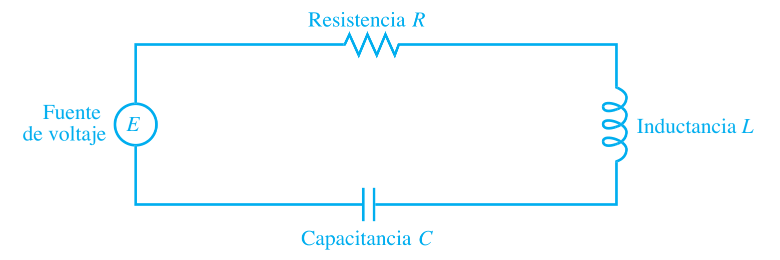


Figura 5.31 Representación esquemática de un circuito *RLC* en serie.

SOLUCIÓN Con la notación de la sección 3.5, tenemos que $L = 0.001$ H, $R = 0.02$ Ω, $C = 2$ F y $E(t) =$ sen $100t$. Según la ley de corriente de Kirchhoff, la misma corriente I pasa por cada elemento del circuito. La corriente que pasa por el condensador es igual a la razón instantánea de cambio de su carga q:

$$\textbf{(1)} \qquad I = dq/dt \ .$$

Por las ecuaciones de la sección 3.5, observamos que la caída de voltaje a través del condensador (E_C), la resistencia (E_R) y el inductor (E_L) se expresan como

$$\textbf{(2)} \qquad E_C = \frac{q}{C} \ , \qquad E_R = RI \ , \qquad E_L = L\frac{dI}{dt} \ .$$

Por tanto, la ley del voltaje de Kirchhoff $E_L + E_R + E_C = E$ se puede expresar como

(3) $$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q = E(t) .$$

En la mayor parte de las aplicaciones nos interesará determinar la corriente $I(t)$. Si derivamos (3) con respecto de t y sustituimos I en vez de dq/dt, obtenemos

(4) $$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} .$$

Al sustituir los valores dados tenemos

$$(0.001)\frac{d^2I}{dt^2} + (0.02)\frac{dI}{dt} + (0.5)I = 100 \cos 100t ,$$

o, en forma equivalente,

(5) $$\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 500I = 100{,}000 \cos 100t .$$

La ecuación homogénea asociada con (5) tiene la ecuación auxiliar

$$r^2 + 20r + 500 = (r + 10)^2 + (20)^2 = 0 ,$$

cuyas raíces son $-10 \pm 20i$. Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es

(6) $$I_h(t) = C_1e^{-10t} \cos 20t + C_2e^{-10t} \operatorname{sen} 20t .$$

Para determinar una solución particular de (5), podemos usar el método de coeficientes indeterminados. Hacemos

$$I_p(t) = A \cos 100t + B \operatorname{sen} 100t$$

y realizamos el procedimiento de la sección 4.5 para obtener finalmente, con tres decimales,

$$A = -10.080 , \qquad B = 2.122 .$$

Por lo tanto, una solución particular de (5) está dada por

(7) $$I_p(t) = -10.080 \cos 100t + 2.122 \operatorname{sen} 100t .$$

Como $I = I_h + I_p$, vemos de (6) y (7) que

(8) $$I(t) = e^{-10t}(C_1 \cos 20t + C_2 \operatorname{sen} 20t) - 10.080 \cos 100t + 2.122 \operatorname{sen} 100t .$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2, necesitamos los valores $I(0)$ e $I'(0)$. Sabemos que $I(0) = q(0) = 0$. Para determinar $I'(0)$, sustituimos los valores para L, R y C en la ecuación (3) e igualamos los dos lados en $t = 0$, para obtener

$$(0.001)I'(0) + (0.02)I(0) + (0.5)q(0) = \operatorname{sen} 0 .$$

Como $I(0) = q(0) = 0$, vemos que $I'(0) = 0$.. Por último, usamos $I(t)$ en (8) y las condiciones iniciales $I(0) = I'(0) = 0$, para obtener el sistema

$$I(0) = C_1 - 10.080 = 0 \ ,$$
$$I'(0) = -10C_1 + 20C_2 + 212.2 = 0 \ .$$

Al resolver este sistema tenemos que $C_1 = 10.080$ y $C_2 = -5.570$. Por lo tanto, la corriente en el circuito *RLC* en serie es

(9) $$I(t) = e^{-10t}(10.080 \cos 20t - 5.570 \text{ sen } 20t) - 10.080 \cos 100t + 2.122 \text{ sen } 100t \ . \blacksquare$$

Observe que, como en el caso de las vibraciones mecánicas forzadas, la corriente en (9) tiene dos componentes: I_h, una **corriente transitoria** que tiende a cero cuando $t \to +\infty$, y la otra componente

$$I_p(t) = -10.080 \cos 100t + 2.122 \text{ sen } 100t \ ,$$

una **corriente de estado estacionario** senoidal que permanece.

Dejaremos al lector la verificación de que la solución de estado estacionario $I_p(t)$ que surge de la fuente de voltaje más general $E(t) = E_0 \text{ sen } \gamma t$ es

(10) $$I_p(t) = \frac{E_0 \text{ sen}(\gamma t + \theta)}{\sqrt{R^2 + [\gamma L - 1/(\gamma C)]^2}} \ ,$$

donde $\tan \theta = (1/C - L\gamma^2)/(\gamma R)$ (véase la sección 4.9, página 218).

EJEMPLO 2 En el instante $t = 0$, la carga en el condensador de la red eléctrica que aparece en la figura 5.32 es de 2 coulombs (C), mientras que la corriente que circula a través del condensador es cero. Determine la carga en el condensador y las corrientes en las diversas ramas de la red en cualquier instante $t > 0$.

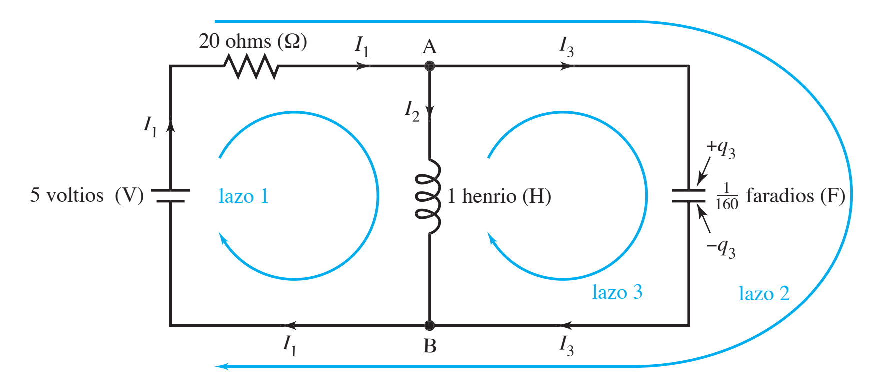


Figura 5.32 Diagrama esquemático de una red eléctrica

SOLUCIÓN Para determinar la carga y corrientes en la red eléctrica, primero notamos que la red tiene tres circuitos cerrados: el lazo 1 a través de la batería, la resistencia y el inductor; el lazo 2 que pasa por la batería, la resistencia y el condensador, y el lazo 3 que contiene al condensador y al inductor. Aprovecharemos la ley de la corriente de Kirchhoff; designamos como

I_1 a la corriente que pasa por la batería y la resistencia, I_2 es la corriente que pasa por el inductor e I_3 la corriente que pasa por el condensador. Para que la notación sea consistente, denotamos la carga en el condensador como q_3. Por lo tanto, $I_3 = dq_3/dt$.

Como analizamos al principio de la sección, la caída de voltaje en una resistencia es RI, en un inductor es LdI/dt y en un condensador es q/C. Así, al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a la red eléctrica de la figura 5.32, vemos que para el lazo 1,

$$\textbf{(11)} \qquad \underset{\text{(inductor)}}{\frac{dI_2}{dt}} + \underset{\text{(resistencia)}}{20I_1} = \underset{\text{(batería)}}{5} \ ;$$

para el lazo 2,

$$\textbf{(12)} \qquad \underset{\text{(resistencia)}}{20I_1} + \underset{\text{(condensador)}}{160q_3} = \underset{\text{(batería)}}{5} \ ;$$

y para el lazo 3,

$$\textbf{(13)} \qquad \underset{\textbf{(inductor)}}{-\frac{dI_2}{dt}} + \underset{\textbf{(condensador)}}{160q_3} = 0 \ .$$

(El signo menos en (13) surge al considerar una trayectoria en el sentido de las manecillas del reloj en torno al lazo 3, de modo que la corriente que pasa por el inductor es $-I_2$). Observe que estas tres ecuaciones no son independientes: Podemos obtener la ecuación (13) restando (11) de (12). Por lo tanto, sólo tenemos dos ecuaciones para determinar las tres incógnitas I_1, I_2, y q_3. Si ahora aplicamos la ley de la corriente de Kirchhoff a los dos puntos de unión en la red, en el punto A vemos que $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ y en el punto B que $I_2 + I_3 - I_1 = 0$. En ambos casos obtenemos

$$\textbf{(14)} \qquad I_1 - I_2 - \frac{dq_3}{dt} = 0 \ ,$$

pues $I_3 = dq_3/dt$. Al reunir (11), (12) y (14) en un sistema, tenemos (con $D = d/dt$)

$$\textbf{(15)} \qquad DI_2 + 20I_1 = 5 \ ,$$

$$\textbf{(16)} \qquad 20I_1 + 160q_3 = 5 \ ,$$

$$\textbf{(17)} \qquad -I_2 + I_1 - Dq_3 = 0 \ .$$

Resolvemos este sistema mediante el método de eliminación de la sección 5.2. Usamos la ecuación (16) para eliminar I_1 de las otras dos, y tenemos

$$\textbf{(18)} \qquad DI_2 - 160q_3 = 0 \ ,$$

$$\textbf{(19)} \qquad 20I_2 + (20D + 160)q_3 = 5 \ .$$

Al eliminar I_2 se llega a

$$\textbf{(20)} \qquad 20D^2q_3 + 160Dq_3 + 3200q_3 = 0 \ .$$

Para obtener las condiciones iniciales para la ecuación de segundo orden (20), recordemos que en el instante $t = 0$, la carga en el condensador es de 2 coulombs y la corriente se anula. Por tanto,

$$\textbf{(21)} \qquad q_3(0) = 2 \ , \qquad \frac{dq_3}{dt}(0) = 0 \ .$$

Ahora podemos resolver el problema con valores iniciales (20) – (21) mediante las técnicas del capítulo 4. En última instancia tenemos

$$q_3(t) = 2e^{-4t}\cos 12t + \frac{2}{3}e^{-4t}\operatorname{sen} 12t \ ,$$

$$I_3(t) = \frac{dq_3}{dt}(t) = -\frac{80}{3}e^{-4t}\operatorname{sen} 12t \ .$$

Ahora, para determinar I_2, sustituimos estas expresiones en (19) y obtenemos

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{1}{4} - \frac{dq_3}{dt}(t) - 8q_3(t) \\ &= \frac{1}{4} - 16e^{-4t}\cos 12t + \frac{64}{3}e^{-4t}\operatorname{sen} 12t \ . \end{aligned}$$

Por último, de $I_1 = I_2 + I_3$ obtenemos

$$I_1(t) = \frac{1}{4} - 16e^{-4t}\cos 12t - \frac{16}{3}e^{-4t}\operatorname{sen} 12t \ . \ \blacksquare$$

Observe que las ecuaciones diferenciales que describen las vibraciones mecánicas y los circuitos *RLC* en serie son esencialmente iguales. De hecho, hay una identificación natural de los parámetros *m, b* y *k* para un sistema masa-resorte con los parámetros *L, R* y *C* que describen los circuitos; esto se ilustra en la tabla 5.3. Además, los términos *transitorio, estado estacionario, sobreamortiguado, críticamente amortiguado, subamortiguado* y *frecuencia de resonancia* que se describieron en las secciones 4.8 y 4.9 también se aplican a los circuitos eléctricos.

TABLA 5.3 ANALOGÍA ENTRE LOS SISTEMAS MECÁNICOS Y ELÉCTRICOS

Sistema mecánico masa-resorte con amortiguamiento		**Circuito eléctrico *RLC* en serie**	
$mx'' + bx' + kx = f(t)$		$Lq'' + Rq' + (1/C)q = E(t)$	
Desplazamiento	x	Carga	q
Velocidad	x'	Corriente	$q' = I$
Masa	m	Inductancia	L
Constante de amortiguamiento	b	Resistencia	R
Constante de resorte	k	(Capacitancia)$^{-1}$	$1/C$
Fuerza externa	$f(t)$	Fuente de voltaje	$E(t)$

Esta analogía entre un sistema mecánico y un circuito eléctrico se extiende a sistemas y circuitos de gran escala. Una consecuencia interesante de este hecho es el uso de **simulación analógica** y, en particular, el uso de computadoras analógicas para analizar sistemas mecánicos. Los sistemas mecánicos de gran escala se modelan construyendo un sistema eléctrico correspondiente, midiendo después las cargas $q(t)$ y las corrientes $I(t)$.

Aunque tales simulaciones analógicas son importantes, *tanto* los sistemas mecánicos *como* los sistemas eléctricos de gran escala se modelan actualmente con simulaciones en computadoras digitales. Esto implica la resolución numérica del problema con valores iniciales que describe al sistema. Aún así, la analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos significa que, básicamente, se puede usar el mismo software para analizar ambos sistemas.

EJERCICIOS 5.6

1. Un circuito *RLC* en serie tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = 20$ V, una resistencia de 100 Ω, un inductor de 4 H y un condensador de 0.01 F. Si la corriente inicial es igual a cero y la carga inicial en el condensador es 4 C, determine la corriente en el circuito para $t > 0$.

2. Un circuito *RLC* en serie tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = 40 \cos 2t$ V, una resistencia de 2 Ω, un inductor de $1/4$ H y un condensador de $1/13$ F. Si la corriente inicial es igual a cero y la carga inicial en el condensador es 3.5 C, determine la carga en el condensador para $t > 0$.

3. Un circuito *RLC* en serie tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = 10 \cos 20t$ V, una resistencia de 120 Ω, un inductor de 4 H y un condensador de $(2200)^{-1}$ F. Determine la corriente (solución) de estado estacionario para este circuito. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia para el circuito?

4. Un circuito *LC* en serie tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = 30 \operatorname{sen} 50t$ V, un inductor de 2 H y un condensador de 0.02 F (sin resistencias). ¿Cuál es la corriente en este circuito para $t > 0$ si en $t = 0$, $I(0) = q(0) = 0$?

5. Un circuito *RLC* en serie tiene una fuente de voltaje de la forma $E(t) = E_0 \cos \gamma t$ V, una resistencia de 10 Ω, un inductor de 4 H y un condensador de 0.01 F. Bosqueje la curva de respuesta de frecuencia para este circuito.

6. Muestre que cuando la fuente de voltaje en (3) es de la forma $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \gamma t$, entonces la solución de estado estacionario I_p es la dada en la ecuación (10).

7. Un sistema masa-resorte con amortiguamiento consta de una masa de 7 kg, un resorte con constante de resorte 3 N/m, un componente de fricción con constante de amortiguamiento 2 N-s/m y una fuerza externa dada por $f(t) = 10 \cos 10t$ N. Use una resistencia de 10 Ω para construir un circuito *RLC* en serie que sea el análogo de este sistema mecánico, en el sentido que ambos sistemas queden descritos mediante la misma ecuación diferencial.

8. Un sistema masa-resorte con amortiguamiento consta de un peso de 16 libras, un resorte con constante de resorte 64 libras/pie, un componente de fricción con constante de amortiguamiento 10 libras-s/pie y una fuerza externa dada por $f(t) = 20 \cos 8t$ libras. Use un inductor de 0.01 H para construir un circuito *RLC* en serie que sea el análogo de este sistema mecánico.

9. Debido a la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, con frecuencia es conveniente considerar a la vez las fuentes de voltaje $E_0 \cos \gamma t$ y $E_0 \operatorname{sen} \gamma t$, usando $E(t) = E_0 e^{i\gamma t}$. En este caso, la ecuación (3) se convierte en

$$\textbf{(22)} \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 e^{i\gamma t} ,$$

donde ahora q es complejo (recuerde que $I = q', I' = q''$).

(a) Muestre que la solución de estado estacionario (22) es

$$q_p(t) = \frac{E_0}{1/C - \gamma^2 L + i\gamma R} e^{i\gamma t} .$$

[*Sugerencia*: Use el método de coeficientes indeterminados con la estimación $q_p = Ae^{i\gamma t}$, donde A es una constante compleja. La técnica se analiza con detalle en el proyecto A al final del capítulo 4].

(b) Muestre ahora que la corriente de estado estacionario es

$$I_p(t) = \frac{E_0}{R + i[\gamma L - 1/(\gamma C)]} e^{i\gamma t} .$$

(c) Use la relación $\alpha + i\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\theta}$, donde $\tan \theta = \beta/\alpha$, para mostrar que I_p se puede expresar en la forma

$$I_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + [\gamma L - 1/(\gamma C)]^2}} e^{i(\gamma t + \theta)} ,$$

donde $\tan \theta = (1/C - L\gamma^2)/(\gamma R)$.

(d) La parte imaginaria de $e^{i\gamma t}$ is sen γt, de modo que la parte imaginaria de la solución de (22) debe ser la solución de la ecuación (3) para $E(t) = E_0$ sen γt. Verifique que éste también es el caso para la corriente, mostrando que la parte imaginaria de I_p en la parte (c) es igual a la dada en la ecuación (10).

En los problemas 10 a 13, determine un sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales para la corriente de las redes dadas en los diagramas esquemáticos (Figuras 5.33 a 5.36). Suponga que todas las corrientes iniciales se anulan. Determine las corrientes en cada rama de la red.

10.

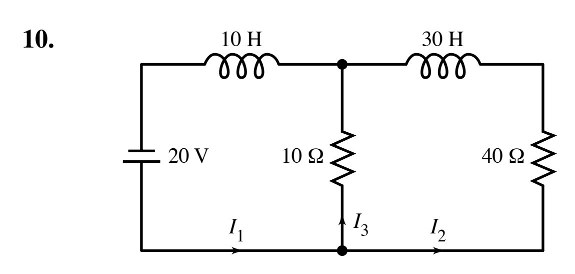


Figura 5.33 Red *RL* para el problema 10

11.

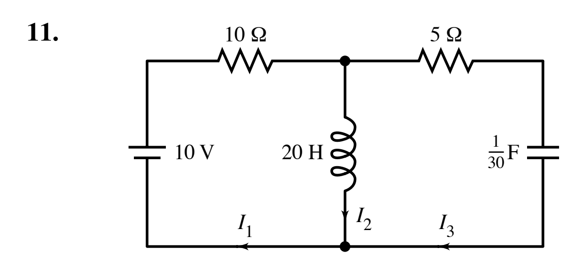


Figura 5.34 Red *RL* para el problema 11

12.

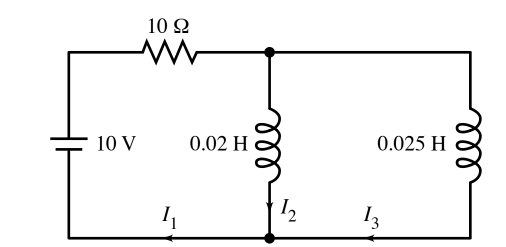


Figura 5.35 Red *RL* para el problema 12

13.

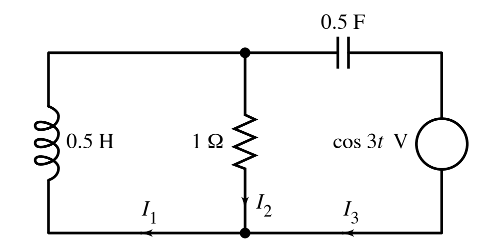


Figura 5.36 Red *RLC* para el problema 13

5.7 SISTEMAS DINÁMICOS, TRANSFORMACIONES DE POINCARÉ Y CAOS

En esta sección daremos un paseo por un área de las matemáticas que actualmente recibe mucha atención, tanto por los interesantes fenómenos matemáticos observados como por sus aplicaciones a campos como la meteorología, la conducción del calor, la mecánica de fluidos, los equipos láser, las reacciones químicas y los circuitos no lineales, entre otros. El área es la de los sistemas dinámicos,† en particular cuando estos sistemas son no lineales.

†Para un estudio más detallado de los sistemas dinámicos, el lector puede consultar *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, segunda edición, por R. L. Devaney (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989) y *Nonlinear Oscillations*, *Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* por J. Guckenheimer y P. J. Holmes (Springer-Verlag, Nueva York, 1983).

Un **sistema dinámico** es cualquiera que nos permite determinar (al menos desde un punto de vista teórico) los estados futuros del sistema dado su estado presente. Por ejemplo, la fórmula recursiva (ecuación en diferencias)

$$x_{n+1} = (1.05)x_n \;, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

es un sistema dinámico, pues podemos determinar el siguiente estado x_{n+1}, dado el estado anterior x_n. Si conocemos x_0, entonces podemos calcular cualquier estado futuro $\left[\text{de hecho, } x_{n+1} = x_0(1.05)^{n+1}\right]$.

Otro ejemplo de sistema dinámico es la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -2x \;,$$

donde la solución $x(t)$ especifica el estado del sistema en el "instante" t. Si conocemos $x(t_0) = x_0$, entonces podemos determinar el estado del sistema en cualquier instante futuro $t > t_0$ resolviendo el problema con valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = -2x \;, \qquad x(t_0) = x_0 \;.$$

En efecto, un sencillo cálculo muestra que $x(t) = x_0 e^{-2(t-t_0)}$ para $t \geq t_0$.

Para un sistema dinámico definido mediante una ecuación diferencial, con frecuencia es útil trabajar con un sistema dinámico relacionado con el anterior, definido mediante una ecuación en diferencias. Por ejemplo, cuando no podemos expresar la solución de una ecuación diferencial mediante funciones elementales, podemos usar una técnica numérica, como el método de Euler mejorado o Runge-Kutta para aproximar la solución de un problema con valores iniciales. Este esquema numérico define un nuevo sistema dinámico (pero relacionado con el anterior) que con frecuencia es más fácil de estudiar.

En la sección 5.4 usamos los diagramas del plano fase para estudiar los sistemas autónomos en el plano. Muchas de las características importantes del sistema se pueden detectar observando tales diagramas. Por ejemplo, una trayectoria cerrada corresponde a una solución periódica. La interpretación de las trayectorias de sistemas *no* autónomos en el plano fase es más compleja. Una técnica que es útil en este contexto es la llamada **transformación de Poincaré**. Como veremos, estas transformaciones reemplazan el estudio de un sistema no autónomo por el estudio de un sistema dinámico definido mediante la posición en el plano xv $(v = dx/dt)$ de la solución en momentos espaciados regularmente en el tiempo, como $t = 2\pi n$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$. La ventaja de usar la transformación de Poincaré será clara al aplicar el método a un problema no lineal del que no se conoce una solución explícita. En tal caso, las trayectorias se calculan mediante un esquema numérico, como Runge-Kutta. Varios paquetes de software tienen opciones que construyen las transformaciones de Poincaré para un sistema dado.

Para ilustrar la transformación de Poincaré, consideremos la ecuación

(1) $$x''(t) + \omega^2 x(t) = F \cos t \;,$$

donde F y ω son constantes positivas. En la sección 4.9 estudiamos ecuaciones similares y vimos que una solución general para $\omega \neq 1$ está dada por

(2) $$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \frac{F}{\omega^2 - 1} \cos t \;,$$

donde la amplitud A y el ángulo de fase ϕ son constantes arbitrarias. Como $v = x'$,

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi) - \frac{F}{\omega^2 - 1} \operatorname{sen} t \;.$$

Como la función de forzamiento $F \cos t$ es periódica con periodo 2π, es natural buscar soluciones de (1) periódicas con periodo 2π. Para esto, definimos la transformación de Poincaré como

(3)
$$x_n := x(2\pi n) = A \operatorname{sen}(2\pi\omega n + \phi) + F/(\omega^2 - 1) \ ,$$
$$v_n := v(2\pi n) = \omega A \cos(2\pi\omega n + \phi) \ ,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$. En la figura 5.37 graficamos los primeros cien valores de (x_n, v_n) en el plano xv para distintas elecciones de ω. Para simplificar la exposición, consideramos $A = F = 1$ y $\phi = 0$. Estas gráficas se llaman **secciones de Poincaré** y las interpretaremos en breve.

Ahora juguemos a lo siguiente. Ignoremos por el momento el hecho de que ya conocemos la fórmula para $x(t)$ para toda $t \geq 0$. Queremos saber qué información relativa a la solución podemos obtener de la sección de Poincaré y de la forma de la ecuación diferencial.

Observe que las dos primeras secciones de Poincaré en la figura 5.37, correspondientes a $\omega = 2$ y 3, constan de un solo punto. Esto nos dice que, si comenzamos en $t = 0$, todo incremento de 2π en t nos regresa al mismo punto en el plano fase. Esto a su vez implica que la ecuación (1) tiene una solución periódica con periodo 2π, lo que puede demostrarse como sigue: Para $\omega = 2$, sea $x(t)$ la solución de (1) con $\big(x(0), v(0)\big) = (1/3, 2)$ y sea $X(t) := x(t + 2\pi)$. Como la sección de Poincaré es sólo el punto $(1/3, 2)$, tenemos que $X(0) = x(2\pi) = 1/3$ y $X'(0) = x'(2\pi) = 2$. Así, $x(t)$ y $X(t)$ tienen los mismos valores iniciales en $t = 0$. Además, como $\cos t$ es periódica con periodo 2π, también tenemos

$$X''(t) + \omega^2 X(t) = x''(t + 2\pi) + \omega^2 x(t + 2\pi) = \cos(t + 2\pi) = \cos t \ .$$

En consecuencia, $x(t)$ y $X(t)$ satisfacen el mismo problema con valores iniciales. Por los teoremas de unicidad de las secciones 4.2 y 4.5, estas funciones deben coincidir en el intervalo $[0, \infty)$. Por lo tanto $x(t) = X(t) = x(t + 2\pi)$ para toda $t \geq 0$; es decir, $x(t)$ tiene periodo 2π. (El mismo razonamiento sirve para $\omega = 3$). Con un argumento similar, se tiene que la sección de Poincaré para ω tiene una solución con periodo 4π que alterna entre los dos puntos que aparecen en la figura 5.37(c) cuando t se incrementa en 2π. Para el caso $\omega = 1/3$, deducimos que existe una solución de periodo 6π que va pasando por estos tres puntos, y para $\omega = 1/4$ hay una solución con periodo 8π que pasa por cuatro puntos. A las últimas tres soluciones les llamamos **subarmónicas**.

El caso $\omega = \sqrt{2}$ es distinto. hasta ahora, en la figura 5.37(f), ninguno de los puntos se ha repetido. ¿Nos detuvimos demasiado pronto? ¿Habrá algún momento en que los puntos se repitan? En este caso, el hecho de que $\sqrt{2}$ sea irracional juega un papel crucial. Se puede ver que todo entero n proporciona un punto distinto en la sección de Poincaré (véase el problema 8). Sin embargo, se está desarrollando un patrón. Parece que todos los puntos están en una curva simple, tal vez una elipse. Para ver que esto ocurre, observe que cuando $\omega = \sqrt{2}$, $A = F = 1$, y $\phi = 0$, tenemos

$$x_n = \operatorname{sen}\big(2\sqrt{2}\pi n\big) + 1 \ , \qquad v_n = \sqrt{2}\cos\big(2\sqrt{2}\pi n\big) \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Un sencillo cálculo nos permite mostrar que cada (x_n, v_n) está en la elipse

$$(x - 1)^2 + \frac{v^2}{2} = 1 \ .$$

En nuestro estudio de la ecuación (1) nos concentramos en soluciones con periodo 2π debido a que el término de forzamiento $F \cos t$ tiene periodo 2π. [Observamos soluciones subarmónicas cuando $\omega = 1/2, 1/3,$ y $1/4$—; es decir, soluciones con periodos $2(2\pi), 3(2\pi),$ y $4(2\pi)$]. Al introducir un término de amortiguamiento en la ecuación dife-

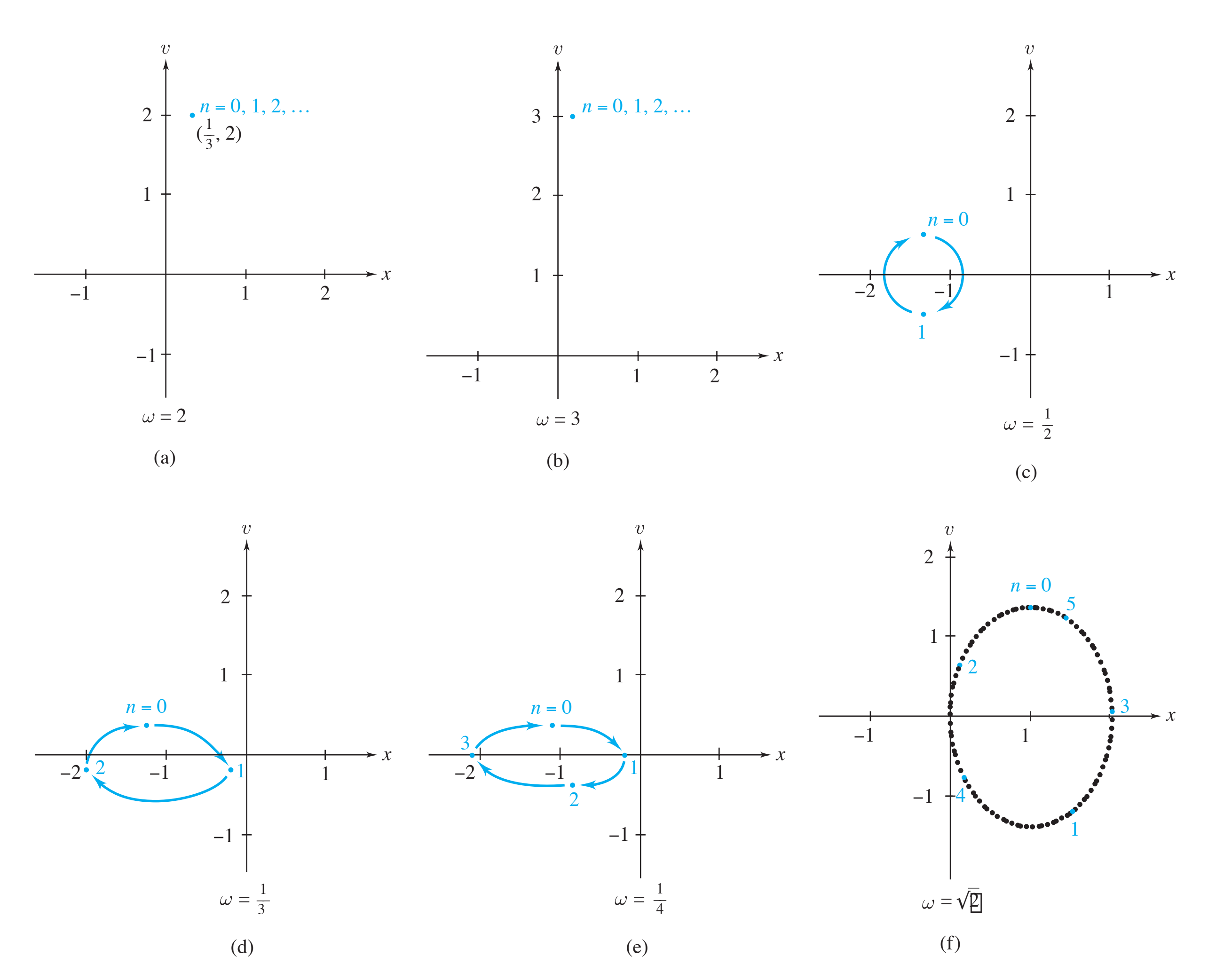


Figura 5.37 Secciones de Poincaré para la ecuación (1) para diversos valores de ω

rencial, la transformación de Poincaré muestra un comportamiento diferente. Recuerde que la solución será ahora la suma de un término transitorio y un estado estacionario. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$\textbf{(4)} \qquad x''(t) + bx'(t) + \omega^2 x(t) = F\cos t \ ,$$

donde b, F, y ω son constantes positivas.

Cuando $b^2 < 4\omega^2$, la solución de (4) se puede expresar como

$$\textbf{(5)} \qquad x(t) = Ae^{-(b/2)t}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{4\omega^2 - b^2}}{2}\,t + \phi\right) + \frac{F}{\sqrt{(\omega^2-1)^2 + b^2}}\,\text{sen}(t+\theta) \ ,$$

donde $\tan\theta = (\omega^2 - 1)/b$ y A y ϕ son constantes arbitrarias [véanse las ecuaciones (7) y (8) de la sección 4.9]. El primer término del lado derecho de (5) es la solución transitoria y el segundo la solución de estado estacionario. Construyamos la transformación de Poincaré

usando $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Hacemos $b = 0.22$, $\omega = A = F = 1$, y $\phi = 0$ para simplificar los cálculos. Como $\tan\theta = (\omega^2 - 1)/b = 0$, también hacemos $\theta = 0$. Entonces tenemos

$$x(2\pi n) = x_n = e^{-0.22\pi n}\operatorname{sen}\left(\sqrt{0.9879}\,2\pi n\right) ,$$
$$x'(2\pi n) = v_n = -0.11e^{-0.22\pi n}\operatorname{sen}\left(\sqrt{0.9879}\,2\pi n\right)$$
$$+ \sqrt{0.9879}\,e^{-0.22\pi n}\cos\left(\sqrt{0.9879}\,2\pi n\right) + \frac{1}{(0.22)} .$$

La sección de Poincaré para $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$ aparece en la figura 5.38 (puntos negros). Después de unas cuantas iteraciones, observamos que $x_n \approx 0$ y $v_n \approx 1/(0.22) \approx 4.545$; es decir, los puntos de la sección de Poincaré tienden a un único punto en el plano xv (puntos de color). Así, sería de esperar que hubiera una solución con periodo 2π correspondiente a una elección particular de A y ϕ. [En este ejemplo, donde podemos representar la solución de manera explícita, vemos que surge una solución con periodo 2π cuando hacemos $A = 0$ en (5)].

Hay una diferencia importante entre las secciones de Poincaré para la ecuación(1) y las de la ecuación (4). En la figura 5.37, la posición de todos los puntos en (a) – (e) depende del valor inicial elegido; en este caso, $A = 1$ y $\phi = 0$. (Véase el problema 10). Sin embargo, en la figura 5.38, los primeros puntos (negros) dependen de las condiciones iniciales, mientras que el punto límite (punto gris) *no* (véase el problema 6). Este último comportamiento es típico de ecuaciones que tienen un término de "amortiguamiento"(es decir, $b > 0$); a saber, la sección de Poincaré tiene un conjunto límite† que en esencia es independiente de las condiciones iniciales.

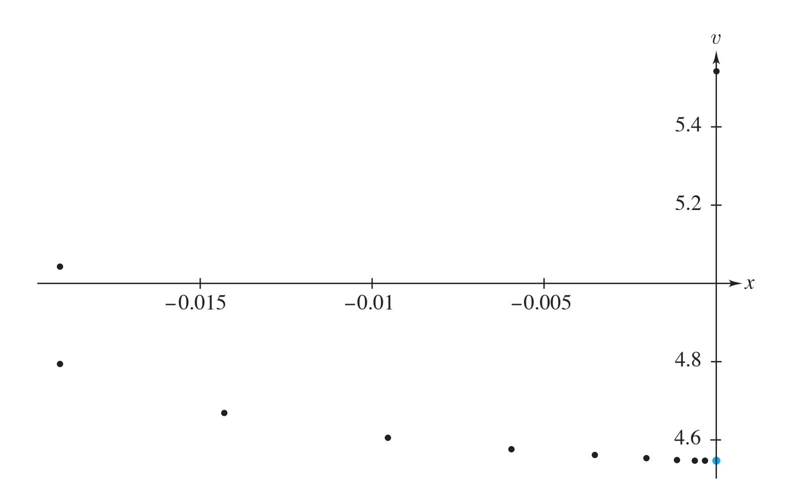


Figura 5.38 Sección de Poincaré para la ecuación (4) con $F = 1$, $b = 0.22$, y $\omega = 1$

Para las ecuaciones con amortiguamiento, el conjunto límite puede ser más complejo que sólo un punto. Por ejemplo, la transformación de Poincaré para la ecuación

$$\textbf{(6)} \qquad x''(t) + (0.22)x'(t) + x(t) = \cos t + \cos\left(\sqrt{2}t\right)$$

†El **conjunto límite** de una transformación (x_n, v_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, es el conjunto de puntos (p, q) tales que $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}, v_{n_k}) = (p, q)$, donde $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ es una subsucesión de los enteros positivos.



Figura 5.39 Sección de Poincaré para la ecuación (6) con valores iniciales x_0, v_0

tiene un conjunto límite que consta de una elipse (véase el problema 11). Esto se ilustra en la figura 5.39 para los valores iniciales $x_0 = 2$, $v_0 = 4$ y $x_0 = 2$, $v_0 = 6$.

Hasta ahora hemos visto conjuntos límite para la transformación de Poincaré formados por un único punto o una elipse, de manera independiente a los valores iniciales. Estos conjuntos límite particulares son **atractores**. En general, un atractor es un conjunto A con la propiedad de que existe un conjunto abierto† B que contiene a A de modo que siempre que la transformación de Poincaré entre a B, sus puntos permanecerán en B *y* el conjunto límite de la transformación de Poincaré es un subconjunto de A. Además, suponemos que A es *invariante*: siempre que la transformación de Poincaré parta de un punto en A, permanecerá en A.

En los ejemplos anteriores, los atractores del sistema dinámico (transformación de Poincaré) se podían describir fácilmente. Sin embargo, en años recientes, muchos investigadores que trabajan en una amplia gama de aplicaciones han encontrado sistemas dinámicos que *no* se comportan en forma ordenada; sus conjuntos atractores son muy complicados (no sólo son puntos aislados u objetos geométricos familiares, como elipses). El comportamiento de tales sistemas es llamado **caótico**, y los conjuntos límite correspondientes se conocen como **atractores extraños**.

Para ilustrar el comportamiento caótico y lo que se entiende por atractor extraño, analizaremos dos ecuaciones diferenciales no lineales y una ecuación en diferencias sencilla. Primero consideremos la **ecuación forzada de Duffing**

$$\textbf{(7)} \qquad x''(t) + bx'(t) - x(t) + x^3(t) = F \operatorname{sen} \gamma t \ .$$

No podemos expresar la solución de (7) en forma explícita, de modo que debemos obtener la transformación de Poincaré, aproximando numéricamente la solución de (7) para valores iniciales fijos y luego graficar las aproximaciones para $x(2\pi n/\gamma)$ y $v(2\pi n/\gamma) = x'(2\pi n/\gamma)$. (Como el término de forzamiento F sen γt tiene periodo $2\pi/\gamma$, buscaremos soluciones con

†Un conjunto $B \subset \mathbf{R}^2$ es un **conjunto abierto** si para cada punto $p \in B$ existe un disco abierto V que contiene a p tal que $V \subset B$.

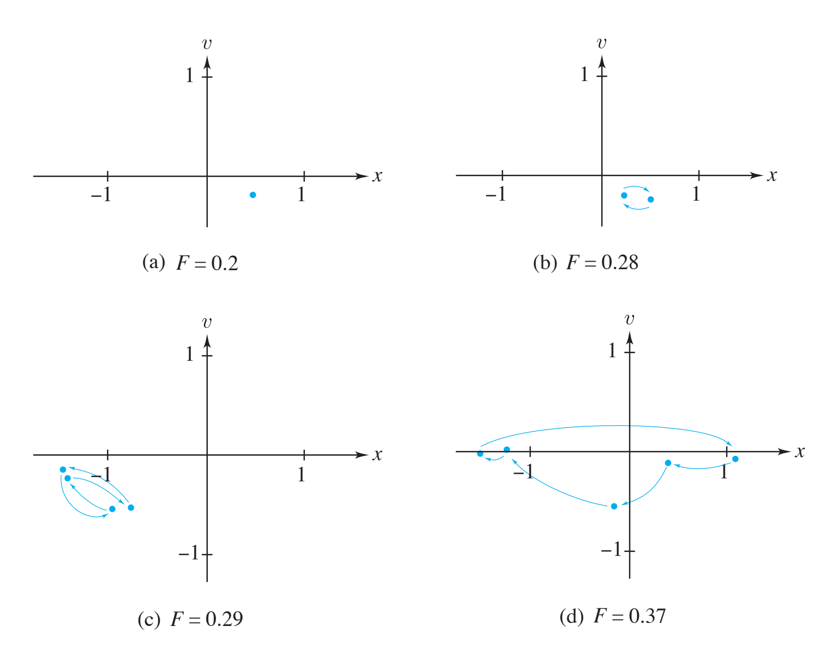


Figura 5.40 Secciones de Poincaré para la ecuación de Duffing (7) con $b = 0.3$ y $\gamma = 1.2$

periodo $2\pi/\gamma$ y subarmónicas). En la figura 5.40 mostramos los conjuntos límite (atractores) cuando $b = 0.3$ y en los casos (a) $F = 0.2$, (b) $F = 0.28$, (c) $F = 0.29$, y (d) $F = 0.37$.

Observe que al crecer la constante F, la transformación de Poincaré cambia de carácter. Cuando $F = 0.2$, la sección de Poincaré nos dice que hay una solución con periodo $2\pi/\gamma$ Para $F = 0.28$, hay una solución subarmónica de periodo $4\pi/\gamma$, y para $F = 0.29$ y 0.37 hay subarmónicas con periodos $8\pi/\gamma$ y $10\pi/\gamma$, respectivamente.

Las cosas son drásticamente distintas cuando $F = 0.5$; la solución ya no tiene periodo $2\pi/\gamma$ ni es subarmónica. La sección de Poincaré para $F = 0.5$ se ilustra en la figura 5.41. Generamos esta sección aproximando numéricamente la solución de (7) cuando $\gamma = 1.2$, $b = 0.3$ y $F = 0.5$ para valores iniciales fijos.[†] No graficamos todas las aproximaciones $x(2\pi n/\gamma)$ y $v(2\pi n/\gamma)$ calculadas; debido a la presencia de una solución transitoria, hemos omitido los primeros puntos. Se puede ver que el conjunto graficado es en esencia independiente de los valores iniciales y tiene la propiedad de que una vez que un punto está en el conjunto, todos los puntos posteriores también están en el conjunto. Debido a la forma tan complicada del conjunto, es un atractor extraño. Aunque la forma del atractor extraño no depende de los valores iniciales, la imagen cambia si consideramos secciones distintas; por ejemplo, $t = (2\pi n + \pi/2)/\gamma$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ proporciona una configuración distinta.

[†]***Nota histórica:*** Cuando los investigadores hallaron por vez primera estas secciones de Poincaré con apariencia extraña, verificaron sus cálculos mediante distintas computadoras y distintos esquemas numéricos (véase Hénon y Heiles, "The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments", *Astronomical Journal*, vol. 69 (1964), página 75). Para unos tipos particulares de sistemas dinámicos, como la transformación de Hénon, se puede mostrar que existe una trayectoria que hace sombra a la trayectoria numérica (véase M. Hammel, J. A. Yorke y C. Grebogi, "Numerical Orbits of Chaotic Processes Represent True Orbits", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 19 (1988), páginas 466-469).

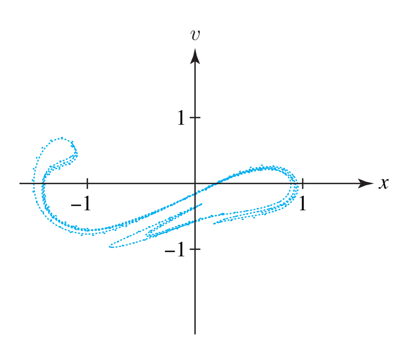


Figura 5.41 Sección de Poincaré para la ecuación de Duffing (7) con $b = 0.3$, $\gamma = 1.2$, y $F = 0.5$

Otro ejemplo de atractor extraño aparece al considerar la **ecuación del péndulo forzado**

$$\textbf{(8)} \qquad x''(t) + bx'(t) + \operatorname{sen}\big(x(t)\big) = F\cos t\ ,$$

donde el término $x(t)$ en (4) se ha reemplazado por $\operatorname{sen}\big(x(t)\big)$. En este caso, $x(t)$ es el ángulo entre el péndulo y la posición vertical de reposo, b se relaciona con el amortiguamiento y F representa la fuerza de la función de forzamiento (véase la figura 5.42). Para $F = 2.7$ y $b = 0.22$, hemos graficado en la figura 5.43 aproximadamente 90,000 puntos de la transformación de Poincaré. Como no podemos expresar la solución de (8) en alguna forma explícita, obtuvimos la transformación de Poincaré aproximando numéricamente la solución de (8) para valores iniciales fijos y graficamos las aproximaciones para $x(2\pi n)$ y $v(2\pi n) = x'(2\pi n)$.

Las transformaciones de Poincaré para la ecuación forzada de Duffing y para la ecuación del péndulo forzado no sólo ilustran la idea de un atractor extraño, sino que exhiben otro comportamiento peculiar llamado **caos**. El caos aparece cuando ligeros cambios en las condiciones iniciales conducen a grandes cambios en el comportamiento de la solución. Henri Poincaré describió la situación como sigue:

> Puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan otras muy grandes en los fenómenos finales. Un pequeño error en las primeras produce un error enorme en los segundos. La predicción se vuelve imposible…

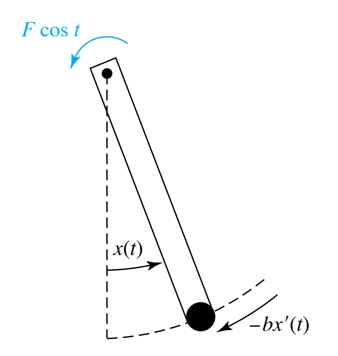


Figura 5.42 Péndulo amortiguado forzado

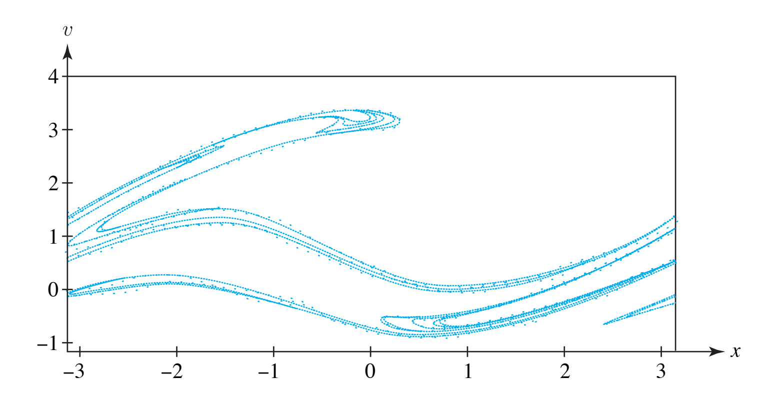


Figura 5.43 Sección de Poincaré para la ecuación del péndulo forzado (8) con $b = 0.22$ y $F = 2.7$

En un experimento físico, nunca podemos reproducir con *exactitud* (con una precisión infinita) las mismas condiciones iniciales. En consecuencia, si el comportamiento es caótico, incluso una ligera diferencia en las condiciones iniciales puede llevar a valores bastante diferentes de la transformación de Poincaré correspondiente cuando n es grande. Tal comportamiento no ocurre para soluciones de la ecuación (4) o la ecuación (1) (véanse los problemas 6 y 7). Sin embargo, dos soluciones de la ecuación de Duffing (7) con $F = 0.5$ correspondientes a dos valores iniciales distintos pero cercanos tienen transformaciones de Poincaré que *no* permanecen cercanas entre sí. Aunque ambas son atraídas al mismo conjunto, sus posiciones con respecto de este conjunto pueden ser relativamente lejanas.

El fenómeno de caos también se puede ilustrar mediante la siguiente sencilla transformación. Sea x_0 en $[0, 1)$ y definamos

(9) $$x_{n+1} = 2x_n \ (\text{mod } 1) \ ,$$

donde (mod 1) indica la parte decimal del número si éste es mayor o igual a 1; es decir,

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n \ , & \text{para } 0 \le x_n < 1/2 \ , \\ 2x_n - 1 \ , & \text{para } 1/2 \le x_n < 1 \ . \end{cases}$$

Cuando $x_0 = 1/3$, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot (1/3) \ (\text{mod } 1) = 2/3 \ , \\ x_2 &= 2 \cdot (2/3) \ (\text{mod } 1) = 4/3 \ (\text{mod } 1) = 1/3 \ , \\ x_3 &= 2 \cdot (1/3) \ (\text{mod } 1) = 2/3 \ , \\ x_4 &= 2 \cdot (2/3) \ (\text{mod } 1) = 1/3 \ , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

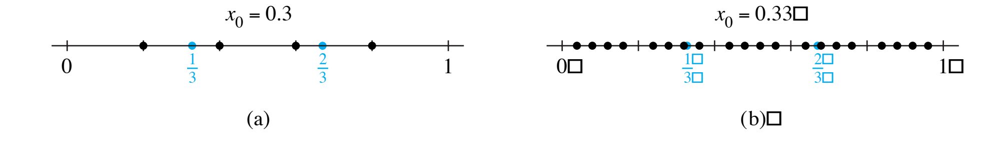
En forma de sucesión, obtenemos $\{1/3, 2/3, \overline{1/3, 2/3}, \ldots\}$, donde la barra indica el patrón que se repite.

¿Qué ocurre si elegimos un valor de partida x_0 cercano a $1/3$? ¿Se acumula la sucesión en torno de $1/3$ y $2/3$ como lo hace la transformación cuando $x_0 = 1/3$? Por ejemplo, para $x_0 = 0.3$, obtenemos la sucesión

$$\{0.3, 0.6, 0.2, 0.4, 0.8, \overline{0.6, 0.2, 0.4, 0.8}, \ldots\} \ .$$

En la figura 5.44 graficamos los valores de x_n para $x_0 = 0.3$, 0.33, y 0.333. No hemos graficado los primeros términos, sino sólo aquellos que se repiten. (Esta omisión de los primeros términos se parece a la situación de la figura 5.41, donde aparecen soluciones transitorias).

La figura 5.44 muestra claramente que aunque los valores correspondientes a x_0 se acercan cada vez más a $1/3$, las transformaciones correspondientes se diseminan en todo el intervalo $[0, 1]$ y *no* se acumulan cerca de $1/3$ y $2/3$. Este comportamiento es caótico, pues las transfor-



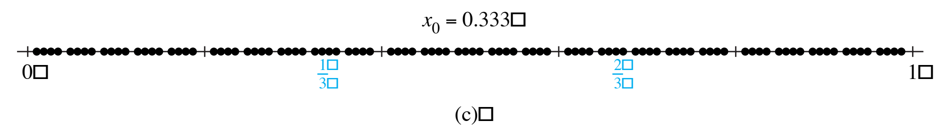


Figura 5.44 Gráficas de la transformación $x_{n+1} = 2x_n(\text{mod } 1)$ para $x_0 = 0.3$, 0.33, y 0.333

maciones de Poincaré para valores iniciales cercanos a $1/3$ se comportan de manera bastante diferente a la transformación para $x_0 = 1/3$. De haber elegido a x_0 como irracional (lo que no podemos hacer con una calculadora), la sucesión *no* se repetiría y sería densa en $[0, 1]$.

Los sistemas que exhiben un comportamiento caótico surgen en muchas aplicaciones. El reto para los ingenieros consiste en diseñar sistemas que eviten este caos y que, por el contrario, disfruten de la propiedad de **estabilidad**.

EJERCICIOS 5.7

Para los problemas de esta sección se necesita un paquete de software que permita construir transformaciones de Poincaré.

1. Calcule y grafique los puntos de la transformación de Poincaré con $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots, 20$ para la ecuación (1) haciendo $A = F = 1$, $\phi = 0$, y $\omega = 3/2$.Repita el proceso haciendo $\omega = 3/5$. ¿Cree que la ecuación tendrá una solución con periodo 2π para cada elección de ω? ¿Tendrá una solución subarmónica?

2. Calcule y grafique los puntos de la transformación de Poincaré con $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots, 20$ para la ecuación (1) haciendo $A = F = 1$, $\phi = 0$, y $\omega = 1/\sqrt{3}$. Describa el conjunto límite para este sistema.

3. Calcule y grafique los puntos de la transformación de Poincaré con $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots, 20$ para la ecuación (4) haciendo $A = F = 1$, $\phi = 0$, $\omega = 1$, y $b = -0.1$. ¿Qué sucede con estos puntos cuando $n \to \infty$?

4. Calcule y grafique la transformación de Poincaré con $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots, 20$ para la ecuación (4) haciendo $A = F = 1$, $\phi = 0$, $\omega = 1$, y $b = 0.1$. Describa el atractor para este sistema.

5. Calcule y grafique la transformación de Poincaré con $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots, 20$ para la ecuación (4) haciendo $A = F = 1$, $\phi = 0$, $\omega = 1/3$, y $b = 0.22$. Describa el atractor para este sistema.

6. Muestre que para $b > 0$, la transformación de Poincaré para la ecuación (4) no es caótica, mostrando que cuando t crece,

$$x_n = x(2\pi n) \approx \frac{F}{\sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + b^2}} \operatorname{sen}(2\pi n + \theta) \ ,$$

$$v_n = x'(2\pi n) \approx \frac{F}{\sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + b^2}} \cos(2\pi n + \theta)$$

de manera independiente a los valores $x_0 = x(0)$ y $v_0 = x'(0)$.

7. Muestre que la transformación de Poincaré para la ecuación (1) no es caótica, mostrando que si (x_0, v_0) y (x_0^*, v_0^*) son dos valores iniciales que definen las transformaciones de Poincaré $\{(x_n, v_n)\}$ y $\{(x_n^*, v_n^*)\}$, respectivamente, usando las formulas recursivas en (3), entonces es posible hacer la distancia entre (x_n, v_n) y (x_n^*, v_n^*) tan pequeña como se quiera, haciendo pequeña la distancia entre (x_0, v_0) y (x_0^*, v_0^*). [*Sugerencia*: Sean (A, ϕ) y (A^*, ϕ^*) las coordenadas polares de dos puntos en el plano. La ley de los cosenos implica que la distancia d entre ellos está dada por $d^2 = (A - A^*)^2 + 2AA^*[1 - \cos(\phi - \phi^*)]$].

8. Considere las transformaciones de Poincaré definidas en (3) con $\omega = \sqrt{2}$, $A = F = 1$, y $\phi = 0$. Si esta transformación llega a repetirse, entonces para cualesquiera dos enteros positivos n y m, sen $(2\sqrt{2}\pi n) = \operatorname{sen}(2\sqrt{2}\pi m)$. Use propiedades básicas de la función seno para mostrar que esto implicaría que $\sqrt{2}$ es racional. Esta contradicción muestra que los puntos de la transformación de Poincaré no se repiten.

9. La transformación de duplicación módulo 1 definida mediante la ecuación (9) exhibe un comportamiento fascinante. Calcule la sucesión obtenida cuando

(a) $x_0 = k/7$ para $k = 1, 2, \ldots, 6$.

(b) $x_0 = k/15$ para $k = 1, 2, \ldots, 14$.

(c) $x_0 = k/2^j$, donde j es un entero positivo y $k = 1, 2, \ldots, 2^j - 1$.

Los números de la forma $k/2^j$ se llaman **números diádicos** y son densos en $[0, 1]$. Es decir, hay un

número diádico arbitrariamente cerca de cualquier número real (racional o irracional).

10. Para mostrar que el conjunto límite de la transformación de Poincaré dada en (3) depende de los valores iniciales, realice lo siguiente:

(a) Muestre que cuando $\omega = 2$ o 3, la transformación de Poincaré consta del único punto

$$(x, v) = \left(A \operatorname{sen} \phi + \frac{F}{\omega^2 - 1} \ , \quad \omega A \cos \phi \right) \ .$$

(b) Muestre que cuando $\omega = 1/2$, la transformación de Poincaré alterna entre los dos puntos

$$\left(\frac{F}{\omega^2 - 1} \pm A \operatorname{sen} \phi \ , \quad \pm\, \omega A \cos \phi \right) \ .$$

(c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para mostrar que cuando $\omega = 2, 3$ o $1/2$ la transformación de Poincaré (3) depende de los valores iniciales (x_0, v_0).

11. Para mostrar que el conjunto límite de la transformación de Poincaré $x_n := x(2\pi n)$, $v_n := x'(2\pi n)$, donde $x(t)$ es una solución de la ecuación (6), es una elipse y que esta elipse es la misma para cualesquiera valores iniciales x_0, v_0, realice lo siguiente:

(a) Justifique que como los valores iniciales sólo afectan a la solución transitoria de (6), el conjunto límite de la transformación de Poincaré es independiente de los valores iniciales.

(b) Ahora, muestre que para n grande,

$$x_n \approx a \operatorname{sen}(2\sqrt{2}\pi n + \psi) \ ,$$
$$v_n \approx c + \sqrt{2}a \cos(2\sqrt{2}\pi n + \psi) \ ,$$

donde $a = (1 + 2(0.22)^2)^{-1/2}$, $c = (0.22)^{-1}$, y $\psi = \arctan\{-[(0.22)\sqrt{2}]^{-1}\}$.

(c) Use el resultado de la parte (b) para concluir que la elipse

$$x^2 + \frac{(v - c)^2}{2} = a^2$$

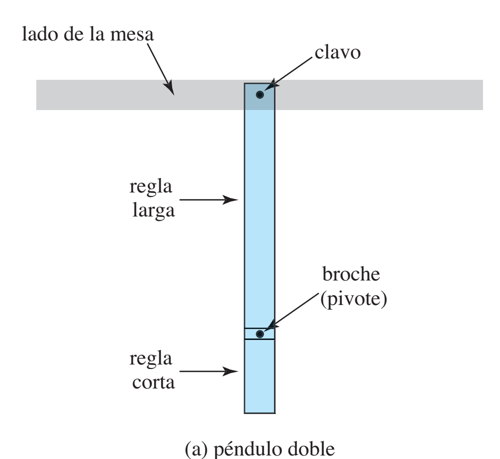
contiene al conjunto límite de la transformación de Poincaré.

12. Use un esquema numérico como Runge-Kutta o un paquete de software para calcular la transformación de Poincaré de la ecuación (7) cuando $b = 0.3$, $\gamma = 1.2$, y $F = 0.2$. (Observe que al acercarse al punto límite, la parte transitoria se extingue más rápidamente). Compare su transformación con la figura 5.40(a) de la página 296. Repita el proceso para $F = 0.28$.

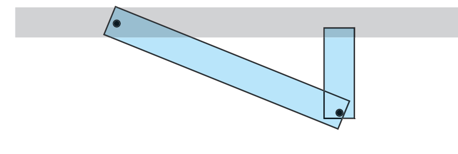
13. Repita el problema 12 con $F = 0.31$. ¿Qué tipo de comportamiento exhibe la solución?

14. Repita el problema 12 con $F = 0.65$. ¿Qué tipo de comportamiento exhibe la solución?

15. Máquina de caos. El caos se puede ilustrar mediante dos reglas de distinto tamaño, un clavo y un broche que sirva como pivote. Construya el péndulo doble, como se muestra en la figura 5.45(a). El péndulo se pone en movimiento liberándolo desde una posición como se muestra en la figura 5.45(b). Ponga el péndulo en movimiento varias veces, tratando de liberarlo siempre desde la misma posición. Registre el número de veces que la regla más corta gira, así como la dirección en que se ha movido. Si el péndulo se liberó *exactamente* desde la misma posición cada vez, entonces el movimiento debería ser el mismo. Sin embargo, sus experimentos le mostrarán que aunque comience muy cerca de la misma posición, obtendrá movimientos muy distintos. Este péndulo doble exhibe un comportamiento caótico.



(a) péndulo doble



(b) posición de liberación

Figura 5.45 Péndulo doble como una máquina de caos

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Los sistemas de ecuaciones diferenciales surgen en el estudio de osciladores masa-resorte acoplados, circuitos eléctricos, modelos ecológicos y muchas otras áreas.

Los sistemas lineales con coeficientes constantes pueden resolverse de manera explícita usando una variante del **método de eliminación de Gauss**. Para esto, primero escribimos el sistema con notación de operadores, usando $D := d/dt$, $D^2 := d^2/dt^2$, etcétera. Un sistema de dos ecuaciones con dos funciones incógnitas asume entonces la forma

$$L_1[x] + L_2[y] = f_1 \ , \qquad L_3[x] + L_4[y] = f_2 \ ,$$

donde L_1, L_2, L_3 y L_4 son expresiones polinomiales en términos de D. Al aplicar L_4 a la primera ecuación, L_2 a la segunda y restar, obtenemos una única ecuación (por lo general de orden superior) en términos de $x(t)$, a saber,

$$(L_4L_1 - L_2L_3)[x] = L_4[f_1] - L_2[f_2] \ .$$

Luego hallamos $x(t)$ a partir de esta ecuación con coeficientes constantes. De manera análoga, podemos eliminar x del sistema para obtener una única ecuación para $y(t)$, la que también podemos resolver. Este procedimiento introduce ciertas constantes extrañas, pero al sustituir las expresiones para x y y de nuevo en una de las ecuaciones originales, podemos determinar las relaciones entre estas constantes.

Un paso previo a la aplicación de algoritmos numéricos para resolver sistemas o ecuaciones de orden superior consiste en escribirlos como un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden en **forma normal**:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \ , \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \ , \\ &\vdots \\ x_m'(t) &= f_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Por ejemplo, al hacer $v = y'$, podemos reescribir la ecuación de segundo orden $y'' = f(t, y, y')$ como el sistema normal

$$\begin{aligned} y' &= v \ , \\ v' &= f(t, y, v) \ . \end{aligned}$$

El sistema normal (1) tiene la apariencia de una versión vectorizada de una sola ecuación de primer orden, y como tal sugiere la forma de generalizar los algoritmos numéricos como Euler y Runge-Kutta.

Una técnica para el estudio del comportamiento cualitativo de soluciones del **sistema autónomo**

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \ , \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2}$$

es el análisis del plano fase. Primero hallamos los **puntos críticos** de (2), a saber, los puntos (x_0, y_0) donde

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad g(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Las parejas solución constantes correspondientes $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$ son las **soluciones de equilibrio** de (2). Luego bosquejamos el campo de direcciones para la **ecuación en el plano fase**

$$\textbf{(3)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

con las flechas de dirección adecuadas (orientadas por el signo de dx/dt o dy/dt). A partir de esto, por lo general podemos conjeturar las características cualitativas de las soluciones y de los puntos críticos, como la estabilidad y el comportamiento asintótico. Es común usar paquetes de software para visualizar las curvas solución de (3), que contienen a las **trayectorias** del sistema (2).

Los sistemas no autónomos se pueden estudiar considerando una **transformación de Poincaré** para el sistema. Tal transformación permite detectar soluciones periódicas o subarmónicas y estudiar sistemas cuyas soluciones exhiben un comportamiento caótico.

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 4, determine una solución general $x(t)$, $y(t)$ para el sistema dado.

1. $x' + y'' + y = 0$,
$x'' + y' = 0$

2. $x' = x + 2y$,
$y' = -4x - 3y$

3. $2x' - y' = y + 3x + e^t$,
$3y' - 4x' = y - 15x + e^{-t}$

4. $x'' + x - y'' = 2e^{-t}$,
$x'' - x + y'' = 0$

En los problemas 5 y 6, resuelva el problema con valores iniciales dado.

5. $x' = z - y$; $x(0) = 0$,
$y' = z$; $y(0) = 0$,
$z' = z - x$; $z(0) = 2$.

6. $x' = y + z$; $x(0) = 2$,
$y' = x + z$; $y(0) = 2$,
$z' = x + y$; $z(0) = -1$.

7. Para el problema de los tanques interconectados de la sección 5.1, página 239, suponga que en vez de introducir agua pura en el tanque A, se usa una solución salina con concentración de 0.2 kg/litro; los demás datos no cambian. Determine la masa de sal en cada tanque en el instante t, si las masas iniciales son $x_0 = 0.1$ kg y $y_0 = 0.3$ kg.

En los problemas 8 a 11, escriba la ecuación o sistema de orden superior dado en una forma normal equivalente (véase la sección 5.3).

8. $2y'' - ty' + 8y = \operatorname{sen} t$

9. $3y''' + 2y' - e^t y = 5$

10. $x'' - x + y = 0$,
$x' - y + y'' = 0$

11. $x''' + y' + y'' = t$,
$x'' - x' + y''' = 0$

En los problemas 12 y 13, resuelva la ecuación en el plano fase para el sistema dado. Luego bosqueje a mano varias trayectorias representativas (con sus flechas de flujo) y describa la estabilidad de los puntos críticos (es decir, compare con la figura 5.12, página 268).

12. $x' = y - 2$,
$y' = 2 - x$.

13. $x' = 4 - 4y$,
$y' = -4x$.

14. Determine todos los puntos críticos y una ecuación para las curvas integrales del sistema

$$x' = \operatorname{sen} x \cos y \ ,$$
$$y' = \cos x \operatorname{sen} y \ .$$

En los problemas 15 y 16, bosqueje algunas trayectorias típicas para el sistema dado, y compare con la figura 5.12, página 268, para identificar el tipo de punto crítico en el origen.

15. $x' = -2x - y$,
$y' = 3x - y$

16. $x' = -x + 2y$,
$y' = x + y$

17. Explique la diferencia entre las *curvas integrales* y las *trayectorias* de un sistema autónomo.

18. En el sistema masa-resorte acoplado de la figura 5.20, página 277, haga cada masa igual a 1 kg y sean $k_1 = 8$ N/m y $k_2 = 3$ N/m. ¿Cuáles son las frecuencias angulares naturales del sistema? ¿Cuál es la solución general?

19. En el circuito eléctrico de la figura 5.46, haga $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$, $C = 1$ F, y $L = 1$ H. deduzca tres ecuaciones para las corrientes incógnitas I_1, I_2, e I_3 escribiendo la ley del voltaje de Kirchhoff para los lazos 1 y 2 y la ley de la corriente de Kirchhoff para la unión superior. Determine la solución general.

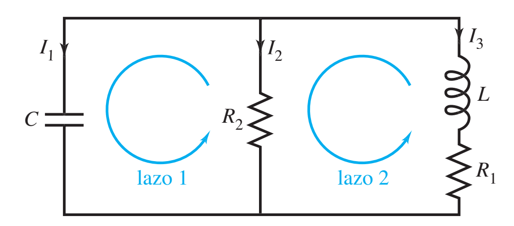


Figura 5.46 Circuito eléctrico para el problema 19

PROYECTOS DE GRUPO PARA EL CAPÍTULO 5

A. El crecimiento de un tumor

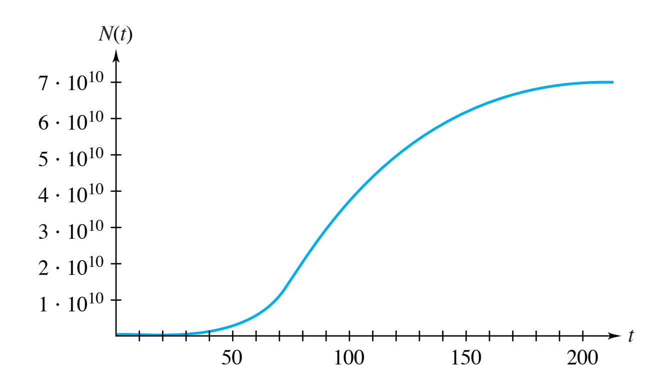
Glenn Webb, Vanderbilt University

En 1825, John Gompertz publicó una ley empírica para la mortalidad de la población humana. En terminología moderna, esta ley proponía que la población de muchas comunidades está dada por

$$\textbf{(1)} \qquad N(t) = ke^{ae^{-bt}} .$$

donde t denota el tiempo, $N(t)$ es la población total y k, a y b son constantes reales, k y b positivas.

(a) Trace las gráficas de varias curvas de crecimiento de Gompertz para distintas elecciones de las constantes k, a y b. Observe que las curvas tienen una forma característica de S, de modo que la primera fase de crecimiento es muy rápida y posteriormente es cada vez más lenta. La figura 5.47 muestra un ejemplo.



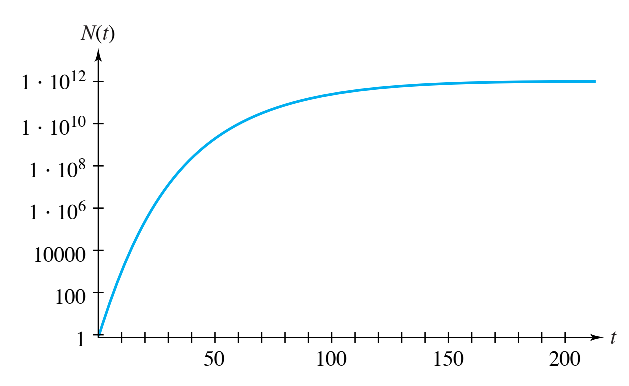


Figura 5.47 Una ley de crecimiento de Gompertz con $k = 7.2 \times 10^{10}$, $a = -25.0$, y $b = 0.04$. Se dan las gráficas en escalas absoluta y logarítmica

El crecimiento de muchos tumores sólidos también parece seguir el crecimiento de Gompertz, aunque no es obvio por qué los tumores deberían cumplir esta ley. Se han propuesto varios mecanismos para explicar el crecimiento de Gompertz de los tumores.† Uno de tales mecanismos utiliza la presencia de células quiescentes dentro de un tumor para explicar el comportamiento característico de Gompertz. Una célula quiescente no avanza en el ciclo celular sino que queda en un estado de reposo. Las células quiescentes pueden salir del reposo, volver al ciclo celular e incluso desarrollar la división celular. Algunas células quiescentes pueden reiniciar su ciclo después de años de letargo. En muchos tumores, una parte considerable de células son quiescentes. En la geometría del tumor, se sabe que las células alejadas de un vaso sanguíneo tienen mayor probabilidad de ser quiescentes que las cercanas a los vasos. También se sabe que la razón con que las células quiescentes vuelven a proliferar decrece al aumentar el tamaño del tumor.

Un modelo para explicar el crecimiento de Gompertz utiliza estas propiedades como mecanismo. Las células dentro del tumor están proliferando o están quiescentes. Sea $P(t)$ la población de células proliferantes y $Q(t)$ la población de células quiescentes en el instante t. Las células proliferantes pasan por el ciclo celular hacia la mitosis, aunque pueden volverse quiescentes con una razón que depende del tamaño total $N(t) \coloneqq P(t) + Q(t)$ del tumor. Se supone que mientras mayor sea el tumor, mayor será la probabilidad de que las células proliferantes se conviertan en quiescentes y menor la probabilidad de que las células quiescentes se conviertan en proliferantes. Las células quiescentes no pueden dividirse, pero pueden transitar a la clase proliferante. Las funciones $P(t)$ y $Q(t)$ satisfacen el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

(2) $$P'(t) = \left\{\beta - \mu_P - r_o[N(t)]\right\}P(t) + r_i[N(t)]Q(t) \ ,$$

(3) $$Q'(t) = r_o[N(t)]P(t) - \left\{r_i[N(t)] + \mu_Q\right\}Q(t) \ ,$$

(4) $$P(0) = P_0 \ , \qquad Q(0) = Q_0 \ .$$

Aquí, β es la tasa de división de las células proliferantes, μ_P es la tasa de mortalidad de las células proliferantes, μ_Q es la tasa de mortalidad de las células quiescentes, $r_o(N)$ es la razón con que las células proliferantes se convierten en quiescentes y $r_i(N)$ es la razón con que las células quiescentes vuelven a su ciclo. Se supone que β es una constante positiva; μ_P, y μ_Q son constantes no negativas; $r_o(N)$ es una función continua no negativa no decreciente de N y $r_i(N)$ es una función continua no negativa no creciente de N.

(b) Sean $\beta > 0$, $\mu_P \geq 0$, $\mu_Q = 0$, $r_i(N) = 0$ y $r_o(N) = b[1 + \ln(N)]$, donde $b > 0$ y $\beta > \mu_P$. Sean $P_0 = 1$ y $Q_0 = 0$. Haga $c = \beta - \mu_P$. Verifique que en este caso las ecuaciones (2) y (3) implican que $N(t) = P(t) + Q(t)$ satisface

(5) $$dN/dt = cP$$

y que

(6) $$\frac{dP}{dN} = \frac{c - b - b\ln(N)}{c} \ .$$

[*Sugerencia:* $dN/dP = 1 + dQ/dP$].

Verifique que $N(t) = P(t) + Q(t)$ tiene la forma (1) con $k = e^{c/b}$ y $a = -c/b$. Así, la población total de células tumorosas tiene crecimiento de Gompertz. Se supone que un tumor crece a partir de una sola célula maligna.

†Para un análisis detallado de este modelo, véase M. Gyllenberg y G. F. Webb, "Quiescence as an Explanation of Gompertzian Tumor Growth", *Development and Aging*, vol. 53 (1989): 25-33.

(c) Despeje P en la ecuación (6) como función de N usando las condiciones iniciales en la parte (b) para obtener

$$P = N - \frac{b}{c} N \ln(N)$$

y combine esta fórmula con (5) para deducir que N satisface la *ecuación de Gompertz*

(7) $$N'(t) = N(t)\left\{c - b \ln\left[N(t)\right]\right\} \ .$$

Use el método para ecuaciones separables y resuelva (7). Muestre entonces que $N(t)$ tiene la forma (1) con $k = e^{c/b}$ y $a = -c/b$. Así, la población total de células tumorosas tiene crecimiento de Gompertz. (Se supone que un tumor crece a partir de una sola célula maligna).

(d) Use los resultados de la parte (c) para mostrar que la solución al sistema (2) – (4) para el caso de la parte (b) está dada por

$$P(t) = \exp\left\{\frac{c\left[1 - \exp(-bt)\right]}{b} - bt\right\} \ ,$$

$$Q(t) = \exp\left\{\frac{c\left[1 - \exp(-bt)\right]}{b} - bt\right\}\left[\exp(bt) - 1\right] \ .$$

(e) La *fracción de crecimiento* $G(t)$ se define como la fracción de células proliferantes en la población de células tumorosas en el instante t: $G(t) = P(t)/N(t)$. Demuestre que $G(t)$ es una función decreciente monótona de t, para el caso de la parte (b). Grafique las funciones $P(t)$, $Q(t)$, $N(t)$ y $G(t)$ para el caso de la parte (b) con $c = 1.0$ y $b = 0.04$.

Los parámetros y las tasas de transición anteriores proporcionan el crecimiento de Gompertz para la población total de células tumorosas. Al elegir otros parámetros y tasas de transición se obtienen más curvas similares con forma de S, que no necesariamente son de Gompertz.

(f) Determine otros parámetros β, μ_P, μ_Q, y tasas de transición $r_o(N)$ y $r_i(N)$ para el modelo (2) – (4) de modo que la población total de células $N(t)$ tiene una gráfica con forma de S similar al crecimiento de Gompertz. Muestre que si $r_o(N) = s + bN$ y $r_i(N) = 0$, entonces $N(t)$ puede tener crecimiento logístico (sección 3.2).

B. Diseño de un sistema de aterrizaje para un viaje interplanetario

Alfred Clark, Jr., Universidad de Rochester

Usted es un cadete de segundo año de la Academia Espacial, a bordo del *Enterprise*, que realiza un estudio a largo plazo del sistema estelar Glia. El objeto de estudio en la expedición actual es el gran planeta Glia 4, sin aire. Se enviará una sonda con un sensor de clase 1, con masa m, a la superficie del planeta para reunir datos. La sonda tiene un sistema de aterrizaje ajustable, para poderse usar en planetas con gravedades distintas. El sistema consta de un resorte lineal (fuerza $= -kx$, donde x es el desplazamiento), un resorte no lineal (fuerza $= -ax^3$) y un amortiguador (fuerza $= -b\dot{x}$),† todos en paralelo. La figura 5.48 muestra un esquema del sis-

†El símbolo $\dot{x}$ denota dx/dt.

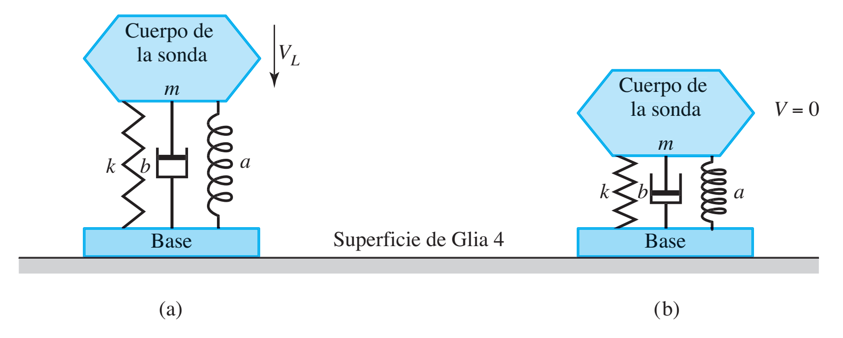


Figura 5.48 Esquema del sistema de aterrizaje de una sonda. (a) El sistema al momento del impacto. Los resortes no están estirados ni comprimidos, los propulsores se han apagado y la velocidad es V_L hacia abajo. (b) La sonda ha alcanzado un estado de reposo sobre la superficie, y los resortes se han comprimido lo suficiente para soportar el peso. Entre los estados (a) y (b), la sonda oscila con respecto de su base.

tema. Durante el proceso de aterrizaje, los propulsores se usan para crear una razón de descenso constante. La velocidad al momento del impacto varía; usamos el símbolo V_L para denotar la máxima velocidad que podría ocurrir en la práctica. Al momento del impacto, (1) el propulsor se apaga y (2) los resortes de suspensión tienen su longitud natural sin estirar.

(a) Sea x el desplazamiento medido desde la longitud sin estirar de los resortes, negativo hacia abajo (es decir, la compresión proporciona una x negativa). Muestre que la ecuación que describe las oscilaciones después del impacto es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + ax^3 = -mg \ .$$

(b) La sonda tiene una masa $m = 1{,}220$ kg. El resorte lineal está instalado de manera permanente y tiene una rigidez $k = 35{,}600$ N/m. La gravedad en la superficie de Glia 4 es $g = 17.5$ m/seg^2. El resorte no lineal es removible; hay que elegir un resorte adecuado para cada misión. Estos resortes no lineales están hechos de coralidio, una aleación rara y difícil de fabricar. Por lo tanto, el *Enterprise* sólo lleva consigo cuatro diferentes tipos: $a = 150\,000$, 300 000, 450 000 y 600 000 N/m^3. Determine qué resortes proporcionan una compresión lo más cercana posible a 0.3 m sin exceder 0.3 m cuando la nave reposa sobre la superficie de Glia 4. (El límite de 0.3 m es impuesto por requisitos de espacio libre).

(c) El otro componente ajustable en el sistema de aterrizaje es el amortiguador lineal, que puede ajustarse en incrementos de $\Delta b = 500$ N-s/m, desde un valor mínimo de 1000 N-s/m. Es recomendable que b sea lo más pequeño posible, pues una b grande produce fuerzas grandes en el impacto. Sin embargo, si b es demasiado pequeño, hay cierto riesgo de que la sonda rebote después del impacto. Para minimizar la posibilidad de que esto ocurra, determine el menor valor de b tal que los resortes siempre estén comprimidos durante las oscilaciones posteriores al impacto. Use una velocidad mínima de impacto $V_L = 5$ m/s hacia abajo. Para determinar este valor de b, necesitará un paquete de software para integrar la ecuación diferencial.

C. Objetos que flotan

Richard Bernatz, Luther College

El movimiento de los objetos que tienen formas diferentes y flotan en una piscina puede modelarse mediante una ecuación diferencial de segundo orden que se deduce de la segunda ley de movimiento de Newton, $F = ma$. Las fuerzas que actúan sobre el objeto incluyen la fuerza

debida a la gravedad, una fuerza de fricción debida al movimiento del objeto en el agua, y una fuerza de flotación basada en el **principio de Arquímedes**: un objeto total o parcialmente sumergido en un fluido recibe una fuerza (de flotación) hacia arriba igual al peso del agua que desplaza.

(a) El primer paso consiste en escribir la ecuación diferencial que describe el movimiento. La variable dependiente es la profundidad z del punto más bajo del objeto en el agua. Consideremos a z negativa hacia abajo, de modo que $z = -1$ indica que un pie del objeto está sumergido. Sean $V(z)$ el volumen sumergido del objeto, m la masa del objeto, ρ la densidad del agua (en libras por pie cúbico), g la aceleración debida a la gravedad y γ_w el coeficiente de fricción para el agua. Si la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad vertical del objeto, escriba la ecuación diferencial ordinaria que describe la situación.

(b) Por el momento, desprecie el efecto de la fricción y suponga que el objeto es un cubo que mide L pies por lado. Escriba la ecuación diferencial correspondiente a este caso. A continuación, designe $z = l$ como la profundidad de la sumersión, de modo que la fuerza de flotación sea igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza de gravedad. Introduzca una nueva variable, ζ, que proporciona el desplazamiento del objeto a partir de su posición de equilibrio l (es decir, $z = \zeta + l$). Ahora podrá escribir la ecuación diferencial ordinaria de una manera más familiar. [*Sugerencia*: Recuerde el sistema masa-resorte y el caso de equilibrio]. Ahora deberá reconocer el tipo de solución para este problema. ¿Cuál es la frecuencia natural?

(c) Aquí analizará el efecto de la fricción. El objeto que flota es un cubo, con un pie por lado y peso de 32 libras. Sean $\gamma_w = 3$ lb-s/pie, $\rho = 62.57$ lb/pie^3 y suponga que el objeto está colocado inicialmente sobre la superficie del agua. Resuelva la ecuación diferencial correspondiente, a mano, hallando la solución general. A continuación, determine la solución particular para el caso en que el cubo se coloca inicialmente sobre la superficie del agua y su velocidad inicial es nula. Proporcione una gráfica de la posición del objeto como función del tiempo t.

(d) En este paso del proyecto usted desarrollará una solución numérica del mismo problema presentado en la parte (c). La solución numérica será útil (de hecho, necesaria) para las demás partes del proyecto. Este caso proporciona una forma de verificar que su solución numérica es correcta. Regrese a la ecuación diferencial ordinaria original que desarrolló en la parte (a). Use los valores de los parámetros dados en la parte (c) y resuelva el problema con valores iniciales para el cubo que comienza en la superficie, con velocidad inicial nula. Para resolver este problema en forma numérica, deberá escribir la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, una para la posición vertical z y otra para la velocidad vertical w. Grafique sus resultados para la posición vertical como función del tiempo t, para los primeros 3 o 4 segundos y compare con la solución analítica determinada en la parte (c). ¿Se parecen? ¿Qué debería hacer para comparar estas soluciones? Proporcione una gráfica de las soluciones analítica y numérica en el mismo plano de coordenadas.

(e) Suponga que una esfera de radio R se deja flotar en el agua. Deduzca la ecuación de segundo orden que describe el movimiento de la esfera, usando el principio de Arquímedes y una fricción debido a su movimiento en el agua. Suponga que una esfera pesa 32 libras, tiene un radio de $1/2$ pie y $\gamma_w = 3.0$ lb-s/pie. Determine el valor límite de la posición de la esfera sin resolver la ecuación diferencial ordina-

ria. A continuación, resuelva la ecuación diferencial ordinaria para la velocidad y posición de la esfera como funciones del tiempo, para una esfera colocada sobre la superficie del agua. Deberá escribir la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para la velocidad y otra para la posición. ¿Cuál es la posición límite de la esfera para su solución? ¿Coincide con la solución de equilibrio que halló antes? ¿Cuál es su relación con la posición de equilibrio del cubo? En caso de que sean distintas, explique por qué.

(f) Suponga que la esfera de la parte (d) es una pelota de voleibol. Calcule la posición de la esfera como función del tiempo t para los primeros 3 segundos, si la pelota está sumergida, de modo que su punto más bajo esté 5 pies bajo el agua. ¿Saldrá la pelota del agua? ¿Qué tan alto saldrá? A continuación, calcule la trayectoria de la pelota para profundidades iniciales menores que 5 pies y mayores que 5 pies. Proporcione las gráficas de la velocidad y la posición para cada caso y comente sus observaciones. En particular, comente acerca de la relación entre la profundidad inicial de la pelota y la altura máxima que puede alcanzar.

Tal vez quiera arrojar una pelota de voleibol en una alberca para reunir datos reales y verificar o mejorar su modelo. En tal caso, haga un reporte con los datos hallados y explique la forma en que los utilizó para verificar y mejorar su modelo.

D. Soluciones periódicas de los sistemas de Volterra-Lotka

El modelo presa-depredador de Volterra-Lotka fue analizado en la sección 5.3 (página 251). Sean $x(t)$ y $y(t)$ las poblaciones de las presas y los depredadores (digamos, conejos y zorros), respectivamente. Para simplificar la exposición, supongamos que hemos elegido las unidades de modo que $A = B = C = D = 1$ en el modelo, que escribimos como

(8)
$$\begin{aligned} x' &= x - xy \ , \\ y' &= -y + xy \ . \end{aligned}$$

(a) Muestre que $(0, 0)$ y $(1, 1)$ son los únicos puntos críticos de (8).

(b) Grafique el campo de direcciones en el plano fase (véase la sección 5.4) para las trayectorias de (8). [*Sugerencia*: El campo de direcciones para la ecuación en el plano fase

(9)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$$

es fácil de graficar a lo largo de las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, y $y = 1$. Puede utilizar un paquete de software si quiere graficar a lo largo de otras rectas].

El campo de direcciones sugiere que el equilibrio en $(1, 1)$ es un centro o una espiral (estable o inestable). La distinción es muy importante para los biólogos. Si es una espiral estable, entonces es de esperar que cualquier distribución inicial de la población se estabilice, a largo plazo, en $(1, 1)$ (en estas unidades). Si es una espiral inestable, ¡entonces habrá una explosión demográfica de zorros y conejos! Y si es un centro estable, entonces las poblaciones serán periódicas, con muchos conejos algunos años y sólo unos cuantos conejos en otros años, cambiando en forma perpetua de un lado a otro. Así, es importante establecer la naturaleza exacta del equilibrio.

(c) Resuelva la ecuación (9) separando variables y muestre que el resultado se puede llevar a la forma

$$(xe^{-x})(ye^{-y}) = C \ . \tag{10}$$

Observe que la fórmula (10) para las curvas integrales implica que éstas son simétricas con respecto de la recta $y = x$.

(d) Debemos decidir si estas curvas son espirales que tienden a $(1, 1)$ cuando $t \to +\infty$ o $t \to -\infty$. Use la gráfica de ue^{-u} en la figura 5.49 para justificar que la gráfica de la ecuación (10) no tiene puntos si $C > e^{-2}$ y que contiene un punto, $(1, 1)$, si $C = e^{-2}$. Así, las trayectorias en cuestión sólo surgen para $C < e^{-2}$.

(e) Use la figura 5.49 para justificar que el punto $(1, 1)$ *no puede* ser un punto límite de la trayectoria para C fijo $(C < e^{-2})$, pues cuando $y = 1$ la ecuación (10) sólo tiene dos soluciones $x_{mín}$ y $x_{máx}$ que satisfacen $xe^{-x} = Ce$, ambas distintas de $x = 1$.

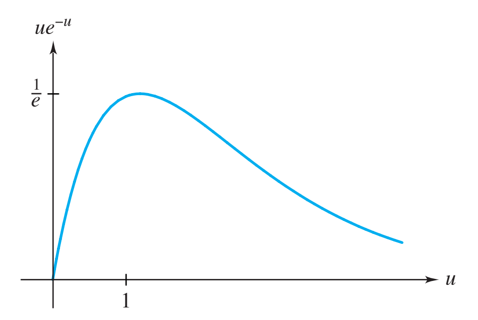


Figura 5.49 Gráfica def ue^{-u}

El bosquejo del plano fase nos lleva a concluir que el punto crítico $(1, 1)$ es un centro, las trayectorias son órbitas cerradas y las poblaciones varían en forma periódica.

E. Sistemas hamiltonianos

El problema en este proyecto explora la **formulación hamiltoniana**† de las leyes de movimiento de un sistema y sus implicaciones para el plano fase. Esta formulación reemplaza la segunda ley de Newton $F = ma = my''$ y se basa en tres consideraciones matemáticas:

(i) Se supone que la fuerza $F(t, y, y')$ depende sólo de y y tiene una antiderivada $-V(y)$, es decir, $F = F(y) = -dV(y)/dy$.

(ii) La variable de velocidad y' se reemplaza en todas partes por el momento $p = my'$ (de modo que $y' = p/m$).

†***Nota histórica:*** Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) fue un físico matemático irlandés. Además de su trabajo en mecánica, inventó los cuaternios y descubrió la ley anticonmutativa de los productos vectoriales.

(iii) **El hamiltoniano** del sistema se define como

$$H = H(y, p) = \frac{p^2}{2m} + V(y) \ .$$

(a) Exprese la ley de Newton $F = my''$ como un sistema equivalente de primer orden, en la manera descrita en la sección 5.3.

(b) Muestre que este sistema es equivalente a las **ecuaciones de Hamilton**

(11) $$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \left(= \frac{p}{m}\right) ,$$

(12) $$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad \left(= -\frac{dV}{dy}\right) .$$

(c) Use las ecuaciones de Hamilton y la regla de la cadena para mostrar que el hamiltoniano permanece constante a lo largo de las curvas solución:

$$\frac{d}{dt}H(y, p) = 0 \ .$$

En la fórmula para la función hamiltoniana $H(y, p)$, el primer término, $p^2/(2m) = m(y')^2/2$, es la **energía cinética** de la masa. Entonces, por analogía, el segundo término $V(y)$ se conoce como la **energía potencial** de la masa y el hamiltoniano es la energía total. La energía (mecánica)† total es constante (por tanto, "se conserva") cuando las fuerzas $F(y)$ no dependen del tiempo t ni la velocidad y'; tales fuerzas se llaman **conservativas**. El lema integral de la energía de la sección 4.7 (página 196) no es más que un enunciado alternativo de la conservación de la energía.

La formulación de Hamilton para los sistemas mecánicos y el principio de conservación de la energía implican que las trayectorias en el plano fase de sistemas conservativos están sobre las curvas donde el hamiltoniano $H(y, p)$ es constante; la graficación de estas curvas puede ser mucho más fácil que resolver las trayectorias en forma directa, lo que a su vez es más fácil que resolver el sistema original.

(d) Para el oscilador masa-resorte de la sección 4.1, la fuerza del resorte está dada por $F = -ky$ (donde k es la constante del resorte). Determine el hamiltoniano, exprese las ecuaciones de Hamilton y muestre que las trayectorias en el plano fase $H(y, p) =$ constante para este sistema son las elipses dadas por $p^2/(2m) + ky^2/2 =$ constante. Véase la figura 5.14, página 270.

La fuerza de **amortiguamiento** $-by'$ considerada en la sección 4.1 no es conservativa, por supuesto. Desde el punto de vista físico, sabemos que el amortiguamiento reduce la energía de un sistema hasta llevarlo a un alto en un punto de equilibrio. En el plano fase podemos describir de manera cualitativa la trayectoria como una migración continua a órbitas con energía constante cada vez menor; los centros estables se convierten en puntos espirales asintóticamente estables al tomar en cuenta el amortiguamiento.

†La física establece que al tomar en cuenta todas las formas de energía, como el calor y la radiación, la energía se conserva, aunque las fuerzas no sean conservativas.

(e) La segunda ecuación de Hamilton (12), que establece $p' = my'' = F$, debe cambiarse por

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial y} - by' = -\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{bp}{m}$$

cuando el amortiguamiento está presente. Muestre que el hamiltoniano disminuye a lo largo de trayectorias en este caso (para $b > 0$):

$$\frac{d}{dt}H(y, p) = -b\left(\frac{p}{m}\right)^2 = -b(y')^2 \ .$$

(f) En la sección 4.9 (página 218) se mostró que la fuerza en un sistema masa-resorte suspendido verticalmente en un campo gravitacional es $F = -ky + mg$. Deduzca el hamiltoniano y bosqueje las trayectorias en el plano fase. Bosqueje las trayectorias cuando hay amortiguamiento.

(g) Según lo indicado en la sección 4.7 (página 196), la fuerza de resorte de Duffing se modela mediante $F = -y - y^3$. Deduzca el hamiltoniano y bosqueje las trayectorias en el plano fase. Bosqueje las trayectorias cuando hay amortiguamiento.

(h) Para el sistema de péndulo estudiado en el ejemplo 8 de la sección 4.7, la fuerza está dada por (figura 4.18, página 204)

$$F = -\ell mg \text{ sen } \theta = -\frac{\partial}{\partial \theta}(-\ell mg \cos \theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta}V(\theta)$$

(donde ℓ es la longitud del péndulo). Para variables angulares, la formulación hamiltoniana pide expresar la *variable de velocidad angular* θ' *en términos del momento angular* $p = m\ell^2\theta'$; la energía cinética masa $\times$ velocidad$^2/2$, se expresa como $m(\ell\theta')^2/2 = p^2/(2m\ell^2)$. Deduzca el hamiltoniano para el péndulo y bosqueje las trayectorias en el plano fase. Bosqueje las trayectorias cuando hay amortiguamiento.

(i) El campo de fuerza de Coulomb es una fuerza que varía en forma proporcional al recíproco del cuadrado de la distancia al origen: $F = k/y^2$. La fuerza es *atractora* si $k < 0$ y *repulsora* si $k > 0$. Bosqueje las trayectorias en el plano fase para este movimiento. Bosqueje las trayectorias cuando hay amortiguamiento.

(j) Para un campo de fuerzas de Coulomb atractor, ¿cuál es la *velocidad de escape* para una partícula situada en una posición y? Es decir, ¿cuál es la mínima velocidad (dirigida hacia afuera) necesaria para que la trayectoria llegue a $y = \infty$?

F. Comportamiento extraño de especies en competencia. Parte I

Sean $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, las poblaciones de tres especies en competencia S_i. Suponga que estas especies tienen las mismas tasas de crecimiento y que la población máxima de cada especie soportable por el hábitat es la misma para las tres. (Suponemos que esta cantidad de población es la unidad). Además, suponga que la ventaja competitiva de S_1 sobre S_2 es la misma que tiene S_2 sobre S_3 y S_3 sobre S_1. Esta situación se modela mediante el sistema

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1(1 - p_1 - ap_2 - bp_3) \ , \\ p_2' &= p_2(1 - bp_1 - p_2 - ap_3) \ , \\ p_3' &= p_3(1 - ap_1 - bp_2 - p_3) \ , \end{aligned} \qquad \textbf{(13)}$$

donde a y b son constantes positivas.

(a) Muestre que el sistema (13) tiene cinco poblaciones (soluciones) de equilibrio correspondientes a los puntos críticos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y (δ, δ, δ), donde $\delta := (1 + a + b)^{-1}$.

(b) Estudie el sistema cuando $a = b = 0.5$. Como el sistema *no* es lineal, no podemos aplicar la técnica de la sección 5.2. El sistema tiene tres incógnitas, de modo que el análisis en el plano fase es mucho más complejo que el presentado en la sección 5.4. En vez de esto, desarrollaremos experimentos numéricos sobre el sistema para ver si podemos determinar el comportamiento de sus soluciones. Utilice un esquema como el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas (véase el apéndice E) para realizar estos experimentos. Use varios valores iniciales; en particular, valores cercanos a los puntos de equilibrio. Describa el comportamiento de las poblaciones cuando $t \to +\infty$.

(c) El sistema se comporta ligeramente diferente cuando $a = 0.5$ y $b = 2.0$. Realice experimentos numéricos para mostrar que la solución de este sistema tiende a una de las soluciones de equilibrio: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, luego se mueve hacia otra y luego hacia la tercera, de regreso a la primera, y así sucesivamente. Además, las soluciones se acercan cada vez más a estos puntos antes de moverse rápidamente al siguiente.

(d) Use los resultados de la parte (c) para justificar que "la mayor parte del tiempo",

$$p_1p_2 \approx 0 \ , \qquad p_2p_3 \approx 0 \ , \qquad p_1p_3 \approx 0 \ .$$

Además, $p_1 + p_2 + p_3 \approx 1$.

(e) Del sistema (13) con $a = 0.5$ y $b = 2.0$, deduzca las ecuaciones

$$\frac{dT}{dt} = T(1 - T) - \eta(p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3) \ ,$$
$$\frac{d \ln P}{dt} = -\eta + (3 + \eta)(1 - T) \ ,$$

donde $T := p_1 + p_2 + p_3$, $P := p_1p_2p_3$, y $\eta := a + b - 2 = 0.5$.

(f) Use los resultados de las partes (d) y (e) para mostrar que

$$\frac{dT}{dt} = T(1 - T) \ , \qquad \frac{d \ln P}{dt} = -\eta$$

son simplificaciones razonables.

(g) Resuelva las ecuaciones de la parte (f) y verifique que cuando $t \to +\infty$, la suma T tiende a 1 y el producto P tiende a cero.

Este sistema se estudiará con más detalle en el proyecto D del capítulo 9.

G. Limpieza de los Grandes Lagos

Un modelo matemático sencillo que permite determinar el tiempo necesario para limpiar los Grandes Lagos se puede desarrollar mediante un análisis múltiple por compartimentos.[†] En

[†]Para un análisis detallado de este modelo, véase *An Introduction to Mathematical Modeling*, por Edward A. Bender (Krieger, Nueva York, 1991), capítulo 8.

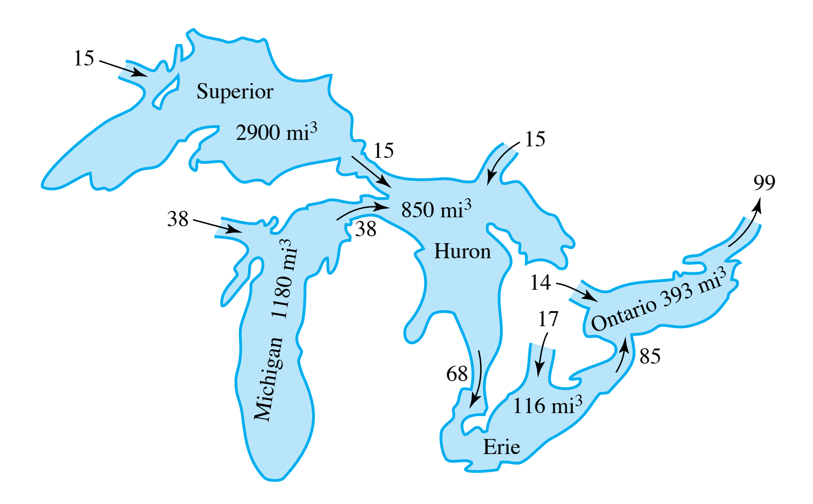


Figura 5.50 Modelo por compartimentos de los Grandes Lagos, con sus tasas de flujo (millas cúbicas/año) y volúmenes (millas cúbicas)

particular, podemos ver a cada lago como un tanque que contiene un líquido donde se ha disuelto un contaminante particular (DDT, fósforo, mercurio). En forma esquemática, podemos ver a los lagos como formados por cinco tanques unidos como se indica en la figura 5.50 de la página 314.

En nuestro modelo establecemos las siguientes hipótesis:

1. El volumen de cada lago permanece constante.
2. Las tasas de flujo son constantes en todo el año.
3. Cuando un líquido entra al lago, ocurre una mezcla perfecta y los contaminantes se distribuyen de manera uniforme.
4. Los contaminantes se disuelven en el agua y entran o salen por un flujo de la solución hacia fuera o hacia adentro.

Antes de usar este modelo para obtener estimaciones de los tiempos de limpieza para los lagos, consideremos algunos modelos más sencillos:

(a) Use las tasas de flujo de salida dadas en la figura 5.50 para determinar el tiempo necesario para "drenar" cada lago. Esto proporciona una cota inferior para el tiempo necesario para eliminar todos los contaminantes.

(b) Se obtiene una mejor estimación suponiendo que cada lago es un tanque independiente, donde *sólo* entra agua pura. Use este método para determinar el tiempo necesario para que el nivel de contaminación en cada lago se reduzca a 50% de su nivel original. ¿Cuánto tiempo se necesita para reducir la contaminación a 5% de su nivel original?

(c) Por último, para tomar en cuenta el hecho de que la contaminación de un lago fluye al siguiente lago de la cadena, use todo el modelo de varios compartimentos dado en la figura 5.50 para determinar el momento en que el nivel de contaminación en cada lago se haya reducido a 50% de su nivel original, suponiendo que la contaminación ha

cesado (es decir, los flujos hacia adentro no provenientes de un lago son de agua pura). Suponga que todos los lagos tienen en un principio la misma concentración de contaminantes p. ¿Cuánto tiempo se necesita para que la contaminación se reduzca a 5% de su nivel original?

Para un análisis detallado de este modelo, véase *An Introduction to Mathematical Modeling*, por Edward A. Bender (Krieger, Nueva York, 1991), capítulo 8.

CAPÍTULO 6

Teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En este capítulo analizaremos la teoría básica de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. El material es una generalización de los resultados obtenidos en el capítulo 4 para ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes. En los enunciados y demostraciones de estos resultados, usamos conceptos de un curso elemental de álgebra lineal; a saber, dependencia lineal, determinantes y métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Estos conceptos también surgen en el enfoque matricial para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales que se analiza en el capítulo 9, el cual incluye un breve repaso de ecuaciones algebraicas lineales y determinantes.

Como este capítulo está más orientado hacia las matemáticas (es decir, no está ligado a alguna aplicación física particular), utilizaremos la práctica común de llamar a la variable independiente "x" y a la variable dependiente "y".

6.1 TEORÍA BÁSICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Recuerde que una ecuación diferencial *lineal* de orden *n,* es una ecuación que se puede escribir en la forma

(1) $$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = b(x) ,$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$, . . . , $a_n(x)$ y $b(x)$ sólo depende de x, no de y. Cuando a_0, a_1, . . . , a_n son constantes, decimos que la ecuación (1) tiene **coeficientes constantes**; en caso contrario, tiene **coeficientes variables**. Si $b(x) \equiv 0$, se dice que la ecuación (1) es **homogénea**; en caso contrario, es **no homogénea**.

Para desarrollar una teoría básica, suponemos que $a_0(x)$, $a_1(x)$, . . . , $a_n(x)$ y $b(x)$ son continuas en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I. Entonces, al dividir entre $a_n(x)$ podemos reescribir (1) en la **forma canónica**

(2) $$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = g(x) ,$$

donde las funciones $p_1(x)$, . . . , $p_n(x)$ y $g(x)$ son continuas en I.

Para una ecuación diferencial lineal de orden superior, el problema con valores iniciales siempre tiene una solución única.

EXISTENCIA Y UNICIDAD

Teorema 1. Suponga que $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ y $g(x)$ son continuas en un intervalo (a, b) que contiene al punto x_0. Entonces, para cualquier elección de los valores iniciales $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, existe una única solución $y(x)$ en todo el intervalo (a, b) del problema con valores iniciales

(3) $$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = g(x) ,$$

(4) $$y(x_0) = \gamma_0,\ y'(x_0) = \gamma_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1} .$$

EJEMPLO 1 Para el problema con valores iniciales

(5) $$x(x-1)y''' - 3xy'' + 6x^2y' - (\cos x)y = \sqrt{x+5} ;$$

(6) $$y(x_0) = 1 , \qquad y'(x_0) = 0 , \qquad y''(x_0) = 7 ,$$

determinar los valores de x_0 y los intervalos (a, b) que contienen a x_0 para los cuales el teorema 1 garantiza la existencia de una única solución en (a, b).

SOLUCIÓN Al escribir (5) en forma canónica, vemos que $p_1(x) = -3/(x-1)$, $p_2(x) = 6x/(x-1)$, $p_3(x) = -(\cos x)/[x(x-1)]$ y $g(x) = \sqrt{x+5}/[x(x-1)]$. Ahora, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son continuas en cualquier intervalo que no contenga a $x = 1$, mientras que $p_3(x)$ es continua en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$ o a $x = 1$. La función $g(x)$ no está definida para $x < -5$, $x = 0$ y $x = 1$, pero es continua en $(-5, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. De aquí que las funciones p_1, p_2, p_3 y g son *simultáneamente* continuas en los intervalos $(-5, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. El teorema 1 implica que si elegimos $x_0 \in (-5, 0)$, entonces existe una única solución del problema con valores iniciales (5)−(6) en todo el intervalo $(-5, 0)$. De manera análoga, para $x_0 \in (0, 1)$, existe una única solución en $(0, 1)$ y para $x_0 \in (1, \infty)$, una única solución en $(1, \infty)$. ■

Si el lado izquierdo de la ecuación (3) define el operador diferencial L,

(7) $$L[y] := \frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_ny = (D^n + p_1D^{n-1} + \cdots + p_n)[y] ,$$

entonces podemos expresar la ecuación (3) en la forma de operador

(8) $$L[y](x) = g(x) .$$

Es esencial recordar que L es un operador *lineal*; satisface

(9) $$L[y_1 + y_2 + \cdots + y_m] = L[y_1] + L[y_2] + \cdots + L[y_m]\,,$$

(10) $$L[cy] = cL[y]\,, \quad \text{donde } c \text{ es cualquier constante}$$

Éstas son propiedades conocidas del operador de derivación D, de donde se siguen (9) y (10) (véase el problema 25).

Como consecuencia de esta linealidad, si $y_1, \ldots, y_m$ son soluciones de la ecuación *homogénea*

(11) $$L[y](x) = 0\,,$$

entonces cualquier combinación lineal de estas funciones, $C_1y_1 + \cdots + C_my_m$, también es solución, pues.

$$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_my_m] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \cdots + C_m \cdot 0 = 0\,.$$

Imaginemos ahora que hemos hallado n soluciones $y_1, \ldots, y_n$ de la ecuación lineal de orden n (11). ¿Será cierto que *toda* solución de (11) se puede representar como

(12) $$C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$$

eligiendo de manera adecuada las constantes $C_1, \ldots, C_n$? La respuesta es sí, siempre que las soluciones $y_1, \ldots, y_n$ satisfacen una cierta propiedad que deducimos a continuación.

Sea $\phi(x)$ una solución de (11) en el intervalo (a, b) y sea x_0 un número fijo en (a, b). Si es posible elegir las constantes $C_1, \ldots, C_n$ de modo que

(13) $$\begin{aligned} C_1y_1(x_0) &+ \cdots + C_ny_n(x_0) &&= \phi(x_0)\,, \\ C_1y_1'(x_0) &+ \cdots + C_ny_n'(x_0) &&= \phi'(x_0)\,, \\ &\vdots && \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) &+ \cdots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) &&= \phi^{(n-1)}(x_0)\,, \end{aligned}$$

entonces, como $\phi(x)$ y $C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ son dos soluciones que satisfacen las mismas condiciones iniciales en x_0, la conclusión de unicidad del teorema 1 implica

(14) $$\phi(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

para toda x en (a, b).

El sistema (13) consta de n ecuaciones lineales en las n incógnitas $C_1, \ldots, C_n$. Tiene una única solución para todos los valores posibles de $\phi(x_0), \phi'(x_0), \ldots, \phi^{(n-1)}(x_0)$ si y sólo si el determinante[†] de los coeficientes es distinto de cero; es decir si y sólo si

(15) $$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Por lo tanto, si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación (11) y hay algún punto x_0 en (a, b) tal que (15) se cumpla, entonces toda solución $\phi(x)$ de (11) es una combinación lineal de $y_1, \ldots, y_n$.

Antes de escribir este hecho como un teorema, es conveniente identificar el determinante con un nombre.

[†]Los determinantes se analizan en la sección 9.3.

WRONSKIANO

Definición 1. Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones diferenciables $(n-1)$ veces. La función

(16)
$$W[f_1, \ldots, f_n](x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

es el **Wronskiano** de $f_1, \ldots, f_n$.

Ahora enunciamos el teorema de representación de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas que hemos demostrado antes.

REPRESENTACIÓN DE SOLUCIONES (CASO HOMOGÉNEO)

Teorema 2. Sean $y_1, \ldots, y_n$ n soluciones en (a, b) de

(17)
$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = 0 ,$$

donde $p_1, \ldots, p_n$ son continuas en (a, b). Si en cierto punto x_0 en (a, b) estas soluciones satisfacen

(18)
$$W[y_1, \ldots, y_n](x_0) \neq 0 ,$$

entonces toda solución de (17) en (a, b) se puede expresar en la forma

(19)
$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) ,$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes.

La combinación lineal de $y_1, \ldots, y_n$ en (19), con constantes arbitrarias $C_1, \ldots, C_n$, se conoce como **solución general** de (17).

En álgebra lineal, un conjunto de m vectores columna $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, cada uno con m componentes, es linealmente dependiente si y sólo si uno de ellos puede expresarse como una combinación lineal de los demás.† Un teorema básico establece entonces que si un determinante es igual a cero, sus vectores columna son linealmente dependientes y recíprocamente. Así, si un Wronskiano de soluciones a (17) se anula en un punto x_0, una de sus columnas (digamos que la última, pues siempre podemos renumerar) es igual a una combinación lineal de las demás:

(20)
$$\begin{bmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} + \cdots + d_{n-1} \begin{bmatrix} y_{n-1}(x_0) \\ y_{n-1}'(x_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} .$$

†Esto es equivalente a decir que existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, **no todas nulas**, tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$ es igual al vector cero.

Ahora, consideremos las dos funciones $y_n(x)$ y $[d_1y_1(x) + d_2y_2(x) + \cdots + d_{n-1}y_{n-1}(x)]$. Ambas son soluciones de (17) y podemos interpretar (20) como el hecho de que satisfacen las mismas condiciones iniciales en $x = x_0$. Por el teorema de unicidad, son la misma función:

(21) $$y_n(x) = d_1y_1(x) + d_2y_2(x) + \cdots + d_{n-1}y_{n-1}(x)$$

para toda x en el intervalo I. En consecuencia, sus derivadas también son iguales, de modo que

(22) $$\begin{bmatrix} y_n(x) \\ y_n'(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} = d_1\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} + \cdots + d_{n-1}\begin{bmatrix} y_{n-1}(x) \\ y_{n-1}'(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

para toda x en I. Por tanto, la última columna del Wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *siempre* es combinación lineal de las demás columnas, y en consecuencia el Wronskiano se anula en todo punto.

En resumen, el Wronskiano de n soluciones a la ecuación homogénea (17) es idénticamente nulo, o nunca se anula, en el intervalo (a, b). Además, hemos mostrado que en el primer caso, (21) es válida en todo (a, b). Tal relación entre las funciones merece un nombre, para lo que usaremos una terminología muy sugerente hacia el caso vectorial.

DEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES

Definición 2. Las m funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son **linealmente dependientes en un intervalo *I*** si al menos una de ellas se puede expresar como combinación lineal de las demás en I; en forma equivalente, son linealmente dependientes si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, *no todas iguales a cero*, tales que

(22) $$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_mf_m(x) = 0$$

para toda x en I. En caso contrario, son **linealmente independientes en *I***.

EJEMPLO 2 Mostrar que las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-2x}$ y $f_3(x) = 3e^x - 2e^{-2x}$ son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Es claro que f_3 es una combinación lineal de f_1 y f_2:

$$f_3(x) = 3e^x - 2e^{-2x} = 3f_1(x) - 2f_2(x) .$$

Observe además que la identidad correspondiente $3f_1(x) - 2f_2(x) - f_3(x) = 0$ concuerda con el patrón (23). ■

Para demostrar que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son linealmente *independientes* en (a, b), un método conveniente es el siguiente: *Suponga* que la ecuación (22) es válida en (a, b) y muestre que esto implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

EJEMPLO 3 Muestre que las funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ y $f_3(x) = 1 - 2x^2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Suponga que existen constantes c_1, c_2, y c_3 tales que

(24) $$c_1x + c_2x^2 + c_3(1 - 2x^2) = 0$$

es válido para toda x. Si podemos demostrar que (24) implica que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, entonces tendremos la independencia lineal. Hagamos $x = 0$, 1 y -1 en la ecuación (24). Estos valores de x son, en esencia, "sacados del sombrero", pero nos facilitarán el trabajo. Al sustituir en (24) tenemos

(25) $$\begin{aligned} c_3 &= 0 \qquad (x = 0)\ , \\ c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \qquad (x = 1)\ , \\ -c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \qquad (x = -1)\ . \end{aligned}$$

Al resolver este sistema (o calcular el determinante de los coeficientes), vemos que la única solución posible es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. En consecuencia, las funciones f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Una solución más agradable consiste en notar que si (24) es válida para toda x, entonces también lo son sus primera y segunda derivadas. En $x = 0$, estas condiciones son $c_3 = 0$, $c_1 = 0$ y $2c_2 - 4c_3 = 0$. Es claro que cada uno de los coeficientes debe anularse. ■

A primera vista, la dependencia lineal de las funciones parece distinta a la dependencia lineal de los vectores en el espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$, porque (23) es una ecuación funcional que impone una condición en cada punto de un intervalo. Sin embargo, hemos visto en (21) que cuando las funciones son todas soluciones a la misma ecuación diferencial homogénea, la dependencia lineal de los vectores columna en el Wronskiano (en *cualquier* punto x_0) implica la dependencia lineal de las funciones. El recíproco también es cierto, como muestran (21) y (22). El teorema 3 resume nuestro análisis.

DEPENDENCIA LINEAL Y EL WRONSKIANO

Teorema 3. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de $y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_ny = 0$ en el intervalo (a, b), con $p_1, p_2, \ldots, p_n$ continuas en (a, b), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes en (a, b).
(ii) El wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\,(x_0)$ se anula en algún punto x_0 en (a, b).
(iii) El wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\,(x)$ se anula en todo punto x_0 en (a, b).

Las contrapositivas de estas afirmaciones también son equivalentes:

(iv) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes en (a, b).
(v) El Wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ no se anula en algún punto x_0 en (a, b).
(vi) El Wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ nunca se anula en (a, b).

Siemrpe que (iv), (v) o (vi) se cumplan, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ se llama un **conjunto de soluciones fundamentales** de (17) en (a,b).

El Wronskiano es una función curiosa. Si consideramos $W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x)$ para n funciones *arbitrarias*, simplemente obtenemos una función de x sin propiedades particularmente interesantes. Pero si las n funciones son todas soluciones de la misma ecuación diferencial

homogénea, entonces es idénticamente cero o nunca se anula. De hecho, se puede demostrar la **identidad de Abel** cuando todas las funciones son soluciones de (17):

(26) $$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt\right),$$

lo que claramente exhibe esta propiedad. El problema 30 bosqueja una demostración de (26) para $n = 3$.

Es útil recordar que los siguientes conjuntos constan de funciones que son linealmente independientes en cada intervalo abierto (a, b):

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n,\}$$
$$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx\},$$
$$\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}, \quad \text{donde las } \alpha_i \text{ son constantes distintas.}$$

[Véanse los problemas 27 y 28 y la sección 6.2 (página 329)].

Si combinamos las propiedades de linealidad (superposición) (9) y (10) con el teorema de representación para soluciones de la ecuación homogénea, obtenemos el siguiente teorema de representación para ecuaciones no homogéneas.

REPRESENTACIÓN DE SOLUCIONES (CASO NO HOMOGÉNEO)

Teorema 4. Sea $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea

(27) $$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = g(x)$$

en el intervalo (a, b) con $p_1, p_2, \ldots, p_n$ continuas en (a, b) y sean $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea correspondiente

(28) $$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = 0 .$$

Entonces toda solución de (27) en el intervalo (a, b) se puede expresar en la forma

(29) $$\boldsymbol{y(x) = y_p(x) + C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)} .$$

Demostración. Sea $\phi(x)$ una solución de (27). Como $\phi(x)$ y $y_p(x)$ son soluciones de (27), el principio de superposición establece que la diferencia $\phi(x) - y_p(x)$ es solución de la ecuación homogénea (28). El teorema 2 implica entonces que

$$\phi(x) - y_p(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

para constantes adecuadas $C_1, \ldots, C_n$. La última ecuación es equivalente a (29) [con $\phi(x)$ en vez de $y(x)$], de modo que el teorema queda demostrado. ■

La combinación lineal de $y_p, y_1, \ldots, y_n$ en (29) escrita con las constantes arbitrarias $C_1, \ldots, C_n$ se conoce, por razones obvias, como una **solución general** de (27). El teorema 4 se puede generalizar fácilmente. Por ejemplo, si L denota el operador que aparece en el lado izquierdo de la ecuación (27) y si $L[y_{p1}] = g_1(x)$ y $L[y_{p2}] = g_2(x)$, entonces cualquier solución de $L[y] = c_1g_1 + c_2g_2$ se puede expresar como

$$y(x) = c_1y_{p1}(x) + c_2y_{p2}(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

para una elección adecuada de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

EJEMPLO 4 Determinar una solución general en el intervalo $(-\infty, \infty)$, dado que

$$\textbf{(30)} \qquad L[y] := y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 2x - 4 - 24e^{-2x} \ ,$$

teniendo que $y_{p1}(x) = x^2$ es una solución particular de $L[y] = 2x^2 - 2x - 4$, que $y_{p2}(x) = e^{-2x}$ es una solución particular de $L[y] = -12e^{-2x}$ y que $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^x$ y $y_3(x) = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

SOLUCIÓN Ya hemos señalado que las funciones e^{-x}, e^x y e^{2x} son linealmente independientes debido a que los exponentes -1, 1 y 2 son distintos. Como cada una de estas funciones es solución de la ecuación homogénea correspondiente, entonces $\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Por las observaciones anteriores relativas a las ecuaciones no homogéneas que una solución general de (30) es

$$\textbf{(31)} \qquad \begin{aligned} y(x) &= y_{p1} + 2y_{p2} + C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \\ &= x^2 + 2e^{-2x} + C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x} \ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EJERCICIOS 6.1

En los problemas 1 a 6, determine el intervalo (a, b) más grande para el que el teorema 1 garantice la existencia de una única solución en (a, b) para el problema con valores iniciales dado.

1. $xy''' - 3y' + e^xy = x^2 - 1$;
   $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 0$, $y''(-2) = 2$.
2. $y''' - \sqrt{x}y = \operatorname{sen} x$;
   $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 11$, $y''(\pi) = 3$.
3. $y''' - y'' + \sqrt{x-1}y = \tan x$;
   $y(5) = y'(5) = y''(5) = 1$.
4. $x(x+1)y''' - 3xy' + y = 0$;
   $y(-1/2) = 1$, $y'(-1/2) = y''(-1/2) = 0$.
5. $x\sqrt{x+1}y''' - y' + xy = 0$;
   $y(1/2) = y'(1/2) = -1$, $y''(1/2) = 1$.
6. $(x^2 - 1)y''' + e^xy = \ln x$;
   $y(3/4) = 1$, $y'(3/4) = y''(3/4) = 0$.

En los problemas 7 a 14, determine si las funciones dadas son linealmente dependientes o linealmente independientes en el intervalo indicado. Justifique sus respuestas.

7. $\{e^{3x}, e^{5x}, e^{-x}\}$ en $(-\infty, \infty)$.
8. $\{x^2, x^2 - 1, 5\}$ en $(-\infty, \infty)$.
9. $\{\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, 1\}$ en $(-\infty, \infty)$.
10. $\{\operatorname{sen} x, \cos x, \tan x\}$ en $(-\pi/2, \pi/2)$.
11. $\{x^{-1}, x^{1/2}, x\}$ en $(0, \infty)$.
12. $\{\cos 2x, \cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x\}$ en $(-\infty, \infty)$.
13. $\{x, x^2, x^3, x^4\}$ en $(-\infty, \infty)$.
14. $\{x, xe^x, 1\}$ en $(-\infty, \infty)$.

En los problemas 15 a 18, use el wronskiano para verificar que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial dada y halle una solución general.

15. $y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0$;
    $\{e^{3x}, e^{-x}, e^{-4x}\}$.
16. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$;
    $\{e^x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$.
17. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, $x > 0$;
    $\{x, x^2, x^3\}$.
18. $y^{(4)} - y = 0$; $\{e^x, e^{-x}, \cos x, \operatorname{sen} x\}$.

En los problemas 19 a 22 se da una solución particular y un conjunto fundamental de soluciones para una ecuación no homogénea y su ecuación homogénea correspondiente. (a) Determine una solución general de la ecuación no homogénea. (b) Determine la solución que satisface las condiciones iniciales indicadas.

19. $y''' + y'' + 3y' - 5y = 2 + 6x - 5x^2$;
    $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$;
    $y_p = x^2$; $\{e^x, e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\operatorname{sen} 2x\}$.

20. $xy''' - y'' = -2$; $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$, $y''(1) = -4$; $y_p = x^2$; $\{1, x, x^3\}$.

21. $x^3y''' + xy' - y = 3 - \ln x$, $x > 0$; $y(1) = 3$, $y'(1) = 3$, $y''(1) = 0$; $y_p = \ln x$; $\{x, x\ln x, x(\ln x)^2\}$.

22. $y^{(4)} + 4y = 5\cos x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = -2$; $y_p = \cos x$; $\{e^x\cos x, e^x\operatorname{sen} x, e^{-x}\cos x, e^{-x}\operatorname{sen} x\}$.

23. Sean $L[y] := y''' + y' + xy$, $y_1(x) := \operatorname{sen} x$ y $y_2(x) := x$. Verifique que $L[y_1](x) = x\operatorname{sen} x$ y $L[y_2](x) = x^2 + 1$. Luego utilice el principio de superposición para hallar una solución de la ecuación diferencial:

(a) $L[y] = 2x\operatorname{sen} x - x^2 - 1$.
(b) $L[y] = 4x^2 + 4 - 6x\operatorname{sen} x$.

24. Sean $L[y] := y''' - xy'' + 4y' - 3xy$, $y_1(x) := \cos 2x$ y $y_2(x) := -1/3$. Verifique que $L[y_1](x) = x\cos 2x$ y $L[y_2](x) = x$. Luego utilice el principio de superposición para hallar una solución de la ecuación diferencial:

(a) $L[y] = 7x\cos 2x - 3x$.
(b) $L[y] = -6x\cos 2x + 11x$.

25. Demuestre que L definida en (7) es un operador lineal, verificando que las propiedades (9) y (10) se satisfacen para cualesquiera funciones y, y_1, y_2 n veces diferenciables en (a, b).

26. Existencia de conjuntos fundamentales de soluciones. Por el teorema 1, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ hay una única solución $y_j(x)$ de la ecuación (17) que satisface las condiciones iniciales

$$y_j^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 1\ , & \text{para } k = j - 1\ , \\ 0\ , & \text{para } k \neq j - 1, \quad 0 \leq k \leq n - 1\ . \end{cases}$$

(a) Muestre que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para (17). [*Sugerencia*: Calcule el wronskiano en x_0].

(b) Para los valores iniciales dados $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, exprese la solución $y(x)$ de (17) que satisface $y^{(k)}(x_0) = \gamma_k$, $k = 0, \ldots, n - 1$ (como en las ecuaciones (4)) en términos de este conjunto fundamental de soluciones.

27. Muestre que el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, donde n es un entero positivo, es linealmente independiente en cualquier intervalo abierto (a, b). [*Sugerencia*: Use el hecho de que un polinomio de grado a lo más n no tiene más de n raíces, a menos de que sea idénticamente nulo].

28. El conjunto de funciones

$$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx\},$$

donde n es un entero positivo, es linealmente independiente en cualquier intervalo (a, b). Demuestre esto en el caso particular $n = 2$ y $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

29. (a) Muestre que si $f_1, \ldots, f_m$ son linealmente independientes en $(-1, 1)$, entonces son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

(b) Dé un ejemplo para mostrar que si $f_1, \ldots, f_m$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$, entonces no necesariamente son linealmente independientes en $(-1, 1)$.

30. Para demostrar la identidad de Abel para $n = 3$, proceda como sigue:

(a) Sea $W(x) := W[y_1, y_2, y_3](x)$. Use la regla del producto para la derivada y muestre que

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}\ .$$

(b) Muestre que la expresión anterior se reduce a

$$\textbf{(32)} \qquad W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}\ .$$

(c) Como cada y_i satisface (17), muestre que

$$\textbf{(33)} \qquad y_i^{(3)}(x) = -\sum_{k=1}^{3} p_k(x)y_i^{(3-k)}(x)\ , \quad i = 1, 2, 3\ .$$

(d) Sustituya las expresiones (33) en (32) para mostrar que

$$\textbf{(34)} \qquad W'(x) = -p_1(x)W(x)\ .$$

(e) Deduzca la identidad de Abel resolviendo la ecuación diferencial de primer orden (34).

31. Reducción de orden. Si se conoce una solución no trivial $f(x)$ de la ecuación *homogénea*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0\ ,$$

se puede usar la sustitución $y(x) = v(x)f(x)$ para reducir el orden de la ecuación. Realice los siguientes pasos para demostrar el método para la ecuación de tercer orden

(35) $$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 ,$$

dado que $f(x) = e^x$ es una solución.

(a) Haga $y(x) = v(x)e^x$ y calcule y', y'' y y'''.

(b) Sustituya sus expresiones de (a) en (35) para obtener una ecuación de *segundo orden* en $w = v'$.

(c) Resuelva la ecuación de segundo orden de la parte (b) en términos de w y luego integre para hallar v. Determine dos opciones linealmente independientes para v, digamos, v_1 y v_2.

(d) Por la parte (c), las funciones $y_1(x) = v_1(x)e^x$ y $y_2(x) = v_2(x)e^x$ son dos soluciones de (35). Verifique que las tres soluciones e^x, $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

32. Dado que la función $f(x) = x$ es una solución de $y''' - x^2y' + xy = 0$, muestre que la sustitución $y(x) = v(x)f(x) = v(x)x$ reduce esta ecuación a $xw'' + 3w' - x^3w = 0$, donde $w = v'$.

33. Use el método de reducción de orden descrito en el problema 31 para hallar tres soluciones linealmente independientes de $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$, dado que $f(x) = e^{2x}$ es una solución.

34. Construcción de ecuaciones diferenciales. Dadas tres funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ que son tres veces diferenciables y cuyo wronskiano no se anula en $[a, b]$, muestre que la ecuación

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & y \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & y' \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) & y'' \\ f_1'''(x) & f_2'''(x) & f_3'''(x) & y''' \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación diferencial lineal de tercer orden para la cual $\{f_1, f_2, f_3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. ¿Cuál es el coeficiente de y''' en esta ecuación?

35. Use el resultado del problema 34 para construir una ecuación diferencial de tercer orden para la cual $\{x, \text{sen } x, \cos x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

6.2 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Nuestro objetivo en esta sección será el de obtener una solución general de una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes. Con base en la experiencia adquirida con las ecuaciones de segundo orden en la sección 4.2, el lector no tendrá muchos problemas en intuir la forma de tal solución. Sin embargo, nos interesa ayudar al lector a comprender *por qué* estas técnicas funcionan. Haremos esto adoptando un punto de vista de operadores, técnica que es útil para enfrentar muchos otros problemas en análisis, como la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

(1) $$a_ny^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 ,$$

donde a_n $(\neq 0)$, $a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes reales.[†] Como las funciones constantes son continuas en todas partes, la ecuación (1) tiene soluciones definidas para toda x en $(-\infty, \infty)$

[†]***Nota histórica:*** En una carta a John Bernoulli de fecha 15 de septiembre de 1739, Leonhard Euler afirmó haber resuelto el caso general de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes.

—recuerde el teorema 1 de la sección 6.1—. Si podemos hallar n soluciones linealmente independientes de (1) en $(-\infty, \infty)$, digamos $y_1, \ldots, y_n$, entonces podemos expresar una solución general de (1) en la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) , \tag{2}$$

con $C_1, \ldots, C_n$ constantes arbitrarias.

Para determinar estas n soluciones linealmente independientes, aprovecharemos nuestro éxito con las ecuaciones de segundo orden. Nuestra experiencia sugiere que comencemos con una función de la forma $y = e^{rx}$.

Si L es el operador diferencial definido mediante el lado izquierdo de (1), es decir,

$$\boldsymbol{L[y] := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y} , \tag{3}$$

entonces podemos escribir (1) en la forma de operador

$$L[y](x) = 0 . \tag{4}$$

Para $y = e^{rx}$ tenemos

$$\begin{aligned} L[e^{rx}](x) &= a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_0 e^{rx} \\ &= e^{rx}(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0) = e^{rx} P(r) , \end{aligned} \tag{5}$$

donde $P(r)$ es el polinomio $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0$. Así, e^{rx} es una solución de la ecuación (4), siempre que r sea una raíz de la **ecuación auxiliar** (o **característica**)

$$\boldsymbol{P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0} . \tag{6}$$

De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, la ecuación auxiliar tiene n raíces (contando las multiplicidades), que pueden ser reales o complejas. Como mencionamos en el capítulo 4, no existen fórmulas para determinar los ceros de un polinomio arbitrario de grado mayor que 4. Sin embargo, si podemos determinar un cero r_1, entonces podemos cancelar el factor $r - r_1$ y quedarnos con un polinomio de grado menor. (Por conveniencia, hemos elegido la mayor parte de los ejemplos y ejercicios de modo que 0, ± 1 o ± 2 sean los ceros de cualquier polinomio de grado mayor que dos que debamos factorizar). Cuando no se pueda determinar con exactitud un cero, se pueden usar algoritmos numéricos como el método de Newton o el algoritmo del cociente de diferencias para calcular raíces aproximadas de la ecuación polinomial.[†] Incluso algunas calculadoras tienen integrados estos algoritmos.

Ahora analizaremos las diversas posibilidades.

Raíces reales distintas

Si las raíces $r_1, \ldots, r_n$ de la ecuación auxiliar (6) son reales y distintas, entonces n soluciones de la ecuación (1) son

$$y_1(x) = e^{r_1 x},\ y_2(x) = e^{r_2 x},\ \ldots,\ y_n(x) = e^{r_n x} . \tag{7}$$

Como establecimos en la sección anterior, estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$, un hecho que verificaremos ahora de manera oficial. Supongamos que $c_1, \ldots, c_n$

[†] Véase *Applied and Computational Complex Analysis*, por P. Henrici (Wiley-Interscience, Nueva York, 1974), volumen 1, o *Numerical Analysis*, 6a. edición, por R. L. Burden y J. D. Faires (Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1997).

son constantes tales que

$$c_1e^{r_1x} + \cdots + c_ne^{r_nx} = 0 \tag{8}$$

para toda x en $(-\infty, \infty)$. Nuestro objetivo es demostrar que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Una forma de mostrar esto es construir un operador lineal L_k que anule (envíe a cero) todo el lado izquierdo de (8) excepto por el término k. Para esto, observemos que como $r_1, \ldots, r_n$ son los ceros del polinomio auxiliar $P(r)$, entonces $P(r)$ se puede factorizar en

$$P(r) = a_n(r - r_1)\cdots(r - r_n) \ . \tag{9}$$

En consecuencia, el operador $L[y] = a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y$ se puede expresar como la siguiente composición:[†]

$$L = P(D) = a_n(D - r_1)\cdots(D - r_n) \ . \tag{10}$$

Ahora construimos el polinomio $P_k(r)$ eliminando el factor $(r - r_k)$ de $P(r)$. Entonces hacemos $L_k \coloneqq P_k(D)$; es decir,

$$L_k \coloneqq P_k(D) = a_n(D - r_1)\cdots(D - r_{k-1})(D - r_{k+1})\cdots(D - r_n) \ . \tag{11}$$

Al aplicar L_k a ambos lados de (8), obtenemos, mediante la linealidad,

$$c_1L_k[e^{r_1x}] + \cdots + c_nL_k[e^{r_nx}] = 0 \ . \tag{12}$$

Y como $L_k = P_k(D)$, tenemos [como en la ecuación (5)] que $L_k[e^{rx}](x) = e^{rx}P_k(r)$ para toda r. Así, (12) se puede escribir como

$$c_1e^{r_1x}P_k(r_1) + \cdots + c_ne^{r_nx}P_k(r_n) = 0 \ ,$$

que se simplifica como

$$c_ke^{r_kx}P_k(r_k) = 0 \ , \tag{13}$$

pues $P_k(r_i) = 0$ para $i \neq k$. Como r_k no es raíz de $P_k(r)$, entonces $P_k(r_k) \neq 0$. La ecuación (13) implica entonces que $c_k = 0$. Pero como k es arbitrario, todas las constantes $c_1, \ldots, c_n$ deben anularse. Así, las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ dadas en (7) son linealmente independientes. (Véase el problema 26 para una demostración alternativa).

Hemos demostrado que, en el caso de n raíces reales distintas, una solución general de (1) es

$$\boldsymbol{y(x) = C_1e^{r_1x} + \cdots + C_ne^{r_nx}} \ , \tag{14}$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 Determinar una solución general de

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \ . \tag{15}$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0 \ . \tag{16}$$

[†]***Nota histórica:*** La notación $P(D)$ fue introducida por Augustin Cauchy en 1827.

Por inspección, vemos que $r = 1$ es una raíz. Usamos la división de polinomios para obtener

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = (r - 1)(r^2 - r - 6) \ ,$$

que se puede factorizar aún más como $(r - 1)(r + 2)(r - 3)$. Por lo tanto, las raíces de la ecuación (16) son $r_1 = 1$, $r_2 = -2$, $r_3 = 3$. Como estas raíces son reales y distintas, una solución general de (15) es

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} \ . \quad \blacksquare$$

Raíces complejas

Si $\alpha + i\beta$ (α, β reales) es una raíz compleja de la ecuación auxiliar (6), entonces también lo es su conjugado complejo $\alpha - i\beta$, pues los coeficientes de $P(r)$ tienen valores reales (véase el problema 24). Si aceptamos funciones con valores complejos como soluciones, entonces tanto $e^{(\alpha+i\beta)x}$ como $e^{(\alpha-i\beta)x}$ son soluciones de (1). Además, si no hay raíces repetidas, entonces una solución general de (1) está dada de nuevo por (14). Para hallar dos soluciones con valores reales correspondientes a las raíces $\alpha \pm i\beta$, podemos considerar simplemente las partes reales e imaginarias de $e^{(\alpha+i\beta)x}$; es decir, como

(17) $$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \ ,$$

entonces dos soluciones linealmente independientes de (1) son

(18) $$e^{\alpha x}\cos\beta x \ , \qquad e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \ .$$

De hecho, al usar estas soluciones en vez de $e^{(\alpha+i\beta)x}$ y $e^{(\alpha-i\beta)x}$ en (14) preservamos la independencia lineal del conjunto de n soluciones. Así, al considerar cada pareja de raíces conjugadas de esta forma, obtenemos una solución general de (1) con valores reales.

EJEMPLO 2 Determinar una solución general de

(19) $$y''' + y'' + 3y' - 5y = 0 \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

(20) $$r^3 + r^2 + 3r - 5 = (r - 1)(r^2 + 2r + 5) = 0 \ ,$$

con las raíces distintas $r_1 = 1$, $r_2 = -1 + 2i$, $r_3 = -1 - 2i$. Así, una solución general es

(21) $$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}\cos 2x + C_3e^{-x}\operatorname{sen} 2x \ . \quad \blacksquare$$

Raíces repetidas

Si r_1 es una raíz de multiplicidad m, entonces las n soluciones dadas en (7) ni siquiera son distintas, mucho menos linealmente independientes. Recordemos que para una ecuación de segundo orden, al tener una raíz repetida r_1 de la ecuación auxiliar, obteníamos dos soluciones linealmente independientes considerando e^{r_1x} y xe^{r_1x}. Así, si r_1 es una raíz de (6) de multiplicidad m, sería de esperar que m soluciones linealmente independientes sean

(22) $$e^{r_1x} \ , \quad xe^{r_1x} \ , \quad x^2e^{r_1x} \ , \quad \dots , \quad x^{m-1}e^{r_1x} \ .$$

Para ver que esto ocurre, observamos que si r_1 es una raíz de multiplicidad m, entonces la

ecuación auxiliar se puede escribir en la forma

$$a_n(r - r_1)^m(r - r_{m+1}) \cdots (r - r_n) = (r - r_1)^m \tilde{P}(r) = 0 \;, \tag{23}$$

donde $\tilde{P}(r) := a_n(r - r_{m+1}) \cdots (r - r_n)$ y $\tilde{P}(r_1) \neq 0$. Con esta notación, tenemos la identidad

$$L[e^{rx}](x) = e^{rx}(r - r_1)^m \tilde{P}(r) \tag{24}$$

[véase (5)]. Al hacer $r = r_1$ en (24), de nuevo vemos que $e^{r_1 x}$ es una solución de $L[y] = 0$.

Para hallar otras soluciones, consideramos la k-ésima derivada parcial con respecto de r en ambos lados de (24):

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} L[e^{rx}](x) = \frac{\partial^k}{\partial r^k}\left[e^{rx}(r - r_1)^m \tilde{P}(r)\right] \;. \tag{25}$$

Al derivar el lado derecho de (25), vemos que la expresión resultante tendrá a $(r - r_1)$ como factor, siempre que $k \leq m - 1$. Así, al hacer $r = r_1$ en (25) tenemos

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial r^k} L[e^{rx}](x)\right|_{r=r_1} = 0 \quad \text{si} \quad k \leq m - 1 \;. \tag{26}$$

Observemos ahora que la función e^{rx} tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes con respecto de r y x. Por lo tanto, para las derivadas parciales cruzadas de e^{rx}, no hay diferencia si la derivación se hace primero con respecto de x y luego con respecto de r o viceversa. Como L implica derivadas con respecto de x, podemos intercambiar el orden de derivación en (26) para obtener

$$L\left[\left.\frac{\partial^k}{\partial r^k}(e^{rx})\right|_{r=r_1}\right](x) = 0 \;.$$

Así,

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial r^k}(e^{rx})\right|_{r=r_1} = x^k e^{r_1 x} \tag{27}$$

será una solución de (1) para $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. Así, tenemos m soluciones distintas de (1), debidas a la raíz $r = r_1$ de multiplicidad m, dadas por (22). Dejaremos como ejercicio mostrar que las m funciones en (22) son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ —véase el problema 25—.

Si $\alpha + i\beta$ es una raíz compleja repetida de multiplicidad m, entonces podemos reemplazar las $2m$ funciones con valores complejos

$$\begin{array}{llll} e^{(\alpha+i\beta)x} , & xe^{(\alpha+i\beta)x} , & \ldots , & x^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)x} , \\ e^{(\alpha-i\beta)x} , & xe^{(\alpha-i\beta)x} , & \ldots , & x^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)x} \end{array}$$

por las $2m$ funciones linealmente independientes con valores reales

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos \beta x , & xe^{\alpha x}\cos \beta x , & \ldots , & x^{m-1}e^{\alpha x}\cos \beta x , \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x , & xe^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x , & \ldots , & x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x \;. \end{array} \tag{28}$$

Usamos los resultados de los tres casos analizados anteriormente para obtener un conjunto de n soluciones linealmente independientes que producen una solución general de (1) con valores reales.

EJEMPLO 3 Determinar una solución general de

$$\textbf{(29)} \qquad y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + 5y' - 2y = 0 \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^4 - r^3 - 3r^2 + 5r - 2 = (r-1)^3(r+2) = 0 \ ,$$

con las raíces $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$, $r_4 = -2$. Como la raíz en 1 tiene multiplicidad 3, una solución general es

$$\textbf{(30)} \qquad y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4e^{-2x} \ . \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Determinar una solución general de

$$\textbf{(31)} \qquad y^{(4)} - 8y^{(3)} + 26y'' - 40y' + 25y = 0 \ ,$$

cuya ecuación auxiliar se puede factorizar como

$$\textbf{(32)} \qquad r^4 - 8r^3 + 26r^2 - 40r + 25 = (r^2 - 4r + 5)^2 = 0 \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar (32) tiene raíces complejas repetidas: $r_1 = 2 + i$, $r_2 = 2 + i$, $r_3 = 2 - i$ y $r_4 = 2 - i$. Por tanto, una solución general es

$$y(x) = C_1e^{2x}\cos x + C_2xe^{2x}\cos x + C_3e^{2x}\operatorname{sen} x + C_4xe^{2x}\operatorname{sen} x \ . \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS 6.2

En los problemas 1 a 14, determine una solución general para la ecuación diferencial con x como variable independiente.

1. $y''' + 2y'' - 8y' = 0$.
2. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$.
3. $6z''' + 7z'' - z' - 2z = 0$.
4. $y''' + 2y'' - 19y' - 20y = 0$.
5. $y''' + 3y'' + 28y' + 26y = 0$.
6. $y''' - y'' + 2y = 0$.
7. $2y''' - y'' - 10y' - 7y = 0$.
8. $y''' + 5y'' - 13y' + 7y = 0$.
9. $u''' - 9u'' + 27u' - 27u = 0$.
10. $y''' + 3y'' - 4y' - 6y = 0$.
11. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.
12. $y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 0$.
13. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$.
14 $y^{(4)} + 2y''' + 10y'' + 18y' + 9y = 0$.
[*Sugerencia*: $y(x) = \operatorname{sen} 3x$ es una solución].

En los problemas 15 a 18, determine una solución general para la ecuación homogénea dada.

15. $(D-1)^2(D+3)(D^2+2D+5)^2[y] = 0$.
16. $(D+1)^2(D-6)^3(D+5)(D^2+1)\cdot(D^2+4)[y] = 0$.
17. $(D+4)(D-3)(D+2)^3(D^2+4D+5)^2\cdot D^5[y] = 0$.
18. $(D-1)^3(D-2)(D^2+D+1)\cdot(D^2+6D+10)^3[y] = 0$.

En los problemas 19 a 21, resuelva el problema con valores iniciales dado.

19. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = -4$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -19$.
20. $y''' + 7y'' + 14y' + 8y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 13$.

21. $y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

En los problemas 22 y 23, determine una solución general para el sistema lineal dado usando el método de eliminación de la sección 5.3.

22. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x + 5y = 0$,

$2x + \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$.

23. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - x + \dfrac{dy}{dt} + y = 0$,

$\dfrac{dx}{dt} - x + y = 0$.

24. Sea $P(r) = a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0$ un polinomio con coeficientes reales $a_n, \ldots, a_0$. Demuestre que si r_1 es un cero de $P(r)$, entonces también lo es su conjugado complejo $\overline{r}_1$. [*Sugerencia*: Muestre que $\overline{P(r)} = P(\overline{r})$, donde la barra denota la conjugación compleja].

25. Muestre que las m funciones $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{m-1}e^{rx}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. [*Sugerencia*: Muestre que estas funciones son linealmente independientes si y sólo si $1, x, \ldots, x^{m-1}$ son linealmente independientes].

26. Como demostración alternativa de que las funciones $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \ldots, e^{r_nx}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ cuando $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son distintas, suponga que

(33) $\quad C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \cdots + C_ne^{r_nx} = 0$

se cumple para toda x en $(-\infty, \infty)$ y proceda como sigue:

(a) Como las r_i son distintas, podemos (en caso necesario) renombrarlas de modo que

$r_1 > r_2 > \cdots > r_n$.

Divida la ecuación (33) entre e^{r_1x} para obtener

$$C_1 + C_2\frac{e^{r_2x}}{e^{r_1x}} + \cdots + C_n\frac{e^{r_nx}}{e^{r_1x}} = 0 \; .$$

Haga $x \to +\infty$ en el lado izquierdo para obtener $C_1 = 0$.

(b) Como $C_1 = 0$, la ecuación (33) se convierte en

$C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x} + \cdots + C_ne^{r_nx} = 0$

para toda x en $(-\infty, \infty)$. Divida esta ecuación entre e^{r_2x} y haga $x \to +\infty$ para concluir que $C_2 = 0$.

(c) Continuando a la manera de (b), justifique que todos los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se anulan y por tanto $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \ldots, e^{r_nx}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

27. Determine una solución general de

$$y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - y' + \frac{1}{2}y = 0$$

usando el método de Newton (apéndice A) o algún otro procedimiento numérico para aproximar las raíces de la ecuación auxiliar.

28. Determine una solución general de $y''' - 3y' - y = 0$ usando el método de Newton o algún otro procedimiento numérico para aproximar las raíces de la ecuación auxiliar.

29. Determine una solución general de

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 4y'' + 3y' + 2y = 0$$

usando el método de Newton para aproximar de manera numérica las raíces de la ecuación auxiliar. [*Sugerencia*: Para hallar las raíces complejas, use la fórmula recursiva de Newton $z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n)$ e inicie con una estimación inicial *compleja* z_0].

30. (a) Deduzca la forma

$$y(x) = A_1e^x + A_2e^{-x} + A_3\cos x + A_4\operatorname{sen} x$$

para la solución general de la ecuación $y^{(4)} = y$, a partir de la observación de que las raíces cuartas de la unidad son $1, -1, i$ y $-i$.

(b) Deduzca la forma

$$y(x) = A_1e^x + A_2e^{-x/2}\cos\left(\sqrt{3}x/2\right) + A_3e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}x/2\right)$$

para la solución general de la ecuación $y^{(3)} = y$, observando que las raíces cúbicas de la unidad son $1, e^{i2\pi/3}$ y $e^{-i2\pi/3}$.

31. Ecuaciones de Cauchy-Euler de orden superior. Una ecuación diferencial que se puede expresar de la forma

$$a_nx^ny^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0y(x) = 0 \; ,$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes, es una ecuación homogénea de **Cauchy-Euler**. (El caso de segundo orden se analiza en las secciones 4.5 y 8.5). Use la sustitución $y = x^r$ para determinar un conjunto fundamental de soluciones para las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler:

(a) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $x > 0$.
(b) $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$, $x > 0$.
(c) $x^3y''' - 2x^2y'' + 13xy' - 13y = 0$, $x > 0$.

[*Sugerencia:* $x^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta)\ln x}$
$= x^{\alpha}\{\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\}$].

32. Sea $y(x) = Ce^{rx}$, donde C ($\neq 0$) y r son números reales, una solución de una ecuación diferencial. Suponga que no podemos determinar a r con exactitud sino que sólo se puede aproximar mediante $\tilde{r}$ y $\tilde{y}(x) := Ce^{\tilde{r}x}$ y considere el error $|y(x) - \tilde{y}(x)|$.
(a) Si r y $\tilde{r}$ son positivas, $r \neq \tilde{r}$, muestre que el error crece en forma exponencial cuando x tiende a $+\infty$.
(b) Si r y $\tilde{r}$ son negativas, $r \neq \tilde{r}$, muestre que el error tiende a cero de manera exponencial cuando x tiende a $+\infty$.

33. En una superficie suave horizontal, una masa de m_1 kg está unida a una pared fija mediante un resorte con constante de resorte k_1 N/m. Otra masa de m_2 kg está unida al primer objeto mediante un resorte con constante de resorte k_2 N/m. Los objetos están alineados en forma horizontal de modo que los resortes tienen sus longitudes naturales. Como mostramos en la sección 5.5, este sistema acoplado masa-resorte queda descrito mediante el sistema de ecuaciones diferenciales

(34) $$m_1\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x - k_2y = 0 \ ,$$

(35) $$m_2\frac{d^2y}{dt^2} - k_2x + k_2y = 0 \ .$$

Supongamos que $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$. Si ambos objetos se desplazan 1 m hacia la derecha de sus posiciones de equilibrio (véase la figura 5.18, página 287) y luego se liberan, determine las ecuaciones de movimiento para los objetos como sigue:
(a) Muestre que $x(t)$ satisface la ecuación

(36) $$x^{(4)}(t) + 7x''(t) + 6x(t) = 0 \ .$$

(b) Determine una solución general $x(t)$ de (36).
(c) Sustituya $x(t)$ de nuevo en (34) para obtener una solución general de $y(t)$.
(d) Use las condiciones iniciales para determinar las soluciones, $x(t)$ y $y(t)$, que son las ecuaciones de movimiento.

34. Suponga que los dos resortes en el sistema acoplado masa-resorte analizado en el problema 33 se intercambian, de modo que los nuevos datos son $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 3$. Si ambos objetos se desplazan ahora 1 m a la derecha de sus posiciones de equilibrio y luego se liberan, determine las ecuaciones de movimiento de los dos objetos.

35. Viga vibrante. Al estudiar las vibraciones transversales de una viga se encuentra la ecuación homogénea

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} - ky = 0 \ ,$$

donde $y(x)$ está relacionada con el desplazamiento de la viga en la posición x, la constante E es el módulo de Young, I es el momento de inercia del área y k es un parámetro. Suponga que E, I y k son constantes positivas y halle una solución general en términos de senos, cosenos, senos hiperbólicos y cosenos hiperbólicos.

6.3 COEFICIENTES INDETERMINADOS Y EL MÉTODO DEL ANULADOR

En las secciones 4.4 y 4.5 dominamos un sencillo método para obtener una solución particular de una ecuación lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

(1) $$L[y] = (aD^2 + bD + c)[y] = f(x) \ ,$$

cuando la no homogeneidad $f(x)$ tenía una forma particular (a saber, un producto de un polinomio, una exponencial o un sinusoide). En un sentido grueso, nos motivó la observación de que si una función f de este tipo había surgido al operar y con un operador L de la forma $(aD^2 + bD + c)$, entonces deberíamos haber partido de una y del mismo tipo. Así, resolvimos (1) postulando una forma de solución y_p que recordaba a f, pero con *coeficientes indetermina-*

dos, e insertamos esta forma en la ecuación para determinar los valores de estos coeficientes. También observamos que había que ajustar algunos detalles cuando f fuese solución de la ecuación homogénea $L[y] = 0$.

En esta sección volveremos a examinar el método de coeficientes indeterminados desde otro punto de vista más riguroso, en parte con el objetivo de atar los cabos sueltos de nuestra exposición anterior y, lo que es más importante, para extender el método a ecuaciones de orden superior (con coeficientes constantes). Primero describiremos el nuevo punto de vista que adoptaremos para nuestro análisis. Luego ilustraremos sus implicaciones y por último deduciremos un conjunto pequeño de reglas para implantarlo, reglas que justifican y extienden los procedimientos de la sección 4.4. El enfoque riguroso se conoce como el **método del anulador**.

La primera premisa del método del anulador es la observación, surgida del análisis de la sección anterior, de que todos los "tipos adecuados" de no homogeneidades $f(x)$ —productos de polinomios por exponenciales por sinusoides— son a su vez *soluciones de ecuaciones diferenciales* ***homogéneas*** *con coeficientes constantes*. Observe lo siguiente:

(i) Cualquier término no homogéneo de la forma $f(x) = e^{rx}$ satisface $(D - r)[f] = 0$.
(ii) Cualquier término no homogéneo de la forma $f(x) = x^k e^{rx}$ satisface $(D - r)^m[f] = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, m - 1$.
(iii) Cualquier término no homogéneo de la forma $f(x) = \cos \beta x$ o $\operatorname{sen} \beta x$ satisface $(D^2 + b^2)[f] = 0$.
(iv) Cualquier término no homogéneo de la forma $f(x) = x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$ o $x^k e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ satisface $[(D - \alpha)^2 + \beta^2]^m[f] = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, m - 1$.

En otras palabras, cada una de estas no homogeneidades es *anulada* por un operador diferencial con coeficientes constantes.

ANULADOR

Definición 3. Un operador diferencial lineal A **anula** a una función f si

(2) $$A[f](x) = 0 ,$$

para toda x. Es decir, A anula a f si f es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea (2) en $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 1 Determinar un operador diferencial que anule a

(3) $$6xe^{-4x} + 5e^x \operatorname{sen} 2x \ .$$

SOLUCIÓN Considere las dos funciones cuya suma aparece en (3). Observe que $(D + 4)^2$ anula a la función $f_1(x) = 6xe^{-4x}$. Además, $f_2(x) = 5e^x \operatorname{sen} 2x$ es anulada por el operador $(D - 1)^2 + 4$. Por lo tanto, la composición de operadores

$$A := (D + 4)^2[(D - 1)^2 + 4] \ ,$$

que es igual al operador

$$[(D - 1)^2 + 4](D + 4)^2 \ ,$$

anula a f_1 y f_2. Pero entonces, por linealidad, A también anula a la suma $f_1 + f_2$. ■

Ahora mostraremos la forma de usar los anuladores para determinar soluciones particulares de ciertas ecuaciones *no* homogéneas. Considere la ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes

(4) $$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = f(x) \ ,$$

que se puede escribir en la forma de operador

(5) $$L[y](x) = f(x) \ ,$$

donde

$$L = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0 \ .$$

Suponga que A es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes que anula a $f(x)$. Entonces

$$A\big[L[y]\big](x) = A[f](x) = 0 \ ,$$

de modo que toda solución de (5) también es solución de la ecuación *homogénea*

(6) $$AL[y](x) = 0 \ ,$$

que implica la composición de los operadores A y L. Pero (6) tiene coeficientes constantes, y ¡somos expertos en las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes! En particular, podemos usar los métodos de la sección 6.2 para escribir una solución general de (6). De esto podemos deducir la *forma* de una solución particular de (5). Veamos algunos ejemplos y luego resumiremos nuestros hallazgos. La ecuación diferencial del siguiente ejemplo es de segundo orden, de modo que podremos ver con precisión la relación del método del anulador con las técnicas de las secciones 4.4 y 4.5.

EJEMPLO 2 Determinar una solución general de

(7) $$y'' - y = xe^x + \operatorname{sen} x \ .$$

SOLUCIÓN Primero resolvemos esto por los métodos de las secciones 4.4 y 4.5 y así adquirir una perspectiva para el método del anulador. La ecuación homogénea correspondiente a (7) es $y'' - y = 0$, con la solución general $C_1e^{-x} + C_2e^x$. Como e^x es una solución de la ecuación homogénea, la no homogeneidad xe^x pide una forma de solución $x(C_3 + C_4x)e^x$. Para acomodar la no homogeneidad sen x, necesitamos una forma de coeficientes indeterminados $C_5 \operatorname{sen} x + C_6 \cos x$. Los valores C_3 hasta C_6 en la *solución particular* se determinan mediante una sustitución:

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p &= \left[C_3xe^x + C_4x^2e^x + C_5 \operatorname{sen} x + C_6 \cos x\right]'' \\ &\quad -\left[C_3xe^x + C_4x^2e^x + C_5 \operatorname{sen} x + C_6 \cos x\right] = \operatorname{sen} x + xe^x \ , \end{aligned}$$

lo que conduce a la conclusión $C_3 = -1/4$, $C_4 = 1/4$, $C_5 = -1/2$, y $C_6 = 0$. Así (para referencia posterior), una solución general de (7) es

(8) $$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + x\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\right)e^x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

Para el método del anulador, observe que $(D^2 + 1)$ anula a sen x y $(D - 1)^2$ anula a xe^x. Por tanto, cualquier solución de (7), expresada por conveniencia en forma de operador como

$(D^2 - 1)[y] = xe^x + \text{sen } x$, es anulada por la composición $(D^2 + 1)(D - 1)^2(D^2 - 1)$; es decir, satisface la ecuación homogénea con coeficientes constantes

(9) $$(D^2 + 1)(D - 1)^2(D^2 - 1)[y] = (D + 1)(D - 1)^3(D^2 + 1)[y] = 0 \ .$$

De la sección 6.2 obtenemos que la solución general a (9) está dada por

(10) $$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x + C_5 \text{ sen } x + C_6 \cos x \ .$$

Ésta es precisamente la forma de solución generada mediante los métodos del capítulo 4; los dos primeros términos son la solución general de la ecuación homogénea asociada y los restantes cuatro términos expresan la solución particular de la ecuación no homogénea con coeficientes indeterminados. Al sustituir (10) en (7) obtendremos los valores ya citados de C_3 hasta C_6, y valores indeterminados para C_1 y C_2, quedando estos disponibles para satisfacer las condiciones iniciales.

Observe que el método del anulador reconoce de inmediato el hecho de que la no homogeneidad xe^x requiere la forma $C_3xe^x + C_4x^2e^x$ en la solución particular, contando el total de factores de $(D - 1)$ en el anulador y *el operador diferencial original.* ■

EJEMPLO 2 Usar el método del anulador para determinar una solución general de

(11) $$y''' - 3y'' + 4y = xe^{2x} \ .$$

SOLUCIÓN La ecuación homogénea asociada toma la forma operacional

(12) $$(D^3 - 3D^2 + 4)[y] = (D + 1)(D - 2)^2[y] = 0 \ .$$

La no homogeneidad xe^{2x} es anulada por $(D - 2)^2$. Por tanto, toda solución de (11) satisface también

(13) $$(D - 2)^2(D^3 - 3D^2 + 4)[y] = (D + 1)(D - 2)^4[y] = 0 \ .$$

Una solución general de (13) es

(14) $$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} + C_4x^2e^{2x} + C_5x^3e^{2x} \ .$$

Al comparar con (12) se tiene que los primeros tres términos de (14) dan una solución general para la ecuación homogénea asociada y los dos últimos términos constituyen una forma de solución particular con coeficientes indeterminados. Una sustitución directa revela que $C_4 = -1/18$ y $C_5 = 1/18$, de modo que una solución general de (11) es

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} - \frac{1}{18}x^2e^{2x} + \frac{1}{18}x^3e^{2x} \ . \ ■$$

Así, el método del anulador justifica rigurosamente el método de coeficientes indeterminados de la sección 4.4. También nos dice cómo extender ese procedimiento a ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes. Observe que no hay necesidad de implantar directamente el método del anulador; sólo hay que introducir las modificaciones siguientes al método de coeficientes indeterminados.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Para determinar una solución particular de la ecuación diferencial con coeficientes constantes $L[y] = Cx^m e^{rx}$, use la forma

(15) $$y_p(x) = x^s[A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0]e^{rx} ,$$

con $s = 0$ si r no es una raíz de la ecuación auxiliar asociada; en caso contrario, haga s igual a la multiplicidad de esta raíz.

Para determinar una solución particular de la ecuación diferencial con coeficientes constantes $L[y] = Cx^m e^{\alpha x} \cos \beta x$ o $L[y] = Cx^m e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$, use la forma

(16) $$y_p(x) = x^s[A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0]e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s[B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0]e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x ,$$

con $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es una raíz de la ecuación auxiliar asociada; en caso contrario, haga s igual a la multiplicidad de esta raíz.

EJERCICIOS 6.3

En los problemas 1 a 4, use el método de coeficientes indeterminados para determinar la forma de una solución particular para la ecuación dada.

1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$.

2. $y''' + y'' - 5y' + 3y = e^{-x} + \operatorname{sen} x$.

3. $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$.

4. $y''' + y'' - 2y = xe^x + 1$.

En los problemas 5 a 10, determine una solución general de la ecuación dada.

5. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$.

6. $y''' + y'' - 5y' + 3y = e^{-x} + \operatorname{sen} x$.

7. $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$.

8. $y''' + y'' - 2y = xe^x + 1$.

9. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$.

10. $y''' + 4y'' + y' - 26y = e^{-3x} \operatorname{sen} 2x + x$.

En los problemas 11 a 20, determine un operador diferencial que anule a la función dada.

11. $x^4 - x^2 + 11$. **12.** $3x^2 - 6x + 1$.

13. e^{-7x} . **14.** e^{5x} .

15. $e^{2x} - 6e^x$. **16.** $x^2 - e^x$.

17. $x^2 e^{-x} \operatorname{sen} 2x$. **18.** $xe^{3x} \cos 5x$.

19. $xe^{-2x} + xe^{-5x} \operatorname{sen} 3x$. **20.** $x^2 e^x - x \operatorname{sen} 4x + x^3$.

En los problemas 21 a 30, use el método del anulador para determinar la forma de una solución particular para la ecuación dada.

21. $u'' - 5u' + 6u = \cos 2x + 1$.

22. $y'' + 6y' + 8y = e^{3x} - \operatorname{sen} x$.

23. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} - x^2$.

24. $\theta'' - \theta = xe^x$.

25. $y'' - 6y' + 9y = \operatorname{sen} 2x + x$.

26. $y'' + 2y' + y = x^2 - x + 1$.

27. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + x^2$.

28. $y'' - 6y' + 10y = e^{3x} - x$.

29. $z''' - 2z'' + z' = x - e^x$.

30. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x - 1$.

En los problemas 31 a 33, resuelva el problema con valores iniciales dado.

31. $y''' + 2y'' - 9y' - 18y = -18x^2 - 18x + 22$;
$y(0) = -2$, $y'(0) = -8$, $y''(0) = -12$.

32. $y''' - 2y'' + 5y' = -24e^{3x}$;
$y(0) = 4$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -5$.

33. $y''' - 2y'' - 3y' + 10y$
$= 34xe^{-2x} - 16e^{-2x} - 10x^2 + 6x + 34$;
$y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

34. Use el método del anulador para mostrar que si $a_0 \neq 0$ en la ecuación (4) y $f(x)$ tiene la forma

(17) $f(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

entonces

$$y_p(x) = B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \cdots + B_1 x + B_0$$

es la forma de una solución particular de la ecuación (4).

35. Use el método del anulador para mostrar que si $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$ en (4) y $f(x)$ tiene la forma dada en (17), entonces la ecuación (4) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(x) = x\{B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \cdots + B_1 x + B_0\} .$$

36. Use el método del anulador para mostrar que si $f(x)$ en (4) tiene la forma $f(x) = Be^{\alpha x}$, entonces la ecuación (4) tiene una solución particular de la forma $y_p(x) = x^s Be^{\alpha x}$, donde s se elige como el menor entero no negativo tal que $x^s e^{\alpha x}$ no sea solución de la ecuación homogénea correspondiente.

37. Use el método del anulador para mostrar que si $f(x)$ en (4) tiene la forma

$$f(x) = a \cos \beta x + b \operatorname{sen} \beta x ,$$

entonces la ecuación (4) tiene una solución particular de la forma

(23) $y_p(x) = x^s\{A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x\}$,

donde s se elige como el menor entero no negativo tal que $x^s \cos \beta x$ y $x^s \operatorname{sen} \beta x$ no sean soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

En los problemas 38 y 39, use el método de eliminación de la sección 5.2 para hallar una solución general del sistema dado.

38. $x - \dfrac{d^2y}{dt^2} = t + 1$,

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = e^t$.

39. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x + y = 0$,

$x + \dfrac{d^2y}{dt^2} - y = e^{3t}$.

40. Las corrientes en la red eléctrica de la figura 6.1 satisfacen el sistema

$$\frac{1}{9}I_1 + 64I_2'' = -2 \operatorname{sen} \frac{t}{24} ,$$
$$\frac{1}{64}I_3 + 9I_3'' - 64I_2'' = 0 ,$$
$$I_1 = I_2 + I_3 ,$$

donde I_1, I_2 e I_3 son las corrientes que circulan por varias ramas de la red. Use el método de eliminación de la sección 5.2 para determinar las corrientes, si en un principio $I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$, $I_1'(0) = 73/12$, $I_2'(0) = 3/4$ e $I_3'(0) = 16/3$.

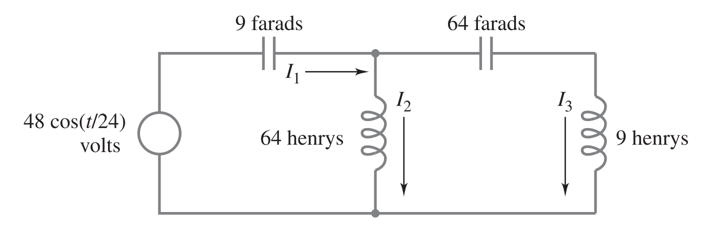


Figura 6.1 Una red eléctrica

6.4 MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

En la sección anterior analizamos el método de coeficientes indeterminados y el método del anulador. Estos métodos sólo sirven para ecuaciones lineales con coeficientes constantes *y* cuando el término no homogéneo es una solución de alguna ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes. En esta sección mostraremos que el método de **variación de parámetros** analizado en la sección 4.6 se puede generalizar a ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes variables.

Nuestro objetivo es determinar una solución particular de la ecuación en forma canónica

$$\textbf{(1)} \qquad L[y](x) = g(x) \ ,$$

donde $L[y] := y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y$ y las funciones coeficiente $p_1, \ldots, p_n$, así como g, son continuas en (a, b). El método por describir exige que conozcamos un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de la ecuación homogénea correspondiente

$$\textbf{(2)} \qquad L[y](x) = 0 \ .$$

Así, una solución general de (2) es

$$\textbf{(3)} \qquad y_h(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) \ ,$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias. En el método de variación de parámetros, suponemos que existe una solución particular de (1) de la forma

$$\textbf{(4)} \qquad y_p(x) = v_1(x) y_1(x) + \cdots + v_n(x) y_n(x)$$

y tratamos de determinar las funciones $v_1, \ldots, v_n$.

Tenemos n funciones incógnitas, de modo que necesitamos n condiciones (ecuaciones) para determinarlas. Obtenemos estas condiciones de la manera siguiente. Al derivar y_p en (4) tenemos

$$\textbf{(5)} \qquad y_p' = (v_1 y_1' + \cdots + v_n y_n') + (v_1' y_1 + \cdots + v_n' y_n) \ .$$

Para evitar la aparición de segundas derivadas de las incógnitas $v_1, \ldots, v_n$ en la fórmula para y_p'', imponemos la condición

$$v_1' y_1 + \cdots + v_n' y_n = 0 \ .$$

De manera similar, al calcular $y_p'', y_p''', \ldots, y_p^{(n-1)}$, imponemos $(n - 2)$ condiciones adicionales que implican a $v_1', \ldots, v_n'$; a saber,

$$v_1' y_1' + \cdots + v_n' y_n' = 0, \ \ldots, \ v_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \ .$$

Por último, la n-ésima condición que imponemos es que y_p satisfaga la ecuación dada (1). Usamos las condiciones anteriores y el hecho de que $y_1, \ldots, y_n$ sean soluciones de la ecuación homogénea para reducir $L[y_p] = g$ a

$$\textbf{(6)} \qquad v_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} = g$$

(véase el problema 12). Por tanto, buscamos n funciones $v_1', \ldots, v_n'$ que satisfagan el sistema

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} y_1 v_1' + \cdots + \quad y_n v_n' &= 0 \ , \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad & \ \vdots \ \vdots \\ y_1^{(n-2)} v_1' + \cdots + y_n^{(n-2)} v_n' &= 0 \ , \\ y_1^{(n-1)} v_1' + \cdots + y_n^{(n-1)} v_n' &= g \ . \end{aligned}$$

Una condición suficiente para la existencia de una solución al sistema (7) para x en (a, b) es que el determinante de la matriz formada por los coeficientes de $v_1', \ldots, v_n'$ sea distinta de cero para toda x en (a, b). Pero este determinante es precisamente el wronskiano:

$$\text{(8)} \qquad \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W[y_1, \ldots, y_n](x) \ ,$$

que nunca se anula en (a, b), pues $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Al resolver (7) mediante la regla de Cramer (apéndice C), tenemos

$$\text{(9)} \qquad v_k'(x) = \frac{g(x) W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)} \ , \qquad k = 1, \ldots, n \ ,$$

donde $W_k(x)$ es el determinante de la matriz que obtiene del wronskiano $W[y_1, \ldots, y_n](x)$ reemplazando la k-ésima columna por $\text{col}[0, \ldots, 0, 1]$. Usamos un desarrollo por menores con respecto de esta columna para expresar $W_k(x)$ en términos de un wronskiano de orden $(n - 1)$:

$$\text{(10)} \qquad W_k(x) = (-1)^{n-k} W[y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n](x) \ , \qquad k = 1, \ldots, n \ .$$

Al integrar $v_k'(x)$ en (9) tenemos

$$\text{(11)} \qquad v_k(x) = \int \frac{g(x) W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)} dx \ , \qquad k = 1, \ldots, n \ .$$

Por último, al sustituir los v_k de nuevo en (4), obtenemos una solución particular de la ecuación (1):

$$\text{(12)} \qquad y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{g(x) W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)} dx \ .$$

Observe que en la ecuación (1) hemos supuesto que el coeficiente del término principal, $y^{(n)}$, era igual a 1. Si fuese $p_0(x)$, debemos reemplazar $g(x)$ por $g(x)/p_0(x)$ en (12).

Aunque la ecuación (12) proporciona una fórmula agradable para una solución particular de (1), su implantación requiere la evaluación de $n + 1$ determinantes y luego de n integraciones. Esto puede implicar varios cálculos tediosos. Sin embargo, el método funciona en casos en que la técnica de coeficientes indeterminados no puede aplicarse (siempre que conozcamos un conjunto fundamental de soluciones, por supuesto).

EJEMPLO 1 Determinar una solución general de la ecuación de Cauchy-Euler

$$\textbf{(13)} \qquad x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \operatorname{sen} x , \qquad x > 0 ,$$

dado que $\{x, x^{-1}, x^2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

SOLUCIÓN Un primer paso importante consiste en dividir (13) entre x^3 para obtener la forma canónica

$$\textbf{(14)} \qquad y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = \operatorname{sen} x , \qquad x > 0 ,$$

de la cual vemos que $g(x) = \operatorname{sen} x$. Como $\{x, x^{-1}, x^2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones, podemos obtener una solución particular de la forma

$$\textbf{(15)} \qquad y_p(x) = v_1(x)x + v_2(x)x^{-1} + v_3(x)x^2 .$$

Para usar la fórmula (12), primero debemos evaluar cuatro determinantes:

$$W[x, x^{-1}, x^2](x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & x^2 \\ 1 & -x^{-2} & 2x \\ 0 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} = -6x^{-1} ,$$

$$W_1(x) = (-1)^{(3-1)}W[x^{-1}, x^2](x) = (-1)^2\begin{vmatrix} x^{-1} & x^2 \\ -x^{-2} & 2x \end{vmatrix} = 3 ,$$

$$W_2(x) = (-1)^{(3-2)}\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = -x^2 ,$$

$$W_3(x) = (-1)^{(3-3)}\begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -2x^{-1} .$$

Al sustituir las expresiones anteriores en (12), tenemos

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x\int \frac{(\operatorname{sen} x)3}{-6x^{-1}}\,dx + x^{-1}\int \frac{(\operatorname{sen} x)(-x^2)}{-6x^{-1}}\,dx + x^2\int \frac{(\operatorname{sen} x)(-2x^{-1})}{-6x^{-1}}\,dx \\ &= x\int\left(-\frac{1}{2}x \operatorname{sen} x\right)dx + x^{-1}\int \frac{1}{6}x^3 \operatorname{sen} x\,dx + x^2\int \frac{1}{3}\operatorname{sen} x\,dx , \end{aligned}$$

que después de algo de trabajo se simplifica como

$$\textbf{(16)} \qquad y_p(x) = \cos x - x^{-1}\operatorname{sen} x + C_1x + C_2x^{-1} + C_3x^2 ,$$

donde C_1, C_2 y C_3 denotan las constantes de integración. Como $\{x, x^{-1}, x^2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea, podemos considerar que C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias. Así, el lado derecho de (16) proporciona la solución general deseada. ■

En el ejemplo anterior, podríamos haber deducido el conjunto fundamental de soluciones $\{x, x^{-1}, x^2\}$ sustituyendo $y = x^r$ en la ecuación homogénea correspondiente a (13) (véase el problema 31 de los ejercicios 6.2). Sin embargo, al trabajar con otras ecuaciones que tengan coeficientes variables, la determinación de un conjunto fundamental puede ser demasiado difícil. En el capítulo 8 enfrentaremos este problema mediante los métodos de series de potencias.

EJERCICIOS 6.4

En los problemas 1 a 6, use el método de variación de parámetros para hallar una solución particular de la ecuación dada.

1. $y''' - 3y'' + 4y = e^{2x}$.

2. $y''' - 2y'' + y' = x$.

3. $z''' + 3z'' - 4z = e^{2x}$.

4. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$.

5. $y''' + y' = \tan x$, $\quad 0 < x < \pi/2$.

6. $y''' + y' = \sec\theta\tan\theta$, $\quad 0 < \theta < \pi/2$.

7. Determine una solución general de la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^{-1} ,$$
$$x > 0 ,$$

dado que $\{x, x^2, x^3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea correspondiente.

8. Determine una solución general de la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^3y''' - 2x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2 ,$$
$$x > 0 ,$$

dado que $\{x, x \ln x, x^3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea correspondiente.

9. Dado que $\{e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = g(x) ,$$

determine una fórmula con integrales para una solución particular.

10. Dado que $\{x, x^{-1}, x^4\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación

$$x^3y''' - x^2y'' - 4xy' + 4y = g(x) ,$$
$$x > 0 ,$$

determine una fórmula con integrales para una solución particular.

11. Determine una solución general de la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^3y''' - 3xy' + 3y = x^4\cos x , \quad x > 0 .$$

12. Deduzca el sistema (7) en el caso particular $n = 3$. [*Sugerencia*: Para determinar la última ecuación, pida que $L[y_p] = g$ y use el hecho de que y_1, y_2 y y_3 satisfacen la ecuación homogénea correspondiente].

13. Muestre que

$$W_k(x) = (-1)^{(n-k)}W[y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n](x) .$$

14. Flexión de una viga bajo una fuerza axial. Una viga uniforme bajo una carga y sujeta a una fuerza axial constante queda descrita mediante la ecuación diferencial

$$y^{(4)}(x) - k^2y''(x) = q(x) , \quad 0 < x < L,$$

donde $y(x)$ es la flexión de la barra, L es la longitud de la viga, k^2 es proporcional a la fuerza axial y $q(x)$ es proporcional a la carga (véase la figura 6.2, página 342).

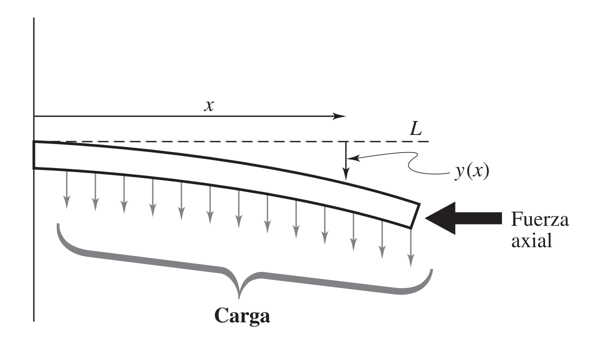


Figura 6.2 Deformación de una viga con carga y una fuerza axial

(a) Muestre que una solución general se puede escribir en la forma

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{kx} + C_4e^{-kx}$$
$$+ \frac{1}{k^2}\int q(x)x\,dx - \frac{x}{k^2}\int q(x)\,dx$$
$$+ \frac{e^{kx}}{2k^3}\int q(x)e^{-kx}dx - \frac{e^{-kx}}{2k^3}\int q(x)e^{kx}dx \ .$$

(b) Muestre que la solución general de la parte (a) se puede escribir en la forma

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{kx} + c_4e^{-kx}$$
$$+ \int_0^x q(s)G(s, x)ds \ ,$$

donde

$$G(s, x) := \frac{s - x}{k^2} - \frac{\operatorname{senh}[k(s - x)]}{k^3} \ .$$

(c) Sea $q(x) \equiv 1$. Calcule primero la solución general mediante la fórmula de la parte (a) y luego use la fórmula de la parte (b). Compare estas dos soluciones generales con la solución general

$$y(x) = B_1 + B_2x + B_3e^{kx} + B_4e^{-kx} - \frac{1}{2k^2}x^2 \ ,$$

que se obtendría mediante el método de coeficientes indeterminados.

(d) ¿Cuáles son algunas de las ventajas de la fórmula en la parte (b)?

RESUMEN DEL CAPÍTULO

La teoría y técnicas para resolver una ecuación diferencial lineal de orden n

(1) $$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = g(x)$$

son extensiones naturales del desarrollo para ecuaciones lineales de segundo orden dado en el capítulo 4. Si $p_1, \ldots, p_n$ y g son funciones continuas en un intervalo abierto I, hay una única solución de (1) en I que satisface las n condiciones iniciales: $y(x_0) = \gamma_0$, $y'(x_0) = \gamma_1, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}$, donde $x_0 \in I$.

Para la ecuación homogénea correspondiente

(2) $$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \ ,$$

existe un conjunto de n soluciones **linealmente independientes** $\{y_1, \ldots, y_n\}$ en I. Tales funciones forman un **conjunto fundamental de soluciones**, y toda solución de (2) se puede escribir como una combinación lineal de estas funciones:

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) \ .$$

La independencia lineal de las soluciones de (2) es equivalente a la no anulación en I del **wronskiano**

$$W[y_1, \ldots, y_n](x) := \det\begin{bmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} .$$

Cuando la ecuación (2) tiene coeficientes constantes (reales), de modo que tiene la forma

(3) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 , \qquad a_n \neq 0 ,$$

entonces el problema de determinar un conjunto fundamental de soluciones se puede reducir al problema algebraico de resolver la **ecuación auxiliar** o **característica**

(4) $$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 .$$

Si las n raíces de (4), digamos, $r_1, r_2, \ldots, r_n$, son todas distintas, entonces

(5) $$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones para (3). Si cierta raíz real, digamos r_1, aparece con multiplicidad m (por ejemplo, $r_1 = r_2 = \cdots = r_m$), entonces m de las funciones en (5) se reemplazan por

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{r_1 x} .$$

Cuando una raíz compleja $\alpha + i\beta$ de (4) aparece con multiplicidad m, entonces lo mismo ocurre con su conjugado y $2m$ elementos del conjunto (5) se reemplazan mediante las funciones con valores reales

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x ,$$
$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x .$$

Podemos escribir una solución general de la ecuación no homogénea (1) como

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) ,$$

donde y_p es una solución particular de (1) y y_h es una solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Dos técnicas útiles para determinar soluciones particulares son el **método del anulador** (coeficientes indeterminados) y el **método de variación de parámetros**.

El método del anulador se aplica a ecuaciones de la forma

(6) $$L[y] = g(x) ,$$

donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y el término de forzamiento $g(x)$ es un polinomio, una exponencial, seno o coseno o una combinación lineal de productos de estas funciones. Tal función $g(x)$ es anulada (es enviada a cero) por un operador diferencial lineal A que además tiene coeficientes constantes. Toda solución de la ecuación no homogénea (6) es entonces una solución de la ecuación homogénea $AL[y] = 0$, y al comparar las soluciones de la última ecuación con una solución general de $L[y] = 0$, podemos obtener la *forma* de una solución particular de (6). Ya hemos recopilado estas formas en la sección 4.4 para el método de coeficientes indeterminados.

El método de variación de parámetros es más general, en el sentido de que se aplica a ecuaciones arbitrarias de la forma (1). La idea es partir de un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ para (2) y determinar funciones $v_1, \ldots, v_n$ tales que

(7) $$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + \cdots + v_n(x)y_n(x)$$

satisfaga (1). Este método conduce a la fórmula

(8) $$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{g(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}\, dx ,$$

donde

$$W_k(x) = (-1)^{n-k} W[y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n](x) , \qquad k = 1, \ldots, n .$$

PROBLEMAS DE REPASO

1. Determine los intervalos para los que el teorema 1 de la página 317 garantiza la existencia de una solución en ese intervalo.

(a) $y^{(4)} - (\ln x)y'' + xy' + 2y = \cos 3x$.

(b) $(x^2 - 1)y''' + (\operatorname{sen} x)y'' + \sqrt{x+4}\, y' + e^x y = x^2 + 3$.

2. Determine si las funciones dadas son linealmente dependientes o linealmente independientes en el intervalo $(0, \infty)$.

(a) $\{e^{2x}, x^2e^{2x}, e^{-x}\}$.

(b) $\{e^x \operatorname{sen} 2x, xe^x \operatorname{sen} 2x, e^x, xe^x\}$.

(c) $\{2e^{2x} - e^x, e^{2x} + 1, e^{2x} - 3, e^x + 1\}$.

3. Muestre que el conjunto de funciones $\{\operatorname{sen} x, x \operatorname{sen} x, x^2 \operatorname{sen} x, x^3 \operatorname{sen} x\}$ es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

4. Determine una solución general de la ecuación diferencial dada

(a) $y^{(4)} + 2y''' - 4y'' - 2y' + 3y = 0$.

(b) $y''' + 3y'' - 5y' + y = 0$.

(c) $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$.

(d) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^x + x$.

5. Determine una solución general para la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, cuya ecuación auxiliar es

(a) $(r + 5)^2(r - 2)^3(r^2 + 1)^2 = 0$.

(b) $r^4(r - 1)^2(r^2 + 2r + 4)^2 = 0$.

6. Dado que $y_p = \operatorname{sen}(x^2)$ es una solución particular de

$$y^{(4)} + y = (16x^4 - 11)\operatorname{sen}(x^2) - 48x^2\cos(x^2)$$

en $(0, \infty)$, halle una solución general.

7. Halle un operador diferencial que anule a la función dada.

(a) $x^2 - 2x + 5$. **(b)** $e^{3x} + x - 1$.

(c) $x \operatorname{sen} 2x$. **(d)** $x^2e^{-2x}\cos 3x$.

(e) $x^2 - 2x + xe^{-x} + \operatorname{sen} 2x - \cos 3x$.

8. Use el método del anulador para determinar la forma de una solución particular para la ecuación dada.

(a) $y'' + 6y' + 5y = e^{-x} + x^2 - 1$.

(b) $y''' + 2y'' - 19y' - 20y = xe^{-x}$.

(c) $y^{(4)} + 6y'' + 9y = x^2 - \operatorname{sen} 3x$.

(d) $y''' - y'' + 2y = x \operatorname{sen} x$.

9. Halle una solución general para la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^3y''' - 2x^2y'' - 5xy' + 5y = x^{-2}, \quad x > 0,$$

dado que $\{x, x^5, x^{-1}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

10. Determine una solución general de la ecuación de Cauchy-Euler dada.

(a) $4x^3y''' + 8x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0$.

(b) $x^3y''' + 2x^2y'' + 2xy' + 4y = 0, \quad x > 0$.

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. Describa las diferencias y similitudes entre las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y las de orden superior. Incluya en sus comparaciones resultados teóricos y los métodos de solución. Por ejemplo, ¿qué complicaciones surgen al resolver ecuaciones de orden superior que no estén presentes en el caso de segundo orden?

2. Explique la relación entre el método de coeficientes indeterminados y el método del anulador. ¿Qué dificultades encontraría al aplicar el método del anulador si la ecuación lineal no tuviese coeficientes constantes?

3. Para estudiantes con bases de álgebra lineal: compare la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden k con la de sistemas de n ecuaciones lineales en n incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene rango $n - k$. Use la terminología de álgebra lineal; por ejemplo, subespacios, bases, dimensión, transformación lineal y núcleo. Analice las ecuaciones homogéneas y no homogéneas.

A. *Justificación del método de coeficientes indeterminados*

El método del anulador, que se analizó en la sección 6.3, se puede usar para deducir los datos de las secciones 4.4 y 4.5, para el método de coeficientes indeterminados. Para mostrar esto, basta trabajar con las funciones de tipo VII; es decir, funciones de la forma

(1) $$g(x) = p_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + q_m(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \ ,$$

donde p_n y q_m son polinomios de grados n y m, respectivamente, pues los demás tipos enumerados en la sección 4.5 son sólo casos particulares de (1).

Considere la ecuación no homogénea

(2) $$L[y](x) = g(x) \ ,$$

donde L es el operador lineal

(3) $$L[y] := a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y \ ,$$

con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ constantes y $g(x)$ dada en la ecuación (1). Sea $N := \text{máx}(n, m)$.

(a) Muestre que

$$A := [(D-\alpha)^2 + \beta^2]^{N+1}$$

es un anulador de g.

(b) Muestre que la ecuación auxiliar asociada con $AL[y] = 0$ tiene la forma

(4) $$a_n[(r-\alpha)^2 + \beta^2]^{s+N+1}(r - r_{2s+1})\cdots(r - r_n) = 0 \ ,$$

donde s (≥ 0) es la multiplicidad de $\alpha \pm i\beta$ como raíces de la ecuación auxiliar asociada a $L[y] = 0$, y $r_{2s+1}, \ldots, r_n$ son las demás raíces de la ecuación.

(c) Halle una solución general de $AL[y] = 0$ y compárela con una solución general de $L[y] = 0$ para verificar que la ecuación (2) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}\{P_N(x)\cos\beta x + Q_N(x)\operatorname{sen}\beta x\} \ ,$$

donde P_N y Q_N son polinomios de grado N.

B. *Vibraciones transversales de una viga*

Al aplicar la teoría de elasticidad al estudio de las vibraciones transversales de una viga aparece la ecuación

$$EIy^{(4)}(x) - \gamma\lambda y(x) = 0 \ ,$$

donde $y(x)$ se relaciona con el desplazamiento de la viga en la posición x; la constante E es el módulo de Young; I es el momento de inercia con respecto del área, que suponemos constante; γ es la masa constante por unidad de longitud de la viga, y λ es un parámetro positivo por determinar. Podemos simplificar la ecuación haciendo $r^4 := \gamma\lambda/EI$; es decir, consideramos

(5) $$y^{(4)}(x) - r^4 y(x) = 0 \ .$$

Cuando la viga se sujeta en ambos extremos, buscamos una solución de (5) que satisfaga las condiciones de frontera

(6) $$y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{y} \quad y(L) = y'(L) = 0 \ ,$$

donde L es la longitud de la viga. El problema es determinar aquellos valores no negativos de r para los que la ecuación (5) tiene una solución no trivial $(y(x) \not\equiv 0)$ que satisfaga (6). Para esto, proceda como sigue:

(a) Muestre que no hay soluciones no triviales del problema con valores en la frontera (5)−(6) cuando $r = 0$.

(b) Represente la solución general de (5) para $r > 0$ en términos de senos, cosenos, senos hiperbólicos y cosenos hiperbólicos.

(c) Sustituya la solución general obtenida en la parte (b) en las ecuaciones (6) para obtener cuatro ecuaciones algebraicas lineales para los cuatro coeficientes que aparecen en la solución general.

(d) Muestre que el sistema de ecuaciones de la parte (c) tiene soluciones no triviales sólo para aquellos valores de r que satisfacen

(7) $$\cosh(rL) = \sec(rL) .$$

(e) En el mismo sistema de coordenadas, bosqueje las gráficas de $\cosh(rL)$ y $\sec(rL)$ para $L = 1$, y justifique que la ecuación (7) tiene una infinidad de soluciones positivas.

(f) Para $L = 1$, determine las dos primeras soluciones positivas de (7) en forma numérica, y grafique las soluciones correspondientes al problema con valores en la frontera (5)−(6). [*Sugerencia*: Tal vez desee utilizar el método de Newton del apéndice A].

CAPÍTULO 7

Transformadas de Laplace

7.1 INTRODUCCIÓN: UN PROBLEMA DE MEZCLAS

La figura 7.1 muestra un problema de mezclas con alimentadores controlados mediante válvulas. En el instante $t = 0$ se abre la válvula *A*, para transferir 6 litros/minuto de una solución salina con 0.4 kg de sal por litro. Cuando $t =$ 10 minutos, la válvula *A* se cierra y se abre la válvula *B* y comienzan a pasar 6 litros/minuto de solución salina con una concentración de 0.2 kg/litro. En un principio había 30 kg de sal disueltos en 1000 litros de agua en el tanque. La válvula de salida *C*, que vacía al tanque a razón de 6 litros/minuto, mantiene el contenido del tanque a volumen constante. Si la solución se mantiene bien revuelta, determine la cantidad de sal en el tanque para cada $t > 0$.

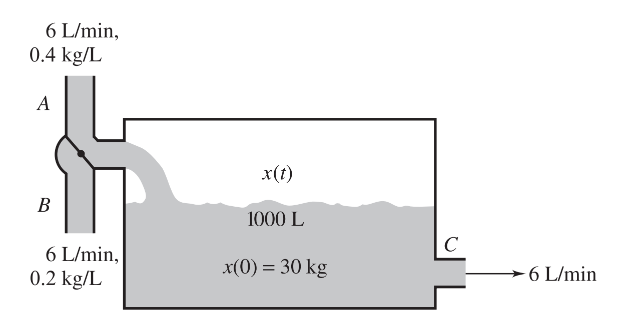


Figura 7.1 Tanque mezclador con la válvula *A* abierta

En el ejemplo 1 de la sección 3.2 analizamos una versión más sencilla de este problema. Sea $x(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) en el tanque en el instante t. Entonces, por supuesto, $x(t)/1{,}000$ es la concentración, en kg/L. El contenido de sal se reduce a razón de (6 L/min) $\times$

$(x(t)/1{,}000 \text{ kg/L}) = 3x(t)/500$ kg/min a través de la válvula de salida. De manera simultánea, se enriquece a través de las válvulas A y B a la razón $g(t)$, dada por

$$\textbf{(1)} \qquad g(t) = \begin{cases} 0.4 \text{ kg/L} \times 6 \text{ L/min} = 2.4 \text{ kg/min} , & 0 < t < 10 \text{ (válvula } A) , \\ 0.2 \text{ kg/L} \times 6 \text{ L/min} = 1.2 \text{ kg/min} , & t > 10 \text{ (válvula } B) . \end{cases}$$

Así, $x(t)$ cambia a razón

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(t) - \frac{3x(t)}{500} ,$$

o

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{3}{500}x = g(t) ,$$

con condición inicial

$$\textbf{(3)} \qquad x(0) = 30 .$$

Para resolver el problema con valor inicial (2)-(3), usando las técnicas del capítulo 4, tendríamos que descomponer el intervalo de tiempo $(0, \infty)$ en dos subintervalos $(0, 10)$ y $(10, \infty)$. En estos subintervalos, el término no homogéneo $g(t)$ es constante y podemos aplicar el método de coeficientes indeterminados a la ecuación (2) para determinar soluciones generales en cada subintervalo, cada una de las cuales tendría una constante arbitraria (en las soluciones homogéneas asociadas). La condición inicial (3) fijaría esta constante para $0 < t < 10$, pero entonces tendríamos que evaluar $x(10)$ y usarla para establecer la constante en la solución general para $t > 10$.

Nuestro propósito ahora es ilustrar un nuevo método usando la transformada de Laplace. Como veremos, este método ofrece varias ventajas sobre las técnicas anteriores. Una de ellas es que es mucho más conveniente para resolver problemas con valores iniciales para ecuaciones lineales con coeficientes constantes cuando el término de forzamiento tiene discontinuidades de salto.

La **transformada de Laplace** de una función $f(t)$, definida en $[0, \infty)$ está dada por[†]

$$\textbf{(4)} \qquad F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt .$$

[†]***Nota histórica:*** La transformada de Laplace fue introducida por Pierre Laplace en 1779 en su investigación de probabilidad. G. Doetsch ayudó a desarrollar el uso de transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Su trabajo en la década de 1930 sirvió para justificar los procedimientos de cálculo operacional que ya habían sido utilizados por Oliver Heaviside.

Así, multiplicamos $f(t)$ por e^{-st} e integramos con respecto de t de 0 a ∞. Esto toma una función de t y produce una función de s.

En este capítulo analizaremos muchos de los detalles de este "intercambio de funciones", pero por ahora sólo estableceremos la principal ventaja de la ejecución de la transformada. *¡La transformada de Laplace reemplaza las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes en el dominio t por ecuaciones algebraicas (más sencillas) en el dominio s!* En particular, si $X(s)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$, entonces la transformada de $x'(t)$ es simplemente $sX(s) - x(0)$. Por tanto, la información sobre la ecuación diferencial (2) y la condición inicial (3) se transforma del dominio t al dominio s de manera sencilla, como

	Dominio t	**Dominio s**
(5)	$x'(t) + \frac{3}{500}x(t) = g(t), \quad x(0) = 30;$	$sX(s) - 30 + \frac{3}{500}X(s) = G(s)$,

donde $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$. (Observe que hemos supuesto válidas algunas propiedades de linealidad, como el hecho de que la transformada preserva sumas y multiplicaciones por constantes). Podemos determinar $X(s)$ en el dominio s sin resolver ecuaciones diferenciales: la solución es simplemente

(6) $$X(s) = \frac{30}{s + 3/500} + \frac{G(s)}{s + 3/500} \ .$$

Para que este procedimiento sea útil, debe haber una forma sencilla de pasar del dominio t al dominio s y viceversa. De hecho, existen tablas y teoremas que facilitan esta conversión en muchas circunstancias útiles. Por ejemplo, veremos que la transformada de $g(t)$, a pesar de su poco agradable especificación por partes en la ecuación (1), está dada por la sola fórmula

$$G(s) = \frac{2.4}{s} - \frac{1.2}{s}e^{-10s} \ ,$$

y como consecuencia, la transformada de $x(t)$ es igual a

$$X(s) = \frac{30}{s + 3/500} + \frac{2.4}{s(s + 3/500)} - \frac{1.2e^{-10s}}{s(s + 3/500)} \ .$$

Usando de nuevo la tabla (y algo de teoría) podemos deducir que

(7) $$x(t) = 400 - 370e^{-3t/500} - 200 \cdot \begin{cases} 0 \ , & t \leq 10 \ , \\ \left[1 - e^{-3(t-10)/500}\right] , & t \geq 10 \ . \end{cases}$$

Véase la figura 7.2.

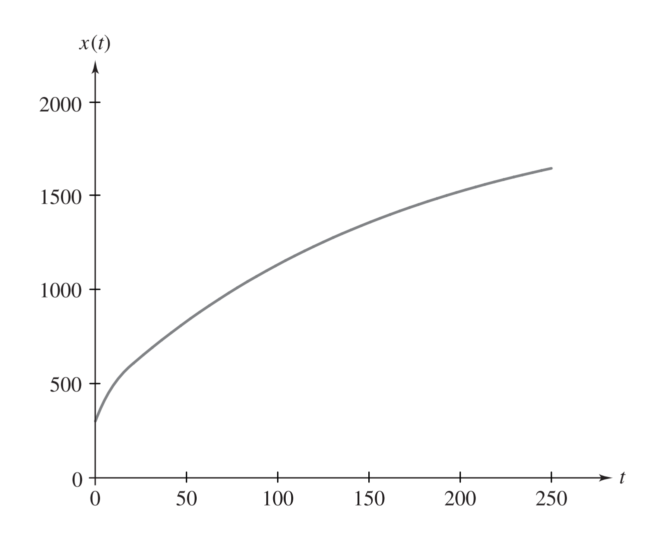


Figura 7.2 Solución del ejemplo del tanque mezclador

Observe que para llegar a (7) no tuvimos que calcular las derivadas de las soluciones de prueba, descomponer intervalos o evaluar constantes mediante los datos iniciales. La maquinaria de la transformada de Laplace reemplaza todos estos operadores por álgebra elemental: suma, resta, multiplicación y división (por supuesto, usando con juicio la tabla). La figura 7.3 muestra las ventajas del método de la transformada.

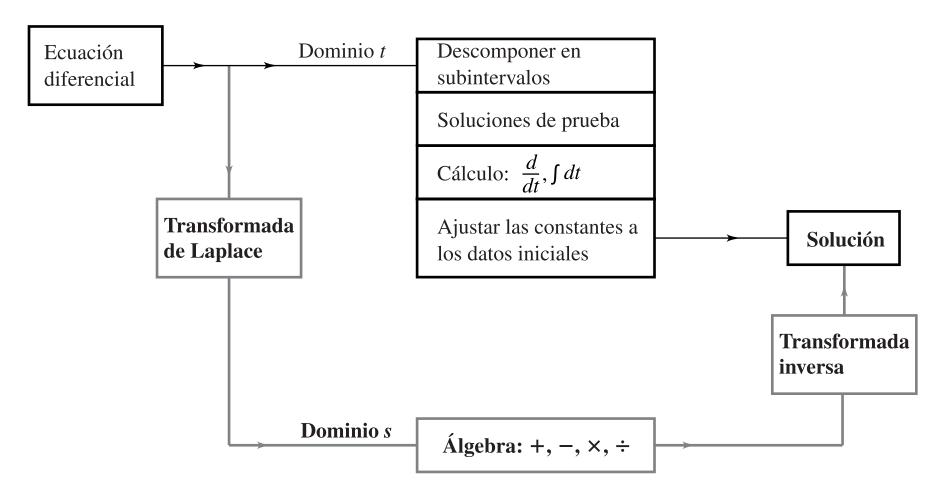


Figura 7.3 Comparación de los métodos de solución

Por desgracia, el método de la transformada de Laplace es menos útil con ecuaciones que tienen coeficientes variables o con ecuaciones no lineales (y a veces, ¡la determinación de las transformadas inversas puede ser una tarea para Hércules!) Pero es ideal para muchos problemas que surgen en las aplicaciones. Así, en este capítulo abordamos este importante tema.

7.2 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En los capítulos anteriores estudiamos los operadores diferenciales. Estos operadores consideran una función y la transforman (mediante la derivación) en otra función. La transformada de Laplace, que es un operador integral, es otra de tales transformaciones.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición 1. Sea $f(t)$ una función en $[0, \infty)$. La **transformada de Laplace** de f es la función F definida mediante la integral

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \,. \tag{1}$$

El dominio de $F(s)$ está formado por todos los valores de s para los que la integral en (1) existe.† La transformada de Laplace de f se denota como F o $\mathcal{L}\{f\}$.

Observe que la integral en (1) es una integral **impropia**. Más precisamente,

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt := \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)\,dt$$

siempre que el límite exista.

EJEMPLO 1 Determinar la transformada de Laplace de la función constante $f(t) = 1,\ t \geq 0$.

SOLUCIÓN Usamos la definición de la transformada para calcular

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\,dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=0}^{t=N} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s}\right] . \end{aligned}$$

†Consideramos a s con valores reales, pero en ciertas aplicaciones s puede ser una variable compleja. Para un tratamiento detallado de las transformadas de Laplace con valores complejos, véase *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, por Wilbur R. LePage (Dover Publications, Nueva York, 1980), o *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science* (3a. ed), por E. B. Saff y A. D. Snider (Prentice Hall, 2003).

Como $e^{-sN} \to 0$ cuando $s > 0$ está fijo y $N \to \infty$, obtenemos

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \text{para } s > 0 \ .$$

Cuando $s \leq 0$, la integral $\int_0^\infty e^{-st}\,dt$ diverge. (¿Por qué?) Por lo tanto, $F(s) = 1/s$, donde el dominio de $F(s)$ es $s > 0$. ■

EJEMPLO 2 Determinar la transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$, donde a es una constante.

SOLUCIÓN Usamos la definición de la transformada:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-(s-a)t}\,dt = \lim_{N\to\infty} \left.\frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^N \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)N}}{s-a}\right] \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{para } s > a \ . \end{aligned}$$

De nuevo, si $s \leq a$ la integral diverge, y por tanto el dominio de $F(s)$ es $s > a$. ■

Es confortante observar en el ejemplo 2 que la transformada de la función constante $f(t) = 1 = e^{0t}$ es $1/(s - 0) = 1/s$, lo que coincide con la solución en el ejemplo 1.

EJEMPLO 3 Determinar $\mathcal{L}\{\text{sen}\ bt\}$, donde b es una constante no nula.

SOLUCIÓN Debemos calcular

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,bt\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen}\,bt\,dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}\,\text{sen}\,bt\,dt \ .$$

Si regresamos a la tabla de integrales en los forros, vemos que

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,bt\}(s) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(-s\ \text{sen}\,bt - b\cos bt)\Big|_0^N\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{b}{s^2+b^2} - \frac{e^{-sN}}{s^2+b^2}(s \operatorname{sen} bN + b\cos bN)\right]$$

$$= \frac{b}{s^2+b^2} \quad \text{para } s > 0$$

(ya que para tal s tenemos $\lim_{N\to\infty} e^{-sN}(s \text{ sen } bN + b \cos bN) = 0$; véase el problema 32). ■

EJEMPLO 4 Determinar la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} 2\,, & 0 < t < 5\,, \\ 0\,, & 5 < t < 10\,, \\ e^{4t}\,, & 10 < t\,. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Como $f(t)$ está definida mediante una fórmula distinta en intervalos diferentes, primero descomponemos la integral en tres partes.† Así,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\ &= \int_0^5 e^{-st}\cdot 2\,dt + \int_5^{10} e^{-st}\cdot 0\,dt + \int_{10}^\infty e^{-st}e^{4t}\,dt \\ &= 2\int_0^5 e^{-st}\,dt + \lim_{N\to\infty}\int_{10}^N e^{-(s-4)t}\,dt \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \lim_{N\to\infty}\left[\frac{e^{-10(s-4)}}{s-4} - \frac{e^{-(s-4)N}}{s-4}\right] \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-10(s-4)}}{s-4} \quad \text{para } s > 4\,. \ ■ \end{aligned}$$

Observe que la función $f(t)$ del ejemplo 4 tiene discontinuidades de salto en $t = 5$ y $t = 10$. Estos valores se reflejan en los términos exponenciales e^{-5t} y e^{-10t} que aparecen en la fórmula para $F(s)$. Haremos más precisa esta relación al analizar la función escalón unitario en la sección 7.6.

Una propiedad importante de la transformada de Laplace es su **linealidad**. Es decir, la transformada de Laplace $\mathscr{L}$ es un operador lineal.

---

†Observe que $f(t)$ no está definida en los puntos $t = 0$, 5 y 10. Sin embargo, la integral en (1) sigue teniendo sentido y no es afectada por los valores de la función en un número finito de puntos.

LINEALIDAD DE LA TRANSFORMADA

Teorema 1. Sean f, f_1 y f_2 funciones cuyas transformadas de Laplace existen para $s > \alpha$ y sea c una constante. Entonces, para $s > \alpha$,

(2) $$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\} ,$$

(3) $$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\} .$$

Demostración. Usamos las propiedades de linealidad para la integración para obtener, para $s > \alpha$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1 + f_2\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}[f_1(t) + f_2(t)]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{f_1\}(s) + \mathcal{L}\{f_2\}(s) .\end{aligned}$$

Por tanto, se satisface la ecuación (2). De manera similar, vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{cf\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}[cf(t)]dt = c\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= c\mathcal{L}\{f\}(s) . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determinar $\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \operatorname{sen} 2t\}$.

SOLUCIÓN Por la propiedad de linealidad, sabemos que la transformada de Laplace de la suma de cualquier número finito de funciones es la suma de sus transformadas de Laplace. Así,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \operatorname{sen} 2t\} &= \mathcal{L}\{11\} + \mathcal{L}\{5e^{4t}\} + \mathcal{L}\{-6 \operatorname{sen} 2t\} \\ &= 11\mathcal{L}\{1\} + 5\mathcal{L}\{e^{4t}\} - 6\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} .\end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 3 determinamos que

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} , \qquad \mathcal{L}\{e^{4t}\}(s) = \frac{1}{s-4} , \qquad \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2} .$$

Usamos estos resultados para obtener que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \operatorname{sen} 2t\}(s) &= 11\left(\frac{1}{s}\right) + 5\left(\frac{1}{s-4}\right) - 6\left(\frac{2}{s^2+4}\right) \\ &= \frac{11}{s} + \frac{5}{s-4} - \frac{12}{s^2+4} .\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}\{1\}$, $\mathcal{L}\{e^{4t}\}$ y $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}$ están todas definidas para $s > 4$, ocurre lo mismo con la transformada $\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \operatorname{sen} 2t\}$. $\blacksquare$

Existencia de la transformada

Hay funciones para las que la integral impropia de (1) no converge para cualquier valor de x. Por ejemplo, la función $f(t) = 1/t$, que crece demasiado rápido cerca de cero. De manera similar, no existe una transformada de Laplace para la función $f(t) = e^{t^2}$, que crece demasiado rápido cuando $t \to \infty$. Por fortuna, el conjunto de funciones para las que está definida incluye muchas de las funciones que surgen en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales. Ahora analizaremos algunas propiedades que nos garantizarán (en conjunto) la existencia de la transformada de Laplace.

Una función $f(t)$ en $[a, b]$ tiene una **discontinuidad de salto** en $t_0 \in (a, b)$ si $f(t)$ es discontinua en t_0, pero los límites laterales

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \to t_0^+} f(t)$$

existen como números finitos. Si la discontinuidad ocurre en un extremo $t_0 = a$ (o b), hay una discontinuidad de salto si el límite lateral de $f(t)$ cuando $t \to a^+$ $(t \to b^-)$ existe como número finito. Ahora podemos definir la continuidad por partes.

CONTINUIDAD POR PARTES

Definición 2. Una función $f(t)$ es **continua por partes en un intervalo finito** $[a, b]$ si $f(t)$ es continua en cada punto de $[a, b]$ excepto en un número finito de puntos donde $f(t)$ tiene una discontinuidad de salto.

Una función $f(t)$ es **continua por partes en $[0, \infty)$** si $f(t)$ es continua por partes en $[0, N]$ para toda $N > 0$.

EJEMPLO 6 Mostrar que

$$f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 < t < 1\,, \\ 2\,, & 1 < t < 2\,, \\ (t-2)^2\,, & 2 \le t \le 3\,, \end{cases}$$

cuya gráfica aparece en la figura 7.4, es continua por partes en $[0, 3]$.

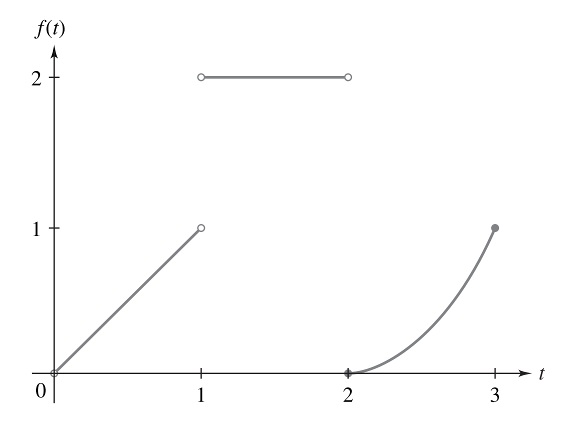


Figura 7.4 Gráfica de $f(t)$ en el ejemplo 6

SOLUCIÓN La gráfica de $f(t)$ muestra que $f(t)$ es continua en los intervalos $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 3]$. Además, en los puntos de discontinuidad, $t = 0$, 1 y 2, la función tiene discontinuidades de salto, pues los límites laterales existen como números finitos. En particular, en $t = 1$, el límite izquierdo es 1 y el límite derecho es 2. Por lo tanto $f(t)$ es continua por partes en $[0, 3]$. ■

Observe que la función $f(t)$ del ejemplo 4 es continua por partes en $[0, \infty)$ pues es continua por partes en todo intervalo finito de la forma $[0, N]$ con $N > 0$. En contraste, la función $f(t) = 1/t$ no es continua por partes en ningún intervalo que contenga al origen, pues tiene un "salto infinito" en el origen (véase la figura 7.5).

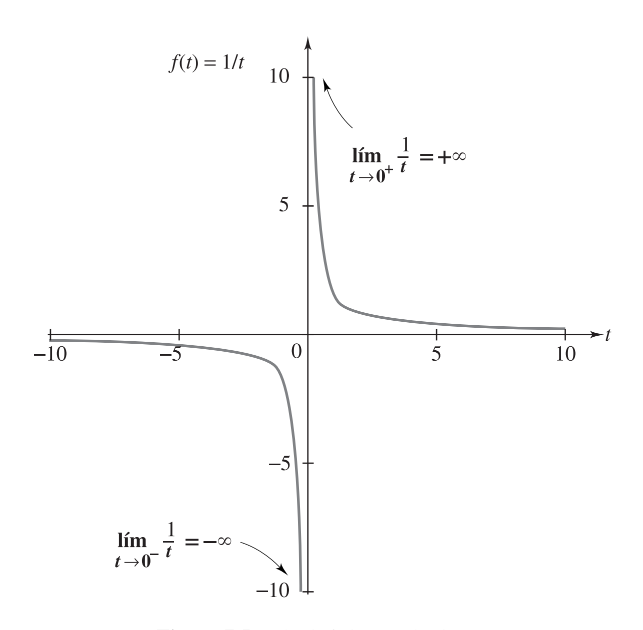


Figura 7.5 Salto infinito en el origen

Una función que es continua por partes en un intervalo *finito* es necesariamente integrable en ese intervalo. Sin embargo, la continuidad por partes en $[0, \infty)$ no basta para garantizar la existencia (como número finito) de la integral impropia en $[0, \infty)$; también debemos tomar en cuenta el crecimiento del integrando para t grande. A grandes rasgos, mostraremos que la transformada de Laplace de una función continua por partes existe, siempre que la función no crezca "más rápido que una exponencial".

EXPONENCIAL DE ORDEN α

Definición 3. Una $f(t)$ es de **orden exponencial α** si existen constantes positivas T y M tales que

(4) $$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}\ , \quad \text{para toda } t \geq T\ .$$

Por ejemplo, $f(t) = e^{5t}$ sen $2t$ es de orden exponencial $\alpha = 5$, pues

$$|e^{5t}\operatorname{sen}2t| \le e^{5t} \ ,$$

y por lo tanto (4) se cumple con $M = 1$ y T cualquier constante positiva.

Usamos la frase $f(t)$ *es de orden exponencial* para indicar que para *algún* valor de α, la función $f(t)$ satisface las condiciones de la definición 3; es decir, $f(t)$ no crece más rápido que una función de la forma $Me^{\alpha t}$. La función e^{t^2} *no* es de orden exponencial. Para ver esto, observe que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} e^{t(t-\alpha)} = +\infty$$

para cualquier α. En consecuencia, e^{t^2} crece más rápido que $e^{\alpha t}$ para cualquier elección de α.

Las funciones que aparecen por lo general al resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (por ejemplo, polinomios, exponenciales, senos y cosenos) son tanto continuas por partes como de orden exponencial. Como mostraremos a continuación, las transformadas de Laplace de tales funciones existen para valores suficientemente grandes de s.

CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA

Teorema 2. Si $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α, entonces $\mathscr{L}\{f\}(s)$ existe para $s > \alpha$.

Demostración. Debemos mostrar que la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

converge para $s > \alpha$. Primero separamos esta integral en dos:

(5) $$\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt \ ,$$

donde T se elige de modo que se cumpla la desigualdad (4). La primera integral en (5) existe porque $f(t)$ y por tanto $e^{-st}f(t)$ son continuas por partes en el intervalo $[0, T]$ para cualquier s fija. Para ver que la segunda integral de (5) converge usamos el **criterio de comparación para integrales impropias**.

Como $f(t)$ es de orden exponencial α, tenemos que para $t \ge T$

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t} \ ,$$

y por tanto

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-st}|f(t)| \le Me^{-(s-\alpha)t} \ ,$$

para toda $t \ge T$. Ahora, para $s > \alpha$.

$$\int_T^\infty Me^{-(s-\alpha)t}\,dt = M\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt = \frac{Me^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha} < \infty \ .$$

Como $|e^{-st}f(t)| \le Me^{-(s-\alpha)t}$ para $t \ge T$ y la integral impropia de la función mayor converge

para $s > \alpha$, el criterio de comparación muestra que la integral

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

converge para $s > \alpha$. Por último, como las dos integrales en (5) existen, la transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f\}(s)$ existe para $s > \alpha$. ■

En la tabla 7.1 hemos enumerado las transformadas de Laplace de algunas de las funciones elementales. El lector debe familiarizarse con ellas, pues aparecen con frecuencia en los problemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Los datos de la tabla se pueden deducir de la definición de la transformada de Laplace. En los forros de este libro aparece una tabla más completa de transformadas.

TABLA 7.1 BREVE TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$e^{at}t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$

EJERCICIOS 7.2

En los problemas 1 a 12, use la definición 1 para determinar la transformada de Laplace de la función dada.

1. t .

2. t^2 .

3. e^{6t} .

4. te^{3t} .

5. $\cos 2t$.

6. $\cos bt$, b constante.

7. $e^{2t} \cos 3t$.

8. $e^{-t} \operatorname{sen} 2t$.

9. $f(t) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t < 2\ , \\ t\ , & 2 < t\ . \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} 1 - t\ , & 0 < t < 1\ , \\ 0\ , & 1 < t\ . \end{cases}$

11. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t\ , & 0 < t < \pi\ , \\ 0\ , & \pi < t\ . \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} e^{2t}\ , & 0 < t < 3\ , \\ 1\ , & 3 < t\ . \end{cases}$

En los problemas 13 a 20, use la tabla de transformadas de Laplace y la linealidad de la transformada de Laplace para determinar las siguientes transformadas.

13. $\mathscr{L}\{6e^{-3t} - t^2 + 2t - 8\}$.

14. $\mathscr{L}\{5 - e^{2t} + 6t^2\}$.

15. $\mathscr{L}\{t^3 - te^t + e^{4t}\cos t\}$.

16. $\mathscr{L}\{t^2 - 3t - 2e^{-t}\operatorname{sen} 3t\}$.

17. $\mathscr{L}\{e^{3t}\operatorname{sen} 6t - t^3 + e^t\}$.

18. $\mathscr{L}\{t^4 - t^2 - t + \operatorname{sen}\sqrt{2}t\}$.

19. $\mathscr{L}\{t^4 e^{5t} - e^t\cos\sqrt{7}t\}$.

20. $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos\sqrt{3}t - t^2 e^{-2t}\}$.

En los problemas 21 a 28, determine si $f(t)$ *es continua, continua por partes, o ninguna de las dos en* $[0, 10]$ *y bosqueje la gráfica de* $f(t)$.

21. $f(t) = \begin{cases} 1\ , & 0 \le t \le 1\ , \\ (t-2)^2\ , & 1 < t \le 10\ , \end{cases}$

22. $f(t) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le t < 2\ , \\ t\ , & 2 \le t \le 10\ . \end{cases}$

23. $f(t) = \begin{cases} 1\ , & 0 \le t < 1\ , \\ t - 1\ , & 1 < t < 3\ , \\ t^2 - 4\ , & 3 < t \le 10\ . \end{cases}$

24. $f(t) = \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 4}$.

25. $f(t) = \dfrac{t^2 - t - 20}{t^2 + 7t + 10}$.

26. $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

27. $f(t) = \begin{cases} 1/t\ , & 0 < t < 1\ , \\ 1\ , & 1 \le t \le 2\ , \\ 1 - t\ , & 2 < t \le 10\ . \end{cases}$

28. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\ , & t \neq 0\ , \\ 1\ , & t = 0\ . \end{cases}$

29. ¿Cuáles de las siguientes funciones son de orden exponencial?

(a) $t^3 \operatorname{sen} t$. (b) $100e^{49t}$.

(c) e^{t^3} . (d) $t \ln t$.

(e) $\cosh(t^2)$. (f) $\dfrac{1}{t^2 + 1}$.

(g) $\operatorname{sen}(t^2) + t^4 e^{6t}$. (h) $3 - e^{t^2} + \cos 4t$.

(i) $\exp\{t^2/(t+1)\}$. (j) $\operatorname{sen}(e^{t^2}) + e^{\operatorname{sen} t}$.

30. Para las transformadas $F(s)$ de la tabla 7.1, ¿qué se puede decir acerca de $\lim_{s \to \infty} F(s)$?

31. Gracias a la fórmula de Euler (página 168) y las propiedades algebraicas de los números complejos, varios de los datos de la tabla 7.1 se pueden deducir de una sola fórmula; a saber,

$$\textbf{(6)} \quad \mathscr{L}\left\{e^{(a+ib)t}\right\}(s) = \frac{s - a + ib}{(s-a)^2 + b^2}\ , \qquad s > a.$$

(**a**) Calcule la integral en la definición de la transformada de Laplace de la página 351 con $f(t) = e^{(a+ib)t}$ para mostrar que

$$\mathscr{L}\left\{e^{(a+ib)t}\right\}(s) = \frac{1}{s - (a+ib)}\ , \qquad s > a.$$

(**b**) Deduzca (6) de la parte (a) mostrando que

$$\frac{1}{s - (a+ib)} = \frac{s - a + ib}{(s-a)^2 + b^2}\ .$$

(**c**) Iguale las partes real e imaginaria de la fórmula (6) para deducir las dos últimas entradas de la tabla 7.1.

32. Demuestre que para $s > 0$ fijo, tenemos

$$\lim_{N \to \infty} e^{-sN}(s \operatorname{sen} bN + b\cos bN) = 0\ .$$

33. Demuestre que si f es continua por partes en $[a, b]$ y g es continua en $[a, b]$, entonces el producto fg es continuo por partes en $[a, b]$.

7.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En la sección anterior definimos la transformada de Laplace de una función $f(t)$ como

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \ .$$

El uso de esta definición para obtener una expresión explícita para $\mathcal{L}\{f\}$ requiere la evaluación de la integral impropia, lo que con frecuencia es una tarea tediosa. Ya hemos visto que la propiedad de linealidad de la transformada nos puede ser de ayuda. En esta sección analizamos algunas propiedades adicionales de la transformada de Laplace que simplifican su cálculo. Estas nuevas propiedades nos permitirán usar la transformada de Laplace para resolver problemas con valores iniciales.

TRANSLACIÓN EN *s*

Teorema 3. Si la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces

(1) $$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a)$$

para $s > \alpha + a$.

Demostración. Simplemente calculamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt \\ &= F(s - a) \ . \ \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema 3 ilustra el efecto sobre la transformada de Laplace de la multiplicación de una función $f(t)$ por e^{at} .

EJEMPLO 1 Determinar la transformada de Laplace de e^{at} sen bt.

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 de la sección 7.2 vimos que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \ .$$

Así, por la propiedad de traslación de $F(s)$, tenemos

$$\mathcal{L}\{e^{at} \operatorname{sen} bt\}(s) = F(s - a) = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2} \ . \ \blacksquare$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA

Teorema 4. Sea $f(t)$ continua en $[0, \infty)$ y $f'(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$, ambas de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$,

$$\textbf{(2)} \qquad \mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0) \ .$$

Demostración. Como $\mathscr{L}\{f'\}$ existe, podemos integrar por partes (con $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)dt$) para obtener

$$\textbf{(3)} \qquad \mathscr{L}\{f'\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}f'(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\Big|_0^N + s\int_0^N e^{-st}f(t)dt\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}f(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s\mathscr{L}\{f\}(s) \ .$$

Para evaluar $\lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N)$, observamos que como $f(t)$ es de orden exponencial α, existe una constante M tal que para N grande,

$$|e^{-sN}f(N)| \le e^{-sN}Me^{\alpha N} = Me^{-(s-\alpha)N} \ .$$

Por lo tanto, para $s > \alpha$,

$$0 \le \lim_{N\to\infty}|e^{-sN}f(N)| \le \lim_{N\to\infty} Me^{-(s-\alpha)N} = 0 \ ,$$

de modo que

$$\lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) = 0$$

para $s > \alpha$. La ecuación (3) se reduce a

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0) \ . \quad \blacksquare$$

Podemos usar inducción para extender el último teorema a derivadas de orden superior de $f(t)$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''\}(s) &= s\mathscr{L}\{f'\}(s) - f'(0)\\ &= s[s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0)] - f'(0) \ ,\end{aligned}$$

lo que se simplifica como

$$\mathscr{L}\{f''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0) \ .$$

En general, obtenemos el siguiente resultado.

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE DERIVADAS EN ORDEN SUPERIOR

Teorema 5. Sean $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ continuas en $[0, \infty)$ y sea $f^{(n)}(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$, con todas estas funciones de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$,

$$\textbf{(4)} \qquad \mathscr{L}\left\{f^{(n)}\right\}(s) = s^n\mathscr{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) .$$

Los últimos dos teoremas arrojan cierta luz acerca del porqué la transformada de Laplace es una herramienta tan útil para resolver problemas con valores iniciales. A grandes rasgos, nos dicen que al usar la transformada de Laplace podemos reemplazar la "derivación con respecto de *t*" con la "multiplicación por *s*", convirtiendo con ello una ecuación diferencial en una ecuación algebraica. Esta idea se explora en la sección 7.5. Por ahora, mostraremos la forma en que el teorema 4 puede ser útil para calcular una transformada de Laplace.

EJEMPLO 2 Usar el teorema 4 y el hecho de que

$$\mathscr{L}\{\text{sen } bt\}(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} ,$$

para determinar $\mathscr{L}\{\cos bt\}$.

SOLUCIÓN Sea $f(t) = \text{sen } bt$. Entonces $f(0) = 0$ y $f'(t) = b \cos bt$. Al sustituir esto en la ecuación (2), tenemos

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0) ,$$
$$\mathscr{L}\{b \cos bt\}(s) = s\mathscr{L}\{\text{sen } bt\}(s) - 0 ,$$
$$b\mathscr{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{sb}{s^2 + b^2} .$$

Al dividir entre *b* tenemos

$$\mathscr{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{s}{s^2 + b^2} . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Demostrar la siguiente identidad para funciones continuas $f(t)$ (suponiendo que la transformada existe):

$$\textbf{(5)} \qquad \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}(s) .$$

Usar esta identidad para verificar la solución del ejemplo 2.

SOLUCIÓN Definimos la función $g(t)$ mediante la integral

$$g(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau .$$

Observe que $g(0) = 0$ y $g'(t) = f(t)$. Así, si aplicamos el teorema 4 a $g(t)$ [en vez de $f(t)$],

la ecuación (2) de la página 361 se lee

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}(s) - 0 \ ,$$

que es equivalente a la ecuación (5).

Ahora, como

$$\text{sen } bt = \int_0^t b \cos b\tau \, d\tau \ ,$$

la ecuación (5) predice que

$$\mathcal{L}\{\text{sen } bt\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{b \cos bt\}(s) = \frac{b}{s}\mathcal{L}\{\cos bt\}(s).$$

Esta identidad es válida para las transformadas del ejemplo 2. ■

Otra cuestión surge en relación con la transformada de Laplace. Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, ¿es $F'(s)$ una transformada de Laplace de alguna función de t? La respuesta es afirmativa:

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) \ .$$

En realidad tenemos el siguiente resultado más general.

DERIVADAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Teorema 6. Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ y suponga que $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α. Entonces para $s > \alpha$,

(6) $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) \ .$$

Demostración. Considere la identidad

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \ .$$

Debido a la hipótesis sobre $f(t)$, podemos aplicar un teorema de cálculo avanzado (a veces llamado **regla de Leibniz**) para intercambiar el orden de integración y derivación:

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st})f(t)dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \ .$$

Así,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = (-1)\frac{dF}{ds}(s) \ .$$

El resultado general (6) se sigue al aplicar inducción sobre n. ■

Una consecuencia del teorema anterior es que si $f(t)$ es continua por partes y de orden exponencial, entonces su transformada $F(s)$ tiene derivadas de todos los órdenes.

EJEMPLO 4 Determinar $\mathscr{L}\{t \text{ sen } bt\}$.

SOLUCIÓN Ya sabemos que

$$\mathscr{L}\{\text{sen } bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} .$$

Al derivar $F(s)$ obtenemos

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{-2bs}{(s^2 + b^2)^2} .$$

Por tanto, al usar la fórmula (6), tenemos

$$\mathscr{L}\{t \text{ sen } bt\}(s) = -\frac{dF}{ds}(s) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2} . \quad \blacksquare$$

Para una mejor referencia, en la tabla 7.2 enumeramos algunas de las propiedades básicas de la transformada de Laplace deducidas hasta ahora.

TABLA 7.2 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE
$\mathscr{L}\{f + g\} = \mathscr{L}\{f\} + \mathscr{L}\{g\}$.
$\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$ para cualquier constante c.
$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s - a)$.
$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0)$.
$\mathscr{L}\{f''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$.
$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}\right\}(s) = s^n\mathscr{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.
$\mathscr{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathscr{L}\{f\}(s)\right)$.

EJERCICIOS 7.3

En los problemas 1 a 20, determine la transformada de Laplace de la función dada usando la tabla 7.1 y las propiedades de la transformada dadas en la tabla 7.2. [*Sugerencia: En los problemas 12 a 20, use una identidad trigonométrica adecuada*].

1. $t^2 + e^t \text{sen } 2t$.

2. $3t^2 - e^{2t}$.

3. $e^{-t}\cos 3t + e^{6t} - 1$.

4. $3t^4 - 2t^2 + 1$.

5. $2t^2e^{-t} - t + \cos 4t$.

6. $e^{-2t}\text{sen } 2t + e^{3t}t^2$.

7. $(t - 1)^4$.

8. $(1 + e^{-t})^2$.

9. $e^{-t}\, t \text{ sen } 2t$.

10. $te^{2t}\cos 5t$.

11. $\cosh bt$.

12. $\text{sen } 3t \cos 3t$.

13. $\text{sen}^2 t$.

14. $e^{7t}\text{sen}^2 t$.

15. $\cos^3 t$.

16. $t\ \text{sen}^2 t$.

17. $\text{sen}\ 2t\ \text{sen}\ 5t$.

18. $\cos nt \cos mt$, $m \neq n$.

19. $\cos nt\ \text{sen}\ mt$, $m \neq n$.

20. $t\ \text{sen}\ 2t\ \text{sen}\ 5t$.

21. Dado que $\mathscr{L}\{\cos bt\}(s) = s/(s^2 + b^2)$, use la propiedad de traslación para calcular $\mathscr{L}\{e^{at}\cos bt\}$.

22. Partiendo de la transformada $\mathscr{L}\{1\}(s) = 1/s$, use la fórmula (6) para las derivadas de la transformada de Laplace y muestre que $\mathscr{L}\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}$.

23. Use el teorema 4 para mostrar que la entrada 31 es consecuencia de la entrada 30 en la tabla de transformadas de Laplace de los forros de este texto.

24. Muestre que $\mathscr{L}\{e^{at}t^n\}(s) = n!/(s - a)^{n+1}$ de dos maneras:

(**a**) Use la propiedad de traslación para $F(s)$.

(**b**) Use la fórmula (6) para las derivadas de la transformada de Laplace.

25. Use la fórmula (6) como ayuda para determinar

(a) $\mathscr{L}\{t \cos bt\}$. **(b)** $\mathscr{L}\{t^2\cos bt\}$.

26. Sea $f(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial.

(**a**) Muestre que existen constantes K y α tales que

$$|f(t)| \leq Ke^{\alpha t} \qquad \text{para toda } t \geq 0 .$$

(**b**) Use la definición de la transformada y estime la integral con la ayuda de la parte (a) para demostrar que

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\{f\}(s) = 0 .$$

27. Sea $f(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$, de orden exponencial α y suponga que $\lim_{t\to 0^+}[f(t)/t]$ existe. Muestre que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u)du ,$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$. [*Sugerencia*: Muestre primero que $\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)/t\}(s) = -F(s)$ y luego use el resultado del problema 26].

28. Verifique la identidad del problema 27 para las siguientes funciones. (Use la tabla de transformadas de Laplace en los forros).

(a) $f(t) = t^5$. **(b)** $f(t) = t^{3/2}$.

29. La **función de transferencia** de un sistema lineal se define como el cociente de la transformada de Laplace de la función de salida $y(t)$ entre la transformada de Laplace de la función de entrada $g(t)$, cuando todas las condiciones iniciales se anulan. Si un sistema lineal queda descrito mediante la ecuación diferencial

$$y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = g(t) , \quad t > 0 ,$$

use la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace y el teorema 5 acerca de la transformada de Laplace de derivadas de orden superior para determinar la función de transferencia $H(s) = Y(s)/G(s)$ para este sistema.

30. Determine la función de transferencia, definida en el problema 29, para el sistema lineal descrito por

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = g(t) , \quad t > 0 .$$

31. Traslación en *t*. Muestre que para $c > 0$, la función trasladada

$$g(t) = \begin{cases} 0 , & 0 < t < c , \\ f(t - c) , & c < t \end{cases}$$

tiene transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = e^{-cs}\mathscr{L}\{f\}(s) .$$

En los problemas 32 a 35, sea $g(t)$ la traslación de la función dada $f(t)$ hacia la derecha en c unidades. Bosqueje $f(t)$ y $g(t)$ y determine $\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$. (Véase el problema 31).

32. $f(t) \equiv 1$, $c = 2$.

33. $f(t) = t$, $c = 1$.

34. $f(t) = \text{sen}\ t$, $c = \pi$.

35. $f(t) = \text{sen}\ t$, $c = \pi/2$.

36. Use la ecuación (5) para deducir la fórmula $\mathscr{L}\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}$. [*Sugerencia*: Comience con $\mathscr{L}\{1\}(s)$ y use inducción].

37. Teorema del valor inicial. Aplique la relación

$$\textbf{(7)}\quad \mathscr{L}\{f'\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0)$$

para ver que para cualquier función $f(t)$ cuya derivada sea continua por partes y de orden exponencial en $[0, \infty)$,

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) .$$

38. Verifique el teorema del valor inicial (problema 37) para las siguientes funciones. (Use la tabla de transformadas de Laplace en los forros).

(**a**) 1 . (**b**) e^t . (**c**) e^{-t} . (**d**) $\cos t$.
(**e**) $\text{sen}\ t$. (**f**) t^2 . (**g**) $t \cos t$.

7.4 TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

En la sección 7.2 definimos la transformada de Laplace como un operador integral que asocia a cada función $f(t)$ una función $F(s)$. En esta sección consideramos el problema de hallar la función $f(t)$ cuando tenemos la transformada $F(s)$. Es decir, buscamos una **transformación inversa** para la transformada de Laplace.

Para ver la utilidad de tal inversa, consideremos el problema con valores iniciales

$$\textbf{(1)} \qquad y'' - y = -t \; ; \qquad y(0) = 0 \; , \qquad y'(0) = 1 \; .$$

Si calculamos la transformada de ambos lados de la ecuación (1) y usamos la propiedad de linealidad de la transformada, tenemos

$$\mathscr{L}\{y''\}(s) - Y(s) = -\frac{1}{s^2} \; ,$$

donde $Y(s) := \mathscr{L}\{y\}(s)$. Conocemos los valores iniciales de la solución $y(t)$, de modo que podemos usar el teorema 5 de la página 362, acerca de la transformada de Laplace de las derivadas de orden superior para expresar

$$\mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1 \; .$$

Al sustituir esto en vez de $\mathscr{L}\{y''\}(s)$ tenemos

$$s^2Y(s) - 1 - Y(s) = -\frac{1}{s^2} \; .$$

Resolvemos esta ecuación algebraica para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1 - \left(\dfrac{1}{s^2}\right)}{s^2 - 1} = \frac{s^2 - 1}{s^2(s^2 - 1)} = \frac{1}{s^2} \; .$$

Recordemos ahora que $\mathscr{L}\{t\}(s) = 1/s^2$ y como $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$, tenemos

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = 1/s^2 = \mathscr{L}\{t\}(s) \; .$$

Por tanto, parece razonable concluir que $y(t) = t$ es la solución del problema con valores iniciales (1). ¡Podemos verificar esto rápidamente!

Observe que en el procedimiento anterior, un paso crucial consiste en determinar $y(t)$ a partir de su transformada de Laplace $Y(s) = 1/s^2$. Como hemos observado, $y(t) = t$ es tal función, pero *no* es la única función cuya transformada de Laplace es $1/s^2$. Por ejemplo, la transformada de

$$g(t) := \begin{cases} t \; , & t \neq 6 \; , \\ 0 \; , & t = 6 \end{cases}$$

también es $1/s^2$. Esto se debe a que la transformada es una integral, y la integral no es afectada por el cambio de los valores de una función en puntos aislados. La diferencia significativa entre $y(t)$ y $g(t)$, en lo que a nosotros respecta, es que $y(t)$ es continua en $[0, \infty)$, mientras que $g(t)$ no lo es. Naturalmente, preferimos trabajar con funciones continuas, pues las soluciones de ecuaciones diferenciales son continuas. Por fortuna, se puede mostrar que si dos funciones dife-

rentes tienen la misma transformada de Laplace, a lo más una de ellas puede ser continua.[†] Con esto en mente damos la siguiente definición.

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Definición 4. Dada una función $F(s)$, si existe una función $f(t)$ que sea continua en $[0, \infty)$ y satisfaga

$$\textbf{(2)} \qquad \mathscr{L}\{f\} = F \ ,$$

entonces decimos que $f(t)$ es la **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ y utilizamos la notación $f = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$.

Si cada función $f(t)$ que satisfaga (2) es discontinua (y por tanto no es solución de una ecuación diferencial), se podría elegir cualquiera de ellas como la transformada inversa; la distinción entre ellas no tiene trascendencia física. [De hecho, dos *funciones* continuas *por partes* que satisfagan (2) sólo pueden diferir en sus puntos de discontinuidad].

Naturalmente, las tablas de transformadas de Laplace serán de gran ayuda para determinar la transformada inversa de Laplace de una función dada $F(s)$.

EJEMPLO 1 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$, donde

$$\textbf{(a)}\ F(s) = \frac{2}{s^3}\ . \qquad \textbf{(b)}\ F(s) = \frac{3}{s^2+9}\ . \qquad \textbf{(c)}\ F(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+5}\ .$$

SOLUCIÓN Para calcular $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ consultamos la tabla de transformadas de Laplace de la página 358.

$$\textbf{(a)}\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) = t^2\ .$$

$$\textbf{(b)}\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}(t) = \operatorname{sen} 3t\ .$$

$$\textbf{(c)}\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t) = e^t\cos 2t\ .$$

En la parte (c) usamos la técnica de completar el cuadrado para reescribir el denominador en una forma fácil de ubicar en la tabla. ■

En la práctica, no siempre encontramos una transformada $F(s)$ que corresponda exactamente a una entrada de la segunda columna de la tabla de transformadas de Laplace. Para funciones $F(s)$ más complejas, usamos propiedades de $\mathscr{L}^{-1}$, así como antes usamos propiedades de $\mathscr{L}$. Una de tales herramientas es la linealidad de la transformada inversa de Laplace, propiedad que se hereda de la linealidad del operador $\mathscr{L}$.

[†]Este resultado y otras propiedades de la transformada de Laplace y de su inversa se pueden consultar en *Operational Mathematics*, 3a. edición, por R. V. Churchill (McGraw-Hill, Nueva York, 1972).

LINEALIDAD DE LA TRANSFORMADA INVERSA

Teorema 7. Suponga que $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$, $\mathscr{L}^{-1}\{F_1\}$ y $\mathscr{L}^{-1}\{F_2\}$ existen y son continuas en $[0,\infty)$ y sea c cualquier constante. Entonces

(3) $$\mathscr{L}^{-1}\{F_1+F_2\}=\mathscr{L}^{-1}\{F_1\}+\mathscr{L}^{-1}\{F_2\}\ ,$$

(4) $$\mathscr{L}^{-1}\{cF\}=c\mathscr{L}^{-1}\{F\}\ .$$

La demostración del teorema 7 se bosqueja en el problema 37. Ilustraremos la utilidad de este teorema en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s-6}-\dfrac{6s}{s^2+9}+\dfrac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$.

SOLUCIÓN Primero usamos la propiedad de linealidad. Así,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2(s^2+4s+5)}\right\}$$
$$=5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\}-6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}\ .$$

Al consultar la tabla de transformadas de Laplace, vemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\}(t)=e^{6t}\qquad \text{y}\qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}(t)=\cos 3t\ .$$

Esto nos proporciona los dos primeros términos. Para determinar $\mathscr{L}^{-1}\{1/(s^2+4s+5)\}$, completamos el cuadrado del denominador para obtener $s^2+4s+5=(s+2)^2+1$. Ahora reconocemos en las tablas que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\}(t)=e^{-2t}\operatorname{sen} t\ .$$

Por tanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}(t)=5e^{6t}-6\cos 3t+\frac{3e^{-2t}}{2}\operatorname{sen} t\ .\ \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{(s+2)^4}\right\}$.

SOLUCIÓN El término $(s+2)^4$ en el denominador sugiere que trabajemos con la fórmula

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}(t)=e^{at}t^n\ .$$

En este caso tenemos $a=-2$ y $n=3$, de modo que $\mathscr{L}^{-1}\{6/(s+2)^4\}(t)=e^{-2t}t^3$. Al usar la

propiedad de linealidad, tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}(t) = \frac{5}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s+2)^4}\right\}(t) = \frac{5}{6}e^{-2t}t^3 \ . \ \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}$.

SOLUCIÓN Al completar el cuadrado, podemos escribir el denominador como

$$s^2 + 2s + 10 = s^2 + 2s + 1 + 9 = (s+1)^2 + 3^2 \ .$$

La forma de $F(s)$ sugiere usar una o ambas fórmulas

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\cos bt \ ,$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\operatorname{sen} bt \ .$$

En este caso, $a = -1$ y $b = 3$. El siguiente paso es expresar

(5) $$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = A\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + B\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \ ,$$

donde A, B son constantes por determinar. Al multiplicar ambos lados de (5) por $s^2 + 2s + 10$ tenemos

$$3s + 2 = A(s+1) + 3B = As + (A + 3B) \ ,$$

que es una identidad entre dos polinomios en s. Al igualar los coeficientes de los términos semejantes, obtenemos

$$A = 3 \ , \qquad A + 3B = 2 \ ,$$

de modo que $A = 3$ y $B = -1/3$. Por último, (5) y la propiedad de linealidad implican que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t) = 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t) - \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t)$$

$$= 3e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t \ . \ \blacksquare$$

Si usted tuviera la opción de encontrar la transformada inversa de Laplace de

$$F_1(s) = \frac{7s^2 + 10s - 1}{s^3 + 3s^2 - s - 3}$$

o de

$$F_2(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+3} \ ,$$

¿cuál elegiría? Sin duda, $F_2(s)$ es la más sencilla. En realidad, las dos funciones $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son idénticas, lo que puede verificarse combinando las fracciones que forman a $F_2(s)$. Así, si nos enfrentamos al problema de calcular $\mathscr{L}^{-1}$ de una función racional como $F_1(s)$, primero la expresamos, como en el caso de $F_2(s)$, mediante una suma de fracciones racionales sencillas. Esto se logra mediante el **método de fracciones parciales**.

Revisaremos brevemente este método. Recuerde del cálculo que una función racional de la forma $P(s)/Q(s)$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios donde el grado de P es menor que el grado de Q, tiene un desarrollo en fracciones parciales cuya forma se basa en los factores lineales y cuadráticos de $Q(s)$. (Supondremos que los coeficientes de los polinomios son números reales). Debemos considerar tres casos:

1. Factores lineales no repetidos.
2. Factores lineales repetidos.
3. Factores cuadráticos.

1. Factores lineales no repetidos

Si $Q(s)$ se puede factorizar como un producto de factores lineales distintos,

$$Q(s) = (s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_n) \ ,$$

donde los r_i son números reales distintos entre sí, entonces el desarrollo en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n} \ ,$$

donde las A_i son números reales. Hay varias formas de determinar las constantes $A_1, \ldots, A_n$. En el siguiente ejemplo demostramos de estos métodos.

EJEMPLO 5 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$, donde

$$F(s) = \frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)} \ .$$

SOLUCIÓN Primero hallamos la descomposición en fracciones parciales de $F(s)$. El denominador consta de tres factores lineales distintos, de modo que el desarrollo tiene la forma

$$\textbf{(6)} \qquad \frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s - 3} \ ,$$

donde A, B y C son números reales por determinar.

Un procedimiento que sirve para todos los desarrollos en fracciones parciales consiste en multiplicar primero la ecuación del desarrollo por el denominador de la función racional dada. Esto nos proporciona dos polinomios idénticos. Al igualar los coeficientes de s^k tenemos un sistema de ecuaciones lineales que podemos resolver para determinar las constantes

incógnitas. En este ejemplo, multiplicamos (6) por $(s + 1)(s + 2)(s - 3)$ y vemos que

$$7s - 1 = A(s + 2)(s - 3) + B(s + 1)(s - 3) + C(s + 1)(s + 2) \ ,^{\dagger} \tag{7}$$

que se reduce a

$$7s - 1 = (A + B + C)s^2 + (-A - 2B + 3C)s + (-6A - 3B + 2C).$$

Al igualar los coeficientes de s^2, s y 1 tenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \ , \\ -A - 2B + 3C &= 7 \ , \\ -6A - 3B + 2C &= -1 \ . \end{aligned}$$

Al resolver este sistema, $A = 2$, $B = -3$ y $C = 1$. Por lo tanto,

$$\frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{3}{s + 2} + \frac{1}{s - 3} \ . \tag{8}$$

Otro método para determinar las constantes A, B y C de (7) consiste en elegir tres valores para s y sustituirlos en (7) para obtener tres ecuaciones lineales en las tres incógnitas. Si somos cuidadosos al elegir los valores para s, el sistema se puede resolver fácilmente. En este caso, es claro que la ecuación (7) se simplifica si $s = -1, -2$ o 3. Si hacemos $s = -1$,

$$\begin{aligned} -7 - 1 &= A(1)(-4) + B(0) + C(0) \ , \\ -8 &= -4A \ . \end{aligned}$$

Por lo que $A = 2$; al hacer $s = -2$,

$$\begin{aligned} -14 - 1 &= A(0) + B(-1)(-5) + C(0) \ , \\ -15 &= 5B \ , \end{aligned}$$

y $B = -3$. Por último, si $s = 3$, vemos que $C = 1$. En el caso de factores lineales no repetidos, este método es más sencillo.

Ya que tenemos el desarrollo en fracciones parciales (8), usamos la linealidad para calcular

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + 1} - \frac{3}{s + 2} + \frac{1}{s - 3}\right\}(t) \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\}(t) - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\}(t) \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 3}\right\}(t) \\ &= 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t} \ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[†]En rigor, obtuvimos la ecuación (7) para s distinta de -1, -2 y 3, pero por continuidad vale también para estos valores.

2. Factores lineales repetidos

Sea $s - r$ un factor de $Q(s)$ y supongamos que $(s - r)^m$ es la máxima potencia de $s - r$ que divide a $Q(s)$. Entonces la parte del desarrollo en fracciones parciales de $P(s)/Q(s)$ correspondiente al término $(s - r)^m$ es

$$\frac{A_1}{s - r} + \frac{A_2}{(s - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s - r)^m} ,$$

donde los A_i son números reales.

EJEMPLO 6 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 9s + 2}{(s - 1)^2(s + 3)}\right\}$.

SOLUCIÓN Como $s - 1$ es un factor lineal repetido con multiplicidad dos y $s + 3$ es un factor lineal no repetido, el desarrollo en fracciones parciales asume la forma

$$\frac{s^2 + 9s + 2}{(s - 1)^2(s + 3)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{(s - 1)^2} + \frac{C}{s + 3} .$$

Primero multiplicamos ambos lados por $(s - 1)^2(s + 3)$ para obtener

$$\text{(9)} \qquad s^2 + 9s + 2 = A(s - 1)(s + 3) + B(s + 3) + C(s - 1)^2 .$$

Luego observamos que si $s = 1$ (o $s = -3$), dos términos del lado derecho de (9) se anulan, quedando una ecuación lineal en términos de B (o C). Al hacer $s = 1$ en (9), tenemos

$$1 + 9 + 2 = A(0) + 4B + C(0) ,$$
$$12 = 4B ,$$

y $B = 3$. De manera análoga, si $s = -3$ en (9),

$$9 - 27 + 2 = A(0) + B(0) + 16C$$
$$-16 = 16C .$$

Así, $C = -1$. Por último, para hallar A, elegimos un valor distinto para s, digamos $s = 0$. Como $B = 3$ y $C = -1$, al hacer $s = 0$ en (9) se llega a

$$2 = -3A + 3B + C = -3A + 9 - 1$$

y $A = 2$. Por tanto,

$$\text{(10)} \qquad \frac{s^2 + 9s + 2}{(s - 1)^2(s + 3)} = \frac{2}{s - 1} + \frac{3}{(s - 1)^2} - \frac{1}{s + 3} .$$

También podríamos determinar a las constantes A, B y C escribiendo la ecuación (9) en la forma

$$s^2 + 9s + 2 = (A + C)s^2 + (2A + B - 2C)s + (-3A + 3B + C) .$$

Luego, al igualar los coeficientes correspondientes de s^2, s y 1 y resolver el sistema resultante, de nuevo tenemos que $A = 2$, $B = 3$ y $C = -1$.

Una vez obtenido el desarrollo en fracciones parciales (10) para la función racional dada, podemos determinar su transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{1}{s+3}\right\}(t)\\ &= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t)+3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(t)\\ &\quad -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t)\\ &= 2e^t+3te^t-e^{-3t}\ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3. Factores cuadráticos

Sea $(s-\alpha)^2+\beta^2$ un factor cuadrático de $Q(s)$ que no se pueda reducir a factores lineales con coeficientes reales. Supongamos que m es la máxima potencia de $(s-\alpha)^2+\beta^2$ que divide a $Q(s)$. Entonces la parte del desarrollo en fracciones parciales correspondiente a $(s-\alpha)^2+\beta^2$ es

$$\frac{C_1s+D_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{C_2s+D_2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\cdots+\frac{C_ms+D_m}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^m}\ .$$

Como vimos en el ejemplo 4, es más conveniente expresar C_is+D_i en la forma $A_i(s-\alpha)+\beta B_i$ al tratar de calcular las transformadas de Laplace. Así, escribiremos esta parte del desarrollo en fracciones parciales en la forma equivalente

$$\boldsymbol{\frac{A_1(s-\alpha)+\beta B_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{A_2(s-\alpha)+\beta B_2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\cdots+\frac{A_m(s-\alpha)+\beta B_m}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^m}}\ .$$

EJEMPLO 7 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$.

SOLUCIÓN Primero observamos que el factor cuadrático s^2-2s+5 es irreducible (verifique el signo del discriminante en la fórmula cuadrática). Luego escribimos este factor en la forma $(s-\alpha)^2+\beta^2$ completando el cuadrado:

$$s^2-2s+5=(s-1)^2+2^2\ .$$

Como s^2-2s+5 y $s+1$ son factores no repetidos, el desarrollo en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}=\frac{A(s-1)+2B}{(s-1)^2+2^2}+\frac{C}{s+1}\ .$$

Al multiplicar ambos lados por el común denominador, obtenemos

$$\textbf{(11)}\qquad 2s^2+10s=[A(s-1)+2B](s+1)+C(s^2-2s+5)\ .$$

En la ecuación (11), hacemos $s = -1$, 1 y 0. En el primer caso,

$$2 - 10 = [A(-2) + 2B](0) + C(8) ,$$
$$-8 = 8C ,$$

y $C = -1$. Si $s = 1$ en (11), obtenemos

$$2 + 10 = [A(0) + 2B](2) + C(4) ,$$

y como $C = -1$, esta última ecuación se convierte en $12 = 4B - 4$, de modo que $B = 4$. Por último, hacemos $s = 0$ en (11) y usamos $C = -1$ y $B = 4$ para obtener

$$0 = [A(-1) + 2B](1) + C(5) ,$$
$$0 = -A + 8 - 5 ,$$
$$A = 3 .$$

Como $A = 3$, $B = 4$ y $C = -1$,

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} = \frac{3(s - 1) + 2(4)}{(s - 1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s + 1} .$$

Con este desarrollo en fracciones parciales podemos calcular de inmediato la transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)}\right\}(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s - 1) + 2(4)}{(s - 1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s + 1}\right\}(t) \\ &= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 2^2}\right\}(t) \\ &\quad + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s - 1)^2 + 2^2}\right\}(t) - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\}(t) \\ &= 3e^t\cos 2t + 4e^t\operatorname{sen} 2t - e^{-t} . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

En la sección 7.7 analizaremos otro método (que implica las convoluciones) para calcular transformadas inversas que no requiere descomposiciones en fracciones parciales. Además, el método de convolución es conveniente en el caso de una función racional con un factor cuadrático en el denominador. Los problemas 33-36 y 38-43 describen otras herramientas útiles.

EJERCICIOS 7.4

En los problemas 1 a 10, determine la transformada inversa de Laplace de la función dada.

1. $\dfrac{6}{(s - 1)^4}$.

2. $\dfrac{2}{s^2 + 4}$.

3. $\dfrac{s + 1}{s^2 + 2s + 10}$.

4. $\dfrac{4}{s^2 + 9}$.

5. $\dfrac{1}{s^2 + 4s + 8}$.

6. $\dfrac{3}{(2s + 5)^3}$.

7. $\dfrac{2s + 16}{s^2 + 4s + 13}$.

8. $\dfrac{1}{s^5}$.

9. $\dfrac{3s - 15}{2s^2 - 4s + 10}$.

10. $\dfrac{s - 1}{2s^2 + s + 6}$.

En los problemas 11 a 20, determine el desarrollo en fracciones parciales para la función racional dada.

11. $\dfrac{s^2 - 26s - 47}{(s-1)(s+2)(s+5)}$. **12.** $\dfrac{-s-7}{(s+1)(s-2)}$.

13. $\dfrac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2}$.

14. $\dfrac{-8s^2 - 5s + 9}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)}$.

15. $\dfrac{8s - 2s^2 - 14}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)}$. **16.** $\dfrac{-5s - 36}{(s+2)(s^2+9)}$.

17. $\dfrac{3s + 5}{s(s^2 + s - 6)}$. **18.** $\dfrac{3s^2 + 5s + 3}{s^4 + s^3}$.

19. $\dfrac{1}{(s-3)(s^2 + 2s + 2)}$. **20.** $\dfrac{s}{(s-1)(s^2-1)}$.

En los problemas 21 a 30, determine $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$.

21. $F(s) = \dfrac{6s^2 - 13s + 2}{s(s-1)(s-6)}$.

22. $F(s) = \dfrac{s + 11}{(s-1)(s+3)}$.

23. $F(s) = \dfrac{5s^2 + 34s + 53}{(s+3)^2(s+1)}$.

24. $F(s) = \dfrac{7s^2 - 41s + 84}{(s-1)(s^2 - 4s + 13)}$.

25. $F(s) = \dfrac{7s^2 + 23s + 30}{(s-2)(s^2 + 2s + 5)}$.

26. $F(s) = \dfrac{7s^3 - 2s^2 - 3s + 6}{s^3(s-2)}$.

27. $s^2F(s) - 4F(s) = \dfrac{5}{s+1}$.

28. $s^2F(s) + sF(s) - 6F(s) = \dfrac{s^2 + 4}{s^2 + s}$.

29. $sF(s) + 2F(s) = \dfrac{10s^2 + 12s + 14}{s^2 - 2s + 2}$.

30. $sF(s) - F(s) = \dfrac{2s + 5}{s^2 + 2s + 1}$.

31. Determine la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f_1(t) = \begin{cases} 0\ , & t = 2\ , \\ t\ , & t \neq 2\ . \end{cases}$

(b) $f_2(t) = \begin{cases} 5\ , & t = 1\ , \\ 2\ , & t = 6\ , \\ t\ , & t \neq 1, 6\ . \end{cases}$

(c) $f_3(t) = t$.

¿Cuál de las funciones anteriores es la transformada inversa de Laplace de $1/s^2$?

32. Determine la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f_1(t) = \begin{cases} t\ , & t = 1, 2, 3, \ldots\ , \\ e^t\ , & t \neq 1, 2, 3, \ldots\ . \end{cases}$

(b) $f_2(t) = \begin{cases} e^t\ , & t \neq 5, 8\ , \\ 6\ , & t = 5\ , \\ 0\ , & t = 8\ . \end{cases}$

(c) $f_3(t) = e^t$.

¿Cuál de las funciones anteriores es la transformada inversa de Laplace de $1/(s-1)$?

El teorema 6 de la sección 7.3 se puede expresar en términos de la transformada inversa de Laplace como

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d^nF}{ds^n}\right\}(t) = (-t)^n f(t)\ ,$$

donde $f = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$. *Use esta ecuación en los problemas 33 a 36 para calcular* $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$.

33. $F(s) = \ln\left(\dfrac{s+2}{s-5}\right)$. **34.** $F(s) = \ln\left(\dfrac{s-4}{s-3}\right)$.

35. $F(s) = \ln\left(\dfrac{s^2+9}{s^2+1}\right)$. **36.** $F(s) = \arctan(1/s)$.

37. Demuestre el teorema 7 relativo a la linealidad de la transformada inversa. [*Sugerencia*: Muestre que el lado derecho de la ecuación (3) es una función continua en $[0, \infty)$ cuya transformada de Laplace es $F_1(s) + F_2(s)$].

38. Cálculo del residuo. Sea $P(s)/Q(s)$ una función racional, donde el grado de P es menor que el grado de Q, y suponga que $s - r$ es un factor lineal no repetido de $Q(s)$. Demuestre que la parte del desarrollo en fracciones parciales de $P(s)/Q(s)$ correspondiente a $s - r$ es

$$\frac{A}{s - r}\ ,$$

donde A (el **residuo**) está dado por la fórmula

$$A = \lim_{s \to r} \frac{(s - r)P(s)}{Q(s)} .$$

39. Use la fórmula para el cálculo del residuo deducida en el problema 38 para hallar rápidamente el desarrollo en fracciones parciales de

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s(s - 1)(s + 2)} .$$

40. Fórmula de desarrollo de Heaviside.† Sean $P(s)$ y $Q(s)$ polinomios tales que el grado de $P(s)$ es menor que el grado de $Q(s)$. Sea

$$Q(s) = (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n) ,$$

donde los r_i son números reales distintos. Muestre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P}{Q}\right\}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(r_i)}{Q'(r_i)} e^{r_i t} .$$

41. Use la fórmula de desarrollo de Heaviside deducida en el problema 40 para determinar la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{3s^2 - 16s + 5}{(s + 1)(s - 3)(s - 2)} .$$

42. Residuos complejos. Sea $P(s)/Q(s)$ una función racional tal que el grado de P es menor que el grado de Q y suponga que $(s - \alpha)^2 + \beta^2$ es un factor cuadrático no repetido de Q. (Es decir, $\alpha \pm i\beta$ son ceros complejos conjugados de Q). Demuestre que la parte del desarrollo en fracciones parciales de $P(s)/Q(s)$ correspondiente a $(s - \alpha)^2 + \beta^2$ es

$$\frac{A(s - \alpha) + \beta B}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} ,$$

donde el **residuo complejo** $\beta B + i\beta A$ está dado por la fórmula

$$\beta B + i\beta A = \lim_{s \to \alpha + i\beta} \frac{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]P(s)}{Q(s)} .$$

(Así, podemos determinar B y A extrayendo las partes real e imaginaria del límite y dividiéndolas entre β).

43. Use las fórmulas del residuo deducidas en los problemas 38 y 42 para determinar el desarrollo en fracciones parciales de

$$F(s) = \frac{6s^2 + 28}{(s^2 - 2s + 5)(s + 2)} .$$

7.5 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON VALORES INICIALES

Nuestro objetivo es mostrar la forma de usar las transformadas de Laplace para resolver problemas con valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales. Recuerde que ya hemos estudiado formas de resolver estos problemas en el capítulo 4. Estos métodos anteriores requieren hallar primero una *solución general* de la ecuación diferencial y luego usar las condiciones iniciales para determinar la solución deseada. Como veremos, el método de transformadas de Laplace conduce a la solución del problema con valores iniciales *sin* hallar primero una solución general.

Debemos destacar otras ventajas del método de la transformada. Por ejemplo, la técnica puede manejar fácilmente ecuaciones con funciones de forzamiento que tienen discontinuidades de salto, como se muestra en la sección 7.1. Además, el método se puede usar para ciertas ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, una clase particular de ecuaciones integrales, sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales parciales.

†***Nota histórica:*** Esta fórmula jugó un papel importante en la "solución operacional" de las ecuaciones diferenciales ordinarias desarrollada por Oliver Heaviside en la década de 1890.

MÉTODOS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Para resolver un problema con valores iniciales:

(a) Considere la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación.
(b) Use las propiedades de la transformada de Laplace y las condiciones iniciales para obtener una ecuación para la transformada de Laplace de la solución y luego despeje la transformada en esta ecuación.
(c) Determine la transformada inversa de Laplace de la solución, buscándola en una tabla o usando un método adecuado (como fracciones parciales) junto con la tabla.

En el paso (a) estamos suponiendo tácitamente que la solución es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial. Una vez obtenida la transformada inversa de Laplace en el paso (c), podemos verificar si se cumplen tales suposiciones.

EJEMPLO 1 Resolver el problema con valores iniciales

$$\textbf{(1)} \qquad y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t} \; ; \qquad y(0) = 2 \; , \qquad y'(0) = 12 \; .$$

SOLUCIÓN La ecuación diferencial en (1) es una identidad entre dos funciones de t. Por lo tanto, vale la igualdad entre las transformadas de Laplace de estas funciones:

$$\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 5y\} = \mathcal{L}\{-8e^{-t}\} \; .$$

Usamos la propiedad de linealidad de $\mathcal{L}$ y la transformada recién calculada para la función exponencial para escribir

$$\textbf{(2)} \qquad \mathcal{L}\{y''\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + 5\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{-8}{s+1} \; .$$

Sea $Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s)$. Usamos las fórmulas para la transformada de Laplace de derivadas de orden superior (véase la sección 7.3) y las condiciones iniciales en (1), para escribir

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2 \; .$$
$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s - 12 \; .$$

Al sustituir estas expresiones en (2) y despejar $Y(s)$ tenemos

$$[s^2Y(s) - 2s - 12] - 2[sY(s) - 2] + 5Y(s) = \frac{-8}{s+1} \; ,$$
$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) = 2s + 8 - \frac{8}{s+1} \; ,$$
$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{s+1} \; ,$$
$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)} \; .$$

Ahora debemos calcular la transformada inversa de la función racional $Y(s)$; hicimos esto en el ejemplo 7 de la sección 7.4, usando un desarrollo en fracciones parciales:

$$\textbf{(3)} \qquad y(t) = 3e^t\cos 2t + 4e^t\operatorname{sen} 2t - e^{-t} ,$$

que es la solución del problema con valores iniciales (1). ■

Como rápida verificación de sus cálculos, el lector puede revisar si la solución calculada satisface las condiciones iniciales dadas.

Es probable que el lector cuestione el uso del método de transformadas de Laplace para resolver un problema con valores iniciales que es fácil de hacer mediante los métodos del capítulo 4. El objetivo de los primeros ejemplos de esta sección es familiarizar al lector con el procedimiento, pero en el ejemplo 4 y en secciones posteriores veremos que el método es aplicable a problemas que no pueden manejarse fácilmente mediante las técnicas de capítulos anteriores.

EJEMPLO 2 Resolver el problema con valores iniciales

$$\textbf{(4)} \qquad y'' + 4y' - 5y = te^t ; \qquad y(0) = 1 , \qquad y'(0) = 0 .$$

SOLUCIÓN Sea $Y(s) := \mathscr{L}\{y\}(s)$. Al calcular la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial en (4), tenemos

$$\textbf{(5)} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) + 4\mathscr{L}\{y'\}(s) - 5Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} .$$

Usamos las condiciones iniciales para expresar $\mathscr{L}\{y'\}(s)$ y $\mathscr{L}\{y''\}(s)$ en términos de $Y(s)$. Es decir,

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 ,$$
$$\mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s .$$

Sustituimos de nuevo en (5) y despejamos $Y(s)$:

$$\left[s^2Y(s) - s\right] + 4\left[sY(s) - 1\right] - 5Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$
$$(s^2 + 4s - 5)Y(s) = s + 4 + \frac{1}{(s-1)^2}$$
$$(s+5)(s-1)Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s-1)^2}$$
$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s+5)(s-1)^3} .$$

El desarrollo en fracciones parciales para $Y(s)$ tiene la forma

$$\textbf{(6)} \qquad \frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s+5)(s-1)^3} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} .$$

Al calcular los denominadores, vemos en última instancia que $A = 35/216$, $B = 181/216$,

$C = -1/36$ y $D = 1/6$. Al sustituir estos valores en (6) tenemos

$$Y(s) = \frac{35}{216}\left(\frac{1}{s+5}\right) + \frac{181}{216}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{36}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{2}{(s-1)^3}\right) ,$$

donde hemos escrito $D = 1/6 = (1/12)2$ para facilitar el último paso, el cálculo de la transformada inversa. De las tablas, tenemos que

$$\textbf{(7)} \qquad y(t) = \frac{35}{216}e^{-5t} + \frac{181}{216}e^{t} - \frac{1}{36}te^{t} + \frac{1}{12}t^2e^{t}$$

es la solución del problema con valores iniciales (4). ■

EJEMPLO 3 Resolver el problema con valores iniciales

$$\textbf{(8)} \qquad w''(t) - 2w'(t) + 5w(t) = -8e^{\pi - t} ; \qquad w(\pi) = 2 , \qquad w'(\pi) = 12 .$$

SOLUCIÓN Para usar el método de transformadas de Laplace, primero movemos las condiciones iniciales a $t = 0$, haciendo $y(t) := w(t + \pi)$; entonces,

$$y'(t) = w'(t + \pi) , \qquad y''(t) = w''(t + \pi) .$$

Al reemplazar t por $t + \pi$ en la ecuación diferencial en (8), tenemos

$$\textbf{(9)} \qquad w''(t + \pi) - 2w'(t + \pi) + 5w(t + \pi) = -8e^{\pi-(t+\pi)} = -8e^{-t} .$$

Al hacer $y(t) = w(t + \pi)$ en (9), el problema con valores iniciales en (8) se convierte en

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = -8e^{-t} ; \qquad y(0) = 2 , \qquad y'(0) = 12 .$$

Ahora podemos aplicar el método de transformada de Laplace, pues las condiciones iniciales están ahora en el origen. En realidad, ya seguimos este procedimiento en el ejemplo 1, donde hallamos que

$$\textbf{(10)} \qquad y(t) = 3e^{t}\cos 2t + 4e^{t}\operatorname{sen} 2t - e^{-t} .$$

Como $w(t + \pi) = y(t)$, entonces $w(t) = y(t - \pi)$. Así, al reemplazar t por $t - \pi$ en (10),

$$\begin{aligned} w(t) = y(t - \pi) &= 3e^{t-\pi}\cos\left[2(t - \pi)\right] + 4e^{t-\pi}\operatorname{sen}\left[2(t - \pi)\right] - e^{-(t-\pi)} \\ &= 3e^{t-\pi}\cos 2t + 4e^{t-\pi}\operatorname{sen} 2t - e^{\pi - t} . \end{aligned}$$ ■

Hasta ahora sólo hemos aplicado el método de la transformada de Laplace a ecuaciones lineales con coeficientes constantes, pero algunas ecuaciones importantes en física matemática implican ecuaciones lineales cuyos coeficientes son polinomios en t. Para resolver tales ecuaciones mediante transformadas de Laplace, aplicaremos el teorema 6 de la página 363, donde demostramos que

$$\textbf{(11)} \qquad \mathscr{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^nF}{ds^n}(s) .$$

Si hacemos $n = 1$ y $f(t) = y'(t)$, vemos que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{ty'(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y'\}(s) \\ &= -\frac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right] = -sY'(s) - Y(s) . \end{aligned}$$

En forma similar, si $n = 1$ y $f(t) = y''(t)$, obtenemos de (11)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{ty''(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y''\}(s) \\ &= -\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] \\ &= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0) .\end{aligned}$$

Así, vemos que para una ecuación diferencial lineal en $y(t)$ cuyos coeficientes son polinomios en t, el método de transformadas de Laplace convertirá la ecuación dada en una ecuación diferencial lineal en $Y(s)$ cuyos coeficientes son polinomios en s. Además, si los coeficientes de la ecuación dada son polinomios de grado 1 en t, entonces (sin importar el orden de la ecuación dada) la ecuación diferencial para $Y(s)$ es sólo una ecuación lineal de *primer orden*. Como ya sabemos resolver esta ecuación de primer orden, el único obstáculo serio podría ser el cálculo de la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$. (Este problema puede ser irresoluble, pues la solución $y(t)$ podría *no* tener una transformada de Laplace).

Para ilustrar esta técnica, usaremos el siguiente hecho: *si $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces*

(12) $$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\{f\}(s) = 0 .$$

(Es probable que el lector ya haya observado esto en las entradas de la tabla 7.1 de la página 358). En el problema 26 de los ejercicios 7.3 aparece un bosquejo de la demostración de (12).

EJEMPLO 4 Resolver el problema con valores iniciales

(13) $$y'' + 2ty' - 4y = 1 , \qquad y(0) = y'(0) = 0 .$$

SOLUCIÓN Hacemos $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$ y calculamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación en (13):

(14) $$\mathscr{L}\{y''\}(s) + 2\mathscr{L}\{ty'(t)\}(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s} .$$

Usamos las condiciones iniciales para tener que

$$\mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

y

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{ty'(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y'\}(s) \\ &= -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] = -sY'(s) - Y(s) .\end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en (14),

$$s^2Y(s) + 2[-sY'(s) - Y(s)] - 4Y(s) = \frac{1}{s} ,$$

$$-2sY'(s) + (s^2 - 6)Y(s) = \frac{1}{s} ,$$

(15) $$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y(s) = \frac{-1}{2s^2} .$$

La ecuación (15) es una ecuación lineal de primer orden que tiene el factor integrante

$$\mu(s) = e^{\int(3/s - s/2)ds} = e^{\ln s^3 - s^2/4} = s^3 e^{-s^2/4}$$

(véase la sección 2.3). Al multiplicar (15) por $\mu(s)$, obtenemos

$$\frac{d}{ds}\{\mu(s)Y(s)\} = \frac{d}{ds}\left\{s^3 e^{-s^2/4}Y(s)\right\} = -\frac{s}{2}e^{-s^2/4} .$$

Ahora integramos y despejamos $Y(s)$:

$$s^3 e^{-s^2/4}Y(s) = -\int \frac{s}{2}e^{-s^2/4}\,ds = e^{-s^2/4} + C ,$$

(16) $$Y(s) = \frac{1}{s^3} + C\frac{e^{s^2/4}}{s^3} .$$

Si $Y(s)$ es la transformada de Laplace de una función continua por partes de orden exponencial, entonces la ecuación (12) implica que

$$\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0 .$$

Para que esto ocurra, la constante C de la ecuación (16) debe anularse. Por tanto, $Y(s) = 1/s^3$; al calcular la transformada inversa tenemos que $y(t) = t^2/2$. Podemos verificar fácilmente que $y(t) = t^2/2$ es la solución del problema con valores iniciales dados, sustituyéndola en (13). ■

Concluimos esta sección con una aplicación de la **teoría de control**. Consideremos un servomecanismo que modela un piloto automático. Este mecanismo aplica un momento de torsión al eje de dirección, de modo que un avión o bote seguirá un curso establecido con anterioridad. Si $y(t)$ es la dirección real (el ángulo) del vehículo en el instante t y $g(t)$ es la dirección deseada en el mismo instante, entonces

$$e(t) \coloneqq y(t) - g(t)$$

denota el **error** o **desviación** entre la dirección deseada y la dirección real.

Supongamos que el servomecanismo puede medir el error $e(t)$ y retroalimentar al eje de dirección mediante un componente del momento de torsión proporcional a $e(t)$ pero opuesto en signo (véase la figura 7.6). La segunda ley de Newton, expresada en términos de momentos de torsión, establece que

(momento de inercia) × (aceleración angular) = momento de torsión total.

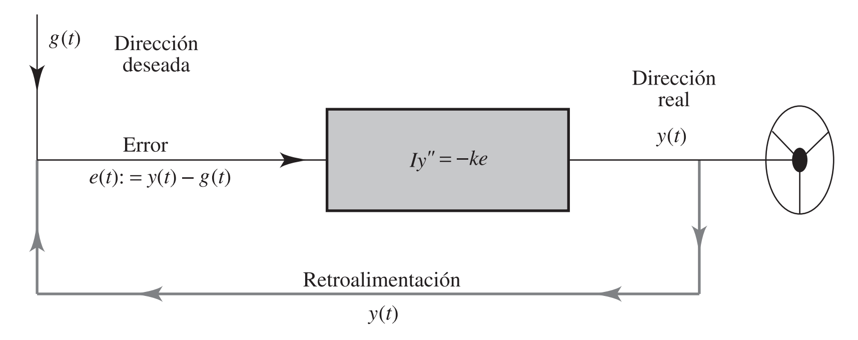


Figura 7.6 Servomecanismo con retroalimentación

Para el servomecanismo descrito, tenemos

(17) $Iy''(t) = -ke(t)$,

donde I es el momento de inercia del eje de dirección y k es una constante de proporcionalidad positiva.

EJEMPLO 5 Determinar el error $e(t)$ para el piloto automático si el eje de dirección está inicialmente en reposo en la dirección cero y la dirección deseada está dada por $g(t) = at$, donde a es una constante.

SOLUCIÓN Con base en el análisis que condujo a la ecuación (17), un modelo para el mecanismo está dado por el problema con valores iniciales

(18) $Iy''(t) = -ke(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

donde $e(t) = y(t) - g(t) = y(t) - at$. Primero calculamos la transformada de Laplace de ambos lados de (18):

$$I\mathscr{L}\{y''\}(s) = -k\mathscr{L}\{e\}(s) ,$$
$$I\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] = -kE(s) ,$$

(19)
$$s^2IY(s) = -kE(s) ,$$

donde $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$ y $E(s) = \mathscr{L}\{e\}(s)$. Como

$$E(s) = \mathscr{L}\{y(t) - at\}(s) = Y(s) - \mathscr{L}\{at\}(s) = Y(s) - as^{-2} ,$$

la ecuación (19) implica que

$$s^2IE(s) + aI = -kE(s) .$$

Al despejar $E(s)$ en esta ecuación tenemos

$$E(s) = -\frac{aI}{s^2I + k} = \frac{-a}{\sqrt{k/I}}\frac{\sqrt{k/I}}{s^2 + k/I} .$$

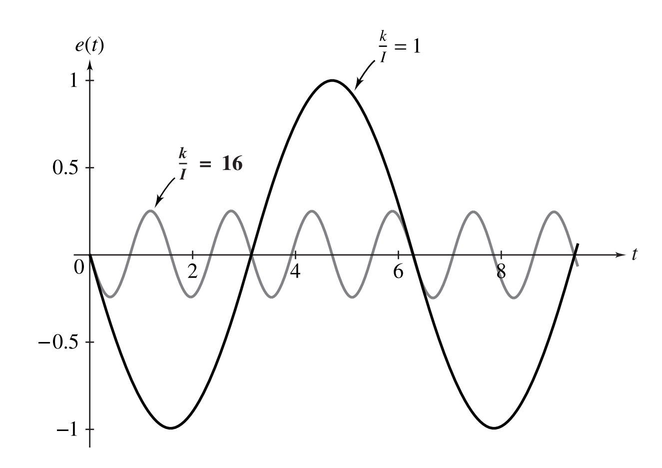


Figura 7.7 Error para el piloto automático para $k/I = 1$ y $k/I = 16$

Por lo tanto, al calcular la transformada inversa de Laplace, obtenemos el error

$$\textbf{(20)} \qquad e(t) = -\frac{a}{\sqrt{k/I}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{k/I}\, t\right) . \blacksquare$$

Como podemos ver de la ecuación (20), el piloto automático oscilará de un lado a otro en torno del curso deseado, "desviándose" siempre con el factor $a\sqrt{k/I}$. Es claro que podemos reducir el error haciendo que k sea grande con respecto de I, pero entonces el término $\sqrt{k/I}$ crece, haciendo que el error oscile más rápidamente. (Véase la figura 7.7). Como con las vibraciones, las oscilaciones o desviaciones de dirección se pueden controlar mediante un momento de torsión con amortiguamiento proporcional a $e'(t)$ pero opuesto en signo (véase el problema 40).

EJERCICIOS 7.5

En los problemas 1 a 14, resuelva el problema con valores iniciales dado mediante el método de transformadas de Laplace.

1. $y'' - 2y' + 5y = 0$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

2. $y'' - y' - 2y = 0$;
$y(0) = -2$, $y'(0) = 5$.

3. $y'' + 6y' + 9y = 0$;
$y(0) = -1$, $y'(0) = 6$.

4. $y'' + 6y' + 5y = 12e^t$;
$y(0) = -1$, $y'(0) = 7$.

5. $w'' + w = t^2 + 2$;
$w(0) = 1$, $w'(0) = -1$.

6. $y'' - 4y' + 5y = 4e^{3t}$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

7. $y'' - 7y' + 10y = 9\cos t + 7\operatorname{sen} t$;
$y(0) = 5$, $y'(0) = -4$.

8. $y'' + 4y = 4t^2 - 4t + 10$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

9. $z'' + 5z' - 6z = 21e^t$;
$z(0) = -1$, $z'(0) = 9$.

10. $y'' - 4y = 4t - 8e^{-2t}$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

11. $y'' - y = t - 2$; $y(2) = 3$, $y'(2) = 0$.

12. $w'' - 2w' + w = 6t - 2$;
$w(-1) = 3$; $w'(-1) = 7$.

13. $y'' - y' - 2y = -8\cos t - 2\operatorname{sen} t$;
$y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 0$.

14. $y'' + y = t$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

En los problemas 15 a 24, halle $Y(s)$, la transformada de Laplace de la solución $y(t)$ del problema con valores iniciales dado.

15. $y'' - 3y' + 2y = \cos t$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

16. $y'' + 6y = t^2 - 1$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

17. $y'' + y' - y = t^3$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

18. $y'' - 2y' - y = e^{2t} - e^t$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

19. $y'' + 5y' - y = e^t - 1$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

20. $y'' + 3y = t^3$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

21. $y'' - 2y' + y = \cos t - \operatorname{sen} t$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

22. $y'' - 6y' + 5y = te^t$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

23. $y'' + 4y = g(t)$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$, donde

$$g(t) = \begin{cases} t , & t < 2 , \\ 5 , & t > 2 . \end{cases}$$

24. $y'' - y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,
donde

$$g(t) = \begin{cases} 1 , & t < 3 , \\ t , & t > 3 . \end{cases}$$

En los problemas 25 a 28, resuelva el problema de tercer orden con valores iniciales dado, en términos de $y(t)$, usando el método de transformadas de Laplace.

25. $y''' - y'' + y' - y = 0$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 3$.

26. $y''' + 4y'' + y' - 6y = -12$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -2$.

27. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;
$y(0) = -4$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -2$.

28. $y''' + y'' + 3y' - 5y = 16e^{-t}$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -4$.

En los problemas 29 a 32, use el método de transformadas de Laplace para hallar una solución general de la ecuación diferencial dada suponiendo que $y(0) = a$ y $y'(0) = b$, donde a y b son constantes arbitrarias.

29. $y'' - 4y' + 3y = 0$. **30.** $y'' + 6y' + 5y = t$.

31. $y'' + 2y' + 2y = 5$.

32. $y'' - 5y' + 6y = -6te^{2t}$.

33. Use el teorema 6 de la sección 7.3 para mostrar que

$$\mathscr{L}\{t^2y'(t)\}(s) = sY''(s) + 2Y'(s) ,$$

donde $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$.

34. Use el teorema 6 de la sección 7.3 para mostrar que

$$\mathscr{L}\{t^2y''(t)\}(s) = s^2Y''(s) + 4sY'(s) + 2Y(s) ,$$

donde $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$.

En los problemas 35 a 38, determine la solución del problema con valores iniciales dado.

35. $y'' + 3ty' - 6y = 1$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

36. $ty'' - ty' + y = 2$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

37. $ty'' - 2y' + ty = 0$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
[*Sugerencia:* $\mathscr{L}^{-1}\{1/(s^2 + 1)^2\}(t) = (\operatorname{sen} t - t\cos t)/2$].

38. $y'' + ty' - y = 0$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

39. Determine el error $e(t)$ para el piloto automático del ejemplo 5, si el eje está en un principio en reposo, en la dirección cero, y la dirección deseada es $g(t) = a$, donde a es una constante.

40. En el ejemplo 5, suponga que para controlar las oscilaciones se ejerce sobre el eje de dirección un componente adicional del momento de torsión proporcional a $e'(t)$, pero opuesto en signo. Muestre que la ecuación (17) se reemplaza por

$$Iy''(t) = -ke(t) - \mu e'(t) ,$$

donde μ es una constante positiva. Determine el error $e(t)$ para el piloto automático con amortiguamiento ligero (es decir, $\mu < 2\sqrt{Ik}$) si el eje de dirección está inicialmente en reposo en la dirección cero y la dirección deseada está dada por $g(t) = a$, donde a es una constante.

41. En el problema 40, determine el error $e(t)$ cuando la dirección deseada está dada por $g(t) = at$, donde a es una constante.

7.6 TRANSFORMADAS DE FUNCIONES DISCONTINUAS Y PERIÓDICAS

En esta sección estudiaremos algunas funciones especiales que surgen con frecuencia al aplicar el método de la transformada de Laplace a problemas físicos. En particular, nos interesan los métodos para trabajar con funciones que presentan discontinuidades de salto, las cuales aparecen de manera natural en problemas físicos como circuitos eléctricos con interruptores de encendido y apagado. Para este tipo de comportamiento, Oliver Heaviside introdujo la siguiente función escalón.

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Definición 5. La **función escalón unitario** $u(t)$ está dada por

$$\textbf{(1)} \qquad u(t) := \begin{cases} 0\,, & t < 0\,, \\ 1\,, & 0 < t\,. \end{cases}$$

Al recorrer el argumento de $u(t)$ podemos mover el salto a otra posición; es decir,

$$\textbf{(2)} \qquad u(t-a) = \begin{cases} 0\,, & t-a < 0\,, \\ 1\,, & 0 < t-a \end{cases} \quad = \begin{cases} 0\,, & t < a\,, \\ 1\,, & a < t \end{cases}$$

tiene su salto en $t = a$. Al multiplicar por una constante M, la altura del salto también se puede modificar (véase la figura 7.8):

$$Mu(t-a) = \begin{cases} 0\,, & t < a\,, \\ M\,, & a < t\,. \end{cases}$$

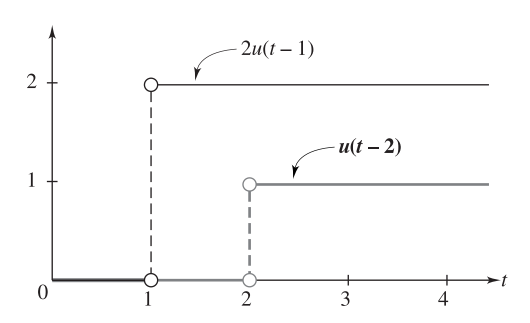


Figura 7.8 Dos funciones escalonadas expresadas mediante la función escalón unitario

Cualquier función continua por partes se puede expresar en términos de funciones escalón unitario.

EJEMPLO 1 Escribir la función

$$\textbf{(3)} \qquad f(t) = \begin{cases} 3\,, & t < 2\,, \\ 1\,, & 2 < t < 5\,, \\ t\,, & 5 < t < 8\,, \\ t^2/10\,, & 8 < t \end{cases}$$

(véase la figura 7.9 en la página 386) en términos de funciones escalón unitario.

SOLUCIÓN La gráfica de la figura 7.9 muestra que la función $f(t)$ es igual a 3 hasta que t llega a 2, donde realiza un salto de -2 unidades hasta el valor 1. Podemos expresar este salto mediante la fórmula $3 - 2u(t-2)$, pues $u(t-2)$ se anula hasta que t llega a 2, después de lo cual tiene el valor 1.

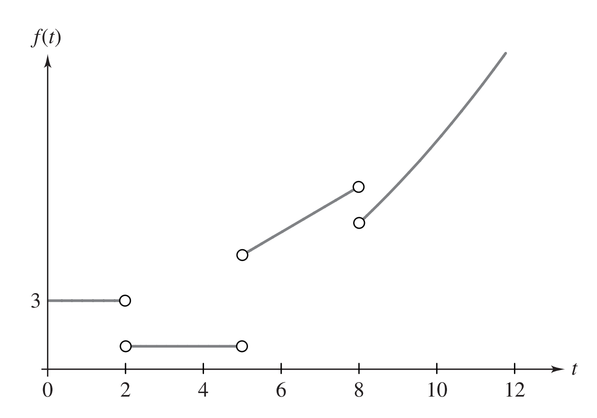


Figura 7.9 Gráfica de $f(t)$ en la ecuación (3)

En $t = 5$, la figura muestra que la función cambia del valor (constante) 1 al valor t; se resta la constante 1 de $f(t)$ en ese punto y se suma la función t. Podemos lograr esto en la fórmula para t sumando el término $u(t-5)$ por $[t]-[1]$, o $(t-1)u(t-5)$. De manera análoga, cambiamos la fórmula para f de t a $t^2/10$ en $t = 8$ sumando $[t^2/10 - t]u(t-8)$ y el resultado es

$$f(t) = 3 - 2u(t-2) + (t-1)u(t-5) + (t^2/10 - t)u(t-8)\ . \quad \blacksquare$$

La transformada de Laplace de $u(t-a)$ con $a \geq 0$ es

$$\textbf{(4)} \qquad \boldsymbol{\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}}\ ,$$

pues para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_a^N = \frac{e^{-as}}{s}\ .$$

Recíprocamente, para $a > 0$, decimos que la función continua por partes $u(t-a)$ es una transformada inversa de Laplace para e^{-as}/s y escribimos†

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}(t) = u(t-a)\ .$$

La propiedad de traslación de $F(s)$ analizada en la sección 7.3 describía el efecto sobre la transformada de Laplace de multiplicar una función por e^{at}. El siguiente teorema ilustra un efecto análogo de multiplicar la transformada de Laplace de una función por e^{-as}.

---

†La ausencia de un valor específico para $u(0)$ en la definición 5 refleja la ambigüedad de la transformada inversa de Laplace cuando no existe una transformada inversa continua.

TRASLACIÓN EN *t*

Teorema 8. Suponga que $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > \alpha \geq 0$. Si a es una constante positiva, entonces

$$\textbf{(5)} \qquad \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) \ ,$$

y recíprocamente, una transformada inversa de Laplace† de $e^{-as}F(s)$ está dada por

$$\textbf{(6)} \qquad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = f(t-a)u(t-a) \ .$$

Demostración. Por definición de transformada de Laplace, tenemos

$$\textbf{(7)} \qquad \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \ ,$$

donde, en la última ecuación, hemos usado el hecho de que $u(t-a)$ se anula para $t < a$ y es igual a 1 para $t > a$. Sea $v = t - a$. Entonces tenemos $dv = dt$, y la ecuación (7) queda

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = \int_0^\infty e^{-as}e^{-sv}f(v)dv$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv = e^{-as}F(s) \ . \ ■$$

Observe que la fórmula (5) incluye como caso particular la fórmula para $\mathcal{L}\{u\}(t-a)\}$; en efecto, si $f(t) \equiv 1$, entonces $F(s) = 1/s$ y (5) se convierte en $\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) = e^{-as}/s$.

En la práctica es más común encontrarse con el problema de calcular la transformada de una función expresada como $g(t)u(t-a)$ en vez de $f(t-a)u(t-a)$. Para calcular $\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\}$, basta identificar $g(t)$ con $f(t-a)$ de modo que $f(t) = g(t+a)$. La ecuación (5) implica entonces

$$\textbf{(8)} \qquad \mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s) \ .$$

EJEMPLO 2 Determinar la transformada de Laplace de $t^2u(t-1)$.

SOLUCIÓN Para aplicar la ecuación (8), hacemos $g(t) = t^2$ y $a = 1$; entonces

$$g(t+a) = g(t+1) = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1 \ .$$

La transformada de Laplace de $g(t+a)$ es

$$\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s) = \mathcal{L}\{t^2 + 2t + 1\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \ .$$

---

†Esta transformada inversa es una función *continua* de t si $f(0) = 0$ y $f(t)$ es continua para $t \geq 0$; los valores de $f(t)$ para $t < 0$ no tienen consecuencias, pues el factor $u(t-a)$ se anula para tales t.

Por la fórmula (8) tenemos

$$\mathscr{L}\{t^2u(t-1)\}(s) = e^{-s}\left\{\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right\} . \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Determinar $\mathscr{L}\{(\cos t)u(t-\pi)\}$.

SOLUCIÓN En este caso, $g(t) = \cos t$ y $a = \pi$. Por tanto

$$g(t+a) = g(t+\pi) = \cos(t+\pi) = -\cos t ,$$

de modo que la transformada de Laplace de $g(t+a)$ es

$$\mathscr{L}\{g(t+a)\}(s) = -\mathscr{L}\{\cos t\}(s) = -\frac{s}{s^2+1} .$$

Así, de la fórmula (8) obtenemos

$$\mathscr{L}\{(\cos t)u(t-\pi)\}(s) = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} . \blacksquare$$

En los ejemplos 2 y 3 también podríamos haber calculado la transformada de Laplace directamente de la definición. Sin embargo, al trabajar con transformadas inversas, no tenemos una fórmula alternativa sencilla† en la cual confiar, de modo que la fórmula (6) es de particular utilidad cuando la transformada tiene a e^{-as} como factor.

EJEMPLO 4 Determinar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$ y bosquejar su gráfica.

SOLUCIÓN Para usar la propiedad de traslación (6), primero expresamos e^{-2s}/s^2 como el producto $e^{-as}F(s)$. Para esto, hacemos $e^{-as} = e^{-2s}$ y $F(s) = 1/s^2$. Así, $a = 2$ y

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) = t .$$

La propiedad de traslación implica entonces que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}(t) = f(t-2)u(t-2) = (t-2)u(t-2) .$$

Véase la figura 7.10. $\blacksquare$

Como lo muestra el siguiente ejemplo, las funciones escalonadas surgen en los modelos

---

†Bajo ciertas condiciones, la transformada inversa está dada por la integral de contorno

$$\mathscr{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}F(s)ds .$$

Véase, por ejemplo, *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, por Wilbur R. LePage (Dover Publications, Nueva York, 1980), o *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science,* (3a. edición), por E. B. Saff y A. D. Snider (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2003).

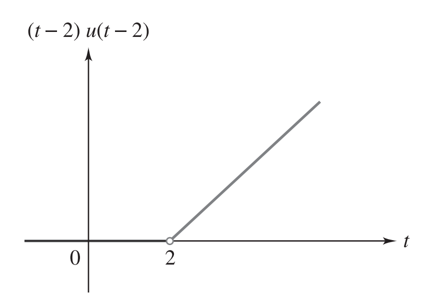


Figura 7.10 Gráfica de la solución del ejemplo 4

de interruptores encendido/apagado, cambios de polaridad, etcétera.

La corriente I en un circuito LC en serie queda descrita mediante el problema con valores iniciales

$$\textbf{(9)} \qquad I''(t) + 4I(t) = g(t) \; ; \qquad I(0) = 0 \; , \qquad I'(0) = 0 \; ,$$

donde

$$g(t) := \begin{cases} 1 \; , & 0 < t < 1 \; , \\ -1 \; , & 1 < t < 2 \; , \\ 0 \; , & 2 < t \; . \end{cases}$$

EJEMPLO 5 Determinar la corriente como función del tiempo t.

SOLUCIÓN Sea $J(s) := \mathscr{L}\{I\}(s)$. Entonces tenemos que $\mathscr{L}\{I''\}(s) = s^2J(s)$. Al expresar

$$g(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) \; ,$$

vemos que

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \; .$$

Así, al considerar la transformada de Laplace a ambos lados de (9), obtenemos

$$\mathscr{L}\{I''\}(s) + 4\mathscr{L}\{I\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s) \; ,$$

$$s^2J(s) + 4J(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \; ,$$

$$J(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{2e^{-s}}{s(s^2+4)} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)} \; .$$

Para determinar $I = \mathscr{L}^{-1}\{J\}$, primero observamos que

$$J(s) = F(s) - 2e^{-s}F(s) + e^{-2s}F(s) \; ,$$

donde

$$F(s) := \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \; .$$

Al calcular la transformada inversa de $F(s)$,

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t \ .$$

Usamos la propiedad de traslación (6) para ver que

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s) - 2e^{-s}F(s) + e^{-2s}F(s)\}(t) \\ &= f(t) - 2f(t-1)u(t-1) + f(t-2)u(t-2) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\right) - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(t-1)\right]u(t-1) \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2(t-2)\right]u(t-2) \ . \end{aligned}$$

La corriente se grafica en la figura 7.11. Observe que $I(t)$ es más suave que $g(t)$; la primera tiene discontinuidades en su segunda derivada en los puntos donde la segunda tiene saltos. ■

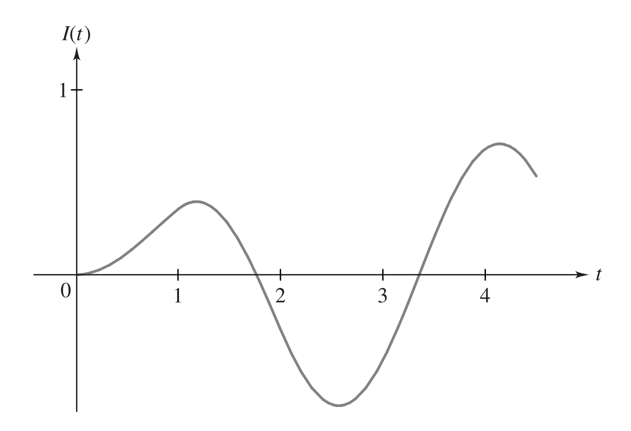


Figura 7.11 Soluciones del ejemplo 5

Las funciones *periódicas* son otra clase de funciones que aparecen con frecuencia en las aplicaciones.

FUNCIÓN PERIÓDICA

Definición 6. Una función $f(t)$ es **periódica con periodo *T*** si

$$f(t+T) = f(t)$$

para toda t en el dominio de f.

Como sabemos, las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π y la función tangente es periódica con periodo π.[†] Para especificar una función periódica, basta dar sus

[†]Una función con periodo T también tendrá periodo $2T$, $3T$, etc. Por ejemplo, la función seno tiene periodos 2π, 4π, 6π, etc. Algunos autores se refieren al menor de los periodos como el **periodo fundamental** o simplemente el periodo de la función.

valores en un periodo. Por ejemplo, la función onda cuadrada de la figura 7.12 se puede expresar como

(10) $$f(t) := \begin{cases} 1\ , & 0 < t < 1\ , \\ 0\ , & 1 < t < 2\ , \end{cases}$$ y $f(t)$ tiene periodo 2.

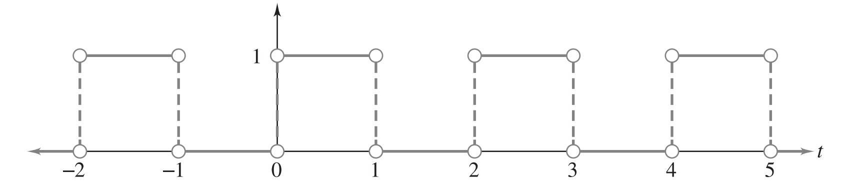


Figura 7.12 Gráfica de la función onda cuadrada $f(t)$

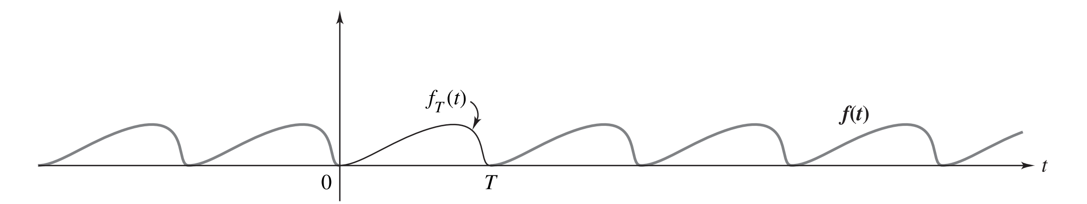


Figura 7.13 Versión enmarcada de una función periódica

Es conveniente introducir una notación para la versión "enmarcada" de una función periódica $f(t)$:

(11) $$f_T(t) := \begin{cases} f(t)\ , & 0 < t < T\ , \\ 0\ , & \text{o bien.} \end{cases}$$

(Véase la figura 7.13.) La transformada de Laplace de $f_T(t)$ está dada por

$$F_T(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_T(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt\ .$$

Su relación con la transformada de Laplace de $f(t)$ es la siguiente.

TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

Teorema 9. Si f tiene periodo T y es continua por partes en $[0, T]$, entonces

(12) $$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1 - e^{-sT}}\ .$$

Demostración. Observe que $f(t)$ puede escribirse como una suma de copias trasladadas de su versión enmarcada:

(13) $$f(t) = f_T(t) + f_T(t - T)u(t - T) + f_T(t - 2T)u(t - 2T) + \cdots\ .$$

Por tanto,

$$\mathscr{L}\{f\} = \mathscr{L}\{f_T\} + \mathscr{L}\{f_T(t-T)u(t-T)\} + \mathscr{L}\{f_T(t-2T)u(t-2T)\} + \cdots \ ,$$

de modo que por la propiedad de traslación expresada en el teorema 8 (página 387),

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\} &= \mathscr{L}\{f_T\} + \mathscr{L}\{f_T\}e^{-sT} + \mathscr{L}\{f_T\}e^{-2sT} + \cdots \\ &= F_T(s)\left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots\right] .\end{aligned}$$

La serie entre corchetes es una serie geométrica, con razón $r = e^{-sT}$, cuya suma es $1/(1-r)$ o $1/(1-e^{-sT})$ para $s > 0$. Por lo tanto,

$$\mathscr{L}\{f\} = F_T(s)/(1-e^{-sT}) \ . \ \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Determinar $\mathscr{L}\{f\}$, donde f es la función onda cuadrada en (10).

SOLUCIÓN En este caso, $T = 2$. Usamos la fórmula (11) para expresar la versión enmarcada de f como

$$f_T(t) = 1 - u(t-1) \ ,$$

de modo que

$$F_T(s) = \mathscr{L}\{1 - u(t-1)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1}{s}(1-e^{-s}) \ .$$

La fórmula (12) implica que

$$\mathscr{L}\{f\} = \frac{1}{s}(1-e^{-s})\frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s(1+e^{-s})} \ . \ \blacksquare$$

En la demostración del teorema 9 determinamos la transformada de Laplace de $f(t)$ escribiendo $f(t)$ como una serie de funciones con transformadas de Laplace conocidas. Este método también se puede usar para funciones que tienen un desarrollo en serie de potencias, pues sabemos que

$$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

EJEMPLO 7 Determinar $\mathscr{L}\{f\}$, donde

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} \ , & t \neq 0 \ , \\ 1 \ , & t = 0 \ . \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero expresamos a $f(t)$ mediante una serie de Taylor[†] en torno de $t = 0$. Como

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \ ,$$

[†]Para un análisis de las series de Taylor, véanse las secciones 8.1 y 8.2.

y luego dividimos entre t para obtener

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \cdots$$

para $t > 0$. Esta representación también es válida para $t = 0$ pues

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \ .$$

Observe que $f(t)$ es continua en $[0, \infty)$ y de orden exponencial. Por lo tanto, su transformada de Laplace existe para toda s suficientemente grande. Debido a la linealidad de la transformada de Laplace, sería de esperar que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\}(s) &= \mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1}{3!}\mathscr{L}\{t^2\}(s) + \frac{1}{5!}\mathscr{L}\{t^4\}(s) + \cdots \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2!}{3!s^3} + \frac{4!}{5!s^5} - \frac{6!}{7!s^7} + \cdots \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} - \frac{1}{7s^7} + \cdots \ .\end{aligned}$$

Podemos usar herramientas de análisis para verificar que esta representación mediante una serie es válida para toda $s > 1$. Además, se puede mostrar que la serie converge a la función $\arctan(1/s)$ (véase el problema 54). Así,

(14) $$\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\}(s) = \arctan \frac{1}{s} \ . \ \blacksquare$$

Se puede usar un procedimiento similar con el desarrollo en serie para $F(s)$ en potencias de $1/s$ para calcular $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}(t)$ (véanse los problemas 55-57).

Hemos mostrado que para cada entero no negativo n, $\mathscr{L}\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}$. ¿Pero qué ocurre si la potencia de t *no* es un entero? ¿Sigue siendo válida esta fórmula? Para responder a estas preguntas, debemos extender la idea de "factorial"; logramos esto mediante la función gamma.[†]

FUNCIÓN GAMMA

Definición 7. La **función gamma** $\Gamma(t)$ se define como

(15) $$\boldsymbol{\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1} du \ , \qquad t > 0 \ .}$$

Se puede mostrar que la integral en (15) converge para $t > 0$. Una propiedad útil de la

[†] ***Nota histórica:*** La función gamma fue introducida por Leonhard Euler.

función gamma es la relación recursiva

(16) $$\boldsymbol{\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)} \ .$$

Esta identidad es consecuencia de la definición (15) después de una integración por partes:

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) &= \int_0^\infty e^{-u}u^t du = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-u}u^t du \\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{-e^{-u}u^t\Big|_0^N + \int_0^N te^{-u}u^{t-1}du\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty}(-e^{-N}N^t) + t\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-u}u^{t-1}du \\ &= 0 + t\Gamma(t) = t\Gamma(t) \ .\end{aligned}$$

Cuando t es un entero positivo, digamos $t = n$, entonces la relación recursiva (16) se puede aplicar varias veces para obtener

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\Gamma(1) \ .\end{aligned}$$

La definición (15) implica que $\Gamma(1) = 1$, de modo que

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!} \ .$$

Así, ¡la función gamma extiende el concepto de factorial!

Como aplicación de la función gamma, regresemos al problema de determinar la transformada de Laplace de una potencia arbitraria de t. Verificaremos la validez de la fórmula

(17) $$\boldsymbol{\mathscr{L}\{t^r\}(s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}}$$

para cada constante $r > -1$.

Por definición,

$$\mathscr{L}\{t^r\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^r dt \ .$$

Hagamos la sustitución $u = st$. Entonces $du = s\,dt$ y tenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^r\}(s) &= \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^r\left(\frac{1}{s}\right)du \\ &= \frac{1}{s^{r+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^r du = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \ .\end{aligned}$$

Observe que cuando $r = n$ es un entero no negativo, entonces $\Gamma(n+1) = n!$, de modo que la fórmula (17) se reduce a la fórmula familiar para $\mathscr{L}\{t^n\}$.

EJERCICIOS 7.6

En los problemas 1 a 4, bosqueje la gráfica de la función dada y determine su transformada de Laplace.

1. $(t-1)^2u(t-1)$.
2. $u(t-1)-u(t-4)$.
3. $t^2u(t-2)$.
4. $tu(t-1)$.

En los problemas 5 a 10, exprese la función dada mediante funciones escalón unitario y calcule su transformada de Laplace.

5. $g(t)=\begin{cases}0\ , & 0<t<1\ ,\\ 2\ , & 1<t<2\ ,\\ 1\ , & 2<t<3\ ,\\ 3\ , & 3<t\ .\end{cases}$

6. $g(t)=\begin{cases}0\ , & 0<t<2\ ,\\ t+1\ , & 2<t\ .\end{cases}$

7.

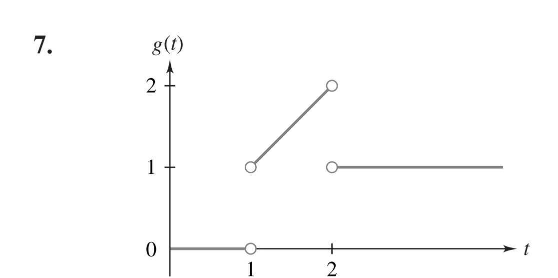


Figura 7.14 Función del problema 7

8.

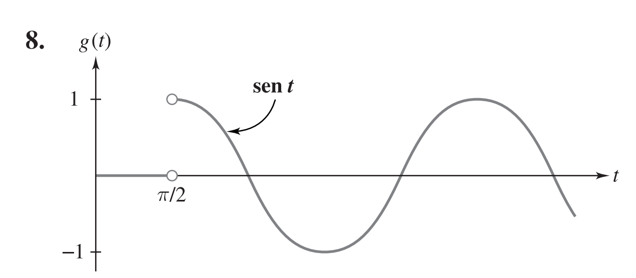


Figura 7.15 Función del problema 8

9.

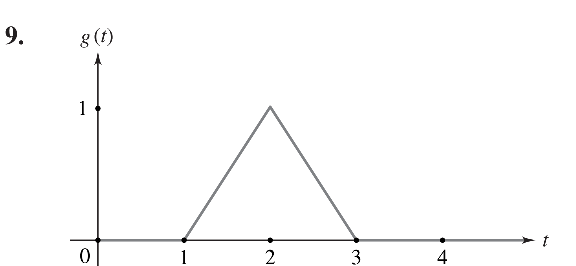


Figura 7.16 Función del problema 9

10.

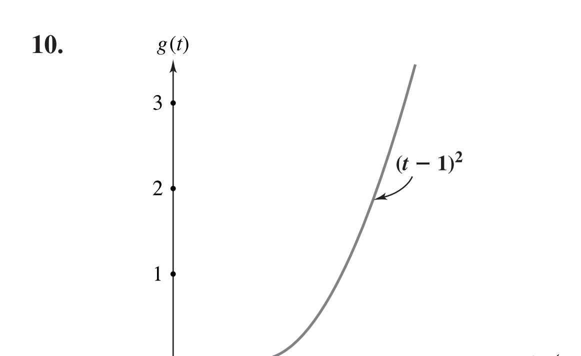


Figura 7.17 Función del problema 10

En los problemas 11 a 18, determine una transformada inversa de Laplace para la función dada.

11. $\dfrac{e^{-2s}}{s-1}$.

12. $\dfrac{e^{-3s}}{s^2}$.

13. $\dfrac{e^{-2s}-3e^{-4s}}{s+2}$.

14. $\dfrac{e^{-3s}}{s^2+9}$.

15. $\dfrac{se^{-3s}}{s^2+4s+5}$.

16. $\dfrac{e^{-s}}{s^2+4}$.

17. $\dfrac{e^{-3s}(s-5)}{(s+1)(s+2)}$.

18. $\dfrac{e^{-s}(3s^2-s+2)}{(s-1)(s^2+1)}$.

19. La corriente $I(t)$ en un circuito *RLC* en serie queda descrita mediante el problema con valores iniciales

$$I''(t)+2I'(t)+2I(t)=g(t)\ ;$$
$$I(0)=10\ ,\qquad I'(0)=0\ ,$$

donde

$$g(t) := \begin{cases} 20\ , & 0 < t < 3\pi\ , \\ 0\ , & 3\pi < t < 4\pi\ , \\ 20\ , & 4\pi < t\ . \end{cases}$$

Determine la corriente como función del tiempo t. Bosqueje $I(t)$ para $0 < t < 8\pi$.

20. La corriente $I(t)$ en un circuito LC en serie queda descrita mediante el problema con valores iniciales

$$I''(t) + 4I(t) = g(t)\ ;$$
$$I(0) = 1\ , \qquad I'(0) = 3\ ,$$

donde

$$g(t) := \begin{cases} 3\,\text{sen}\,t\ , & 0 \le t \le 2\pi\ , \\ 0\ , & 2\pi < t\ . \end{cases}$$

Determine la corriente como función del tiempo t.

En los problemas 21 a 24, determine $\mathscr{L}\{f\}$, donde $f(t)$ es periódica con el periodo dado. Grafique $f(t)$.

21. $f(t) = t\ , 0 < t < 2\ ,$ y $f(t)$ tiene periodo 2.

22. $f(t) = e^t\ , 0 < t < 1\ ,$ y $f(t)$ tiene periodo 1.

23. $f(t) = \begin{cases} e^{-t}\ , & 0 < t < 1\ , \\ 1\ , & 1 < t < 2\ , \end{cases}$

y $f(t)$ tiene periodo 2.

24. $f(t) = \begin{cases} t\ , & 0 < t < 1\ , \\ 1 - t\ , & 1 < t < 2\ , \end{cases}$

y $f(t)$ tiene periodo 2.

En los problemas 25 a 28, determine $\mathscr{L}\{f\}$, donde la función periódica queda descrita mediante su gráfica.

25.

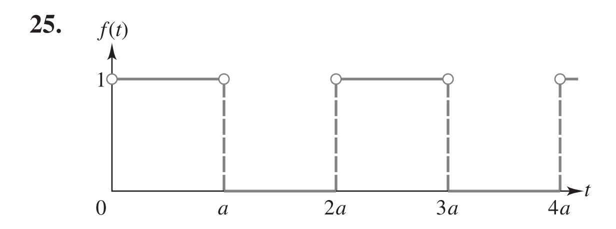


Figura 7.18 Onda cuadrada

26.

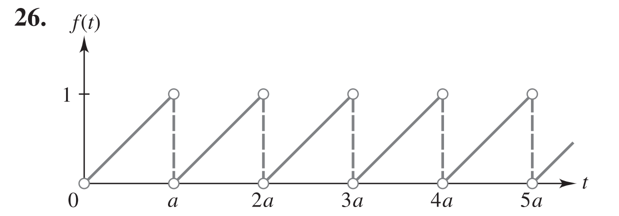


Figura 7.19 Onda diente de sierra

27.

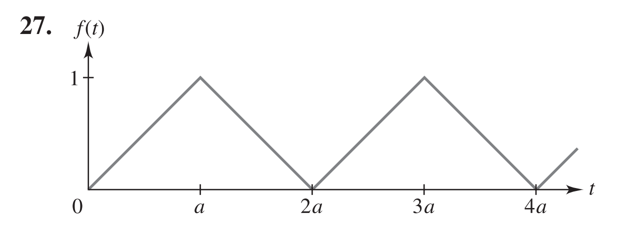


Figura 7.20 Onda triangular

28.

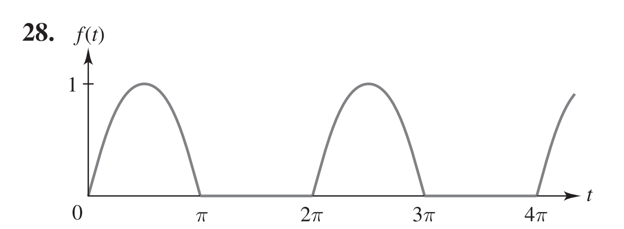


Figura 7.21 Onda senoidal semirectificada

En los problemas 29 a 32, resuelva el problema con valores iniciales dado mediante el método de transformadas de Laplace. Bosqueje la gráfica de la solución.

29. $y'' + y = u(t - 3)\ ;$
$y(0) = 0\ , \qquad y'(0) = 1\ .$

30. $w'' + w = u(t - 2) - u(t - 4)\ ;$
$w(0) = 1\ , \qquad w'(0) = 0\ .$

31. $y'' + y = t - (t - 4)u(t - 2)\ ;$
$y(0) = 0\ , \qquad y'(0) = 1\ .$

32. $y'' + y = 3\,\text{sen}\,2t - 3(\text{sen}\,2t)u(t - 2\pi)\ ;$
$y(0) = 1\ , \qquad y'(0) = -2\ .$

En los problemas 33 a 40, resuelva el problema con valores iniciales dado mediante el método de transformadas de Laplace.

33. $y'' + 2y' + 2y = u(t - 2\pi) - u(t - 4\pi)\ ;$
$y(0) = 1\ , \qquad y'(0) = 1\ .$

34. $y'' + 4y' + 4y = u(t - \pi) - u(t - 2\pi)$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

35. $z'' + 3z' + 2z = e^{-3t}u(t - 2)$;
$z(0) = 2$, $z'(0) = -3$.

36. $y'' + 5y' + 6y = tu(t - 2)$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

37. $y'' + 4y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$,

donde $g(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t , & 0 \le t \le 2\pi , \\ 0 , & 2\pi < t . \end{cases}$

38. $y'' + 2y' + 10y = g(t)$;
$y(0) = -1$, $y'(0) = 0$,

donde $g(t) = \begin{cases} 10 , & 0 \le t \le 10 , \\ 20 , & 10 < t < 20 , \\ 0 , & 20 < t . \end{cases}$

39. $y'' + 5y' + 6y = g(t)$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,

donde $g(t) = \begin{cases} 0 , & 0 \le t < 1 , \\ t , & 1 < t < 5 , \\ 1 , & 5 < t . \end{cases}$

40. $y'' + 3y' + 2y = g(t)$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = -1$,

donde $g(t) = \begin{cases} e^{-t} , & 0 \le t < 3 , \\ 1 , & 3 < t . \end{cases}$

41. Muestre que si $\mathscr{L}\{g\}(s) = [(s + \alpha)(1 - e^{-Ts})]^{-1}$, donde $T > 0$ está fijo, entonces

(18) $$\begin{aligned} g(t) = e^{-\alpha t} &+ e^{-\alpha(t-T)}u(t - T) \\ &+ e^{-\alpha(t-2T)}u(t - 2T) \\ &+ e^{-\alpha(t-3T)}u(t - 3T) + \cdots . \end{aligned}$$

[*Sugerencia*: Use el hecho de que
$1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1 - x)$].

42. La función $g(t)$ en (18) se puede expresar de manera más conveniente como sigue:

(a) Muestre que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$g(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{e^{(n+1)\alpha T} - 1}{e^{\alpha T} - 1}\right]$$

para $nT < t < (n + 1)T$.

[*Sugerencia*: Use el hecho de que $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x - 1)$].

(b) Sea $v = t - (n + 1)T$. Muestre que cuando $nT < t < (n + 1)T$, entonces $-T < v < 0$ y

(19) $$g(t) = \frac{e^{-\alpha v}}{e^{\alpha T} - 1} - \frac{e^{-\alpha t}}{e^{\alpha T} - 1} .$$

(c) Use que el primer término de (19) es periódico con periodo T y que el segundo término es independiente de n para bosquejar la gráfica de $g(t)$ en (19) para $\alpha = 1$ y $T = 2$.

43. Muestre que si $\mathscr{L}\{g\}(s) = \beta[(s^2 + \beta^2)(1 - e^{-Ts})]^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} g(t) = \operatorname{sen} \beta t &+ [\operatorname{sen} \beta(t - T)]u(t - T) \\ &+ [\operatorname{sen} \beta(t - 2T)]u(t - 2T) \\ &+ [\operatorname{sen} \beta(t - 3T)]u(t - 3T) + \cdots . \end{aligned}$$

44. Use el resultado del problema 43 para mostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}\right\}(t) = g(t) ,$$

donde $g(t)$ es periódica con periodo 2π y

$$g(t) := \begin{cases} \operatorname{sen} t , & 0 \le t \le \pi , \\ 0 , & \pi \le t \le 2\pi . \end{cases}$$

En los problemas 45 y 46, use el método de transformadas de Laplace y los resultados de los problemas 41 y 42 para resolver el problema con valores iniciales.

$$y'' + 3y' + 2y = f(t) ;$$
$$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0 ,$$

donde $f(t)$ es la función periódica definida en el problema indicado.

45. Problema 22

46. Problema 25 con $a = 1$.

En los problemas 47 a 50, determine una serie de Taylor para $f(t)$ en torno de $t = 0$. Suponiendo que la transformada de Laplace de $f(t)$ se puede calcular término a término, halle un desarrollo para $\mathscr{L}\{f\}(s)$ en potencias de $1/s$. De ser posible, encuentre la suma de la serie.

47. $f(t) = e^t$.

48. $f(t) = \operatorname{sen} t$.

49. $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$.

50. $f(t) = e^{-t^2}$.

51. Use la relación recursiva (16) y el hecho de que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ para determinar

(a) $\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}$.

(b) $\mathscr{L}\{t^{7/2}\}$.

52. Use la relación recursiva (16) y el hecho de que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ para mostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{s^{-(n+1/2)}\right\}(t) = \frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}} ,$$

donde n es un entero positivo.

53. Explique por qué, para cada t fijo, la serie (13) en la demostración del teorema 9 sólo tiene un número *finito* de términos no nulos.

54. Reemplace s por $1/s$ en el desarrollo en serie de Maclaurin para arctan s y muestre que

$$\arctan\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} - \frac{1}{7s^7} + \cdots .$$

55. Halle un desarrollo de $e^{-1/s}$ en potencias de $1/s$. Use este desarrollo para obtener un desarrollo de $s^{-1/2}e^{-1/s}$ en términos de $1/s^{n+1/2}$. Suponga que la transformada inversa de Laplace se puede calcular término a término y muestre que

$$\mathscr{L}^{-1}\{s^{-1/2}e^{-1/s}\}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{t} .$$

[*Sugerencia*: Use el resultado del problema 52].

56. Use el procedimiento analizado en el problema 55 para mostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\{s^{-3/2}e^{-1/s}\}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} 2\sqrt{t} .$$

57. Halle un desarrollo de $\ln[1 + (1/s^2)]$ en potencias de $1/s$. Suponga que la transformada inversa de Laplace se puede calcular término a término y muestre que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\}(t) = \frac{2}{t}(1 - \cos t) .$$

58. La **función compuerta unitaria** $G_a(t)$ se define como

$$G_a(t) := \begin{cases} 0 , & t < 0 , \\ 1 , & 0 < t < a , \\ 0 , & a < t . \end{cases}$$

(a) Muestre que $G_a(t) = u(t) - u(t-a)$.

(b) Verifique que $\mathscr{L}\{G_a\}(s) = (1/s)(1 - e^{-as})$.

(c) Muestre que
$\mathscr{L}\{G_a(t-b)\}(s) = (1/s)(e^{-bs} - e^{-(a+b)s})$.

En los problemas 59 y 60, use los resultados del problema 58 y el método de transformadas de Laplace para resolver el problema con valores iniciales dado.

59. $y'' - y = G_3(t-1)$;
$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 2$.

60. $y'' - y = G_4(t-3)$;
$y(0) = 1 , \quad y'(0) = -1$.

61. El tanque mezclador de la figura 7.22 contiene inicialmente 500 litros de una solución salina, con una concentración de sal de 0.2 kg/l. Durante los primeros 10 minutos de operación, se abre la válvula A, añadiendo 12 litros/min de una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/l. Después de 10 minutos, se cambia a la válvula B, la cual agrega una concentración de 0.6 kg/litro a 12 litros/min. La válvula de salida C elimina 12 litros/minuto, manteniendo constante el volumen. Determine la concentración de sal en el tanque como función del tiempo.

62. En el problema 61, suponga que la válvula B se abre inicialmente durante 10 minutos y que luego se pasa a la válvula A durante 10 minutos. Por último, se regresa a la válvula B. Determine la concentración de sal en el tanque como función del tiempo.

63. En el problema 61 suponga que la válvula C sólo elimina 6 litros/minuto. ¿Se puede usar la transformada de Laplace para resolver el problema? Justifique su respuesta.

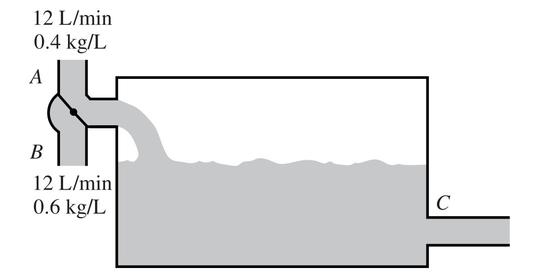


Figura 7.22 Tanque mezclador

7.7 CONVOLUCIÓN

Considere el problema con valores iniciales

(1) $\quad y'' + y = g(t) ; \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0 .$

Si $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$ y $G(s) = \mathscr{L}\{g\}(s)$, y calculamos la transformada de Laplace de ambos lados de (1), tenemos

$$s^2Y(s) + Y(s) = G(s) ,$$

y por tanto,

$$\text{(2)} \qquad Y(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)G(s) \ .$$

Es decir, la transformada de Laplace de la solución de (1) es el producto de la transformada de Laplace de sen t y la transformada de Laplace del término de forzamiento $g(t)$. Ahora quisiéramos tener una fórmula sencilla para $y(t)$ en términos de sen t y $g(t)$. Así como la integral de un producto no es el producto de las integrales, $y(t)$ no es el producto de sen t y $g(t)$; sin embargo, podemos expresar a $y(t)$ como la "convolución" de sen t y $g(t)$.

CONVOLUCIÓN

Definición 8. Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas por partes en $[0, \infty)$. La **convolución** de $f(t)$ y $g(t)$, que se denota $f * g$, se define como

$$\textbf{(3)} \qquad (f * g)(t) := \int_0^t f(t - v)g(v)dv \ .$$

Por ejemplo, la convolución de t y t^2 es

$$t * t^2 = \int_0^t (t - v)v^2 dv = \int_0^t (tv^2 - v^3)dv$$
$$= \left(\frac{tv^3}{3} - \frac{v^4}{4}\right)\Bigg|_0^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12} \ .$$

Es claro que la convolución es distinta de la multiplicación común. Por ejemplo, $1 * 1 = t \neq 1$, y en general, $1 * f \neq f$. Sin embargo, la convolución sí satisface algunas propiedades de la multiplicación.

PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN

Teorema 10. Sean $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ continuas por partes en $[0, \infty)$. Entonces

$$\textbf{(4)} \qquad f * g = g * f ,$$
$$\textbf{(5)} \qquad f * (g + h) = (f * g) + (f * h) ,$$
$$\textbf{(6)} \qquad (f * g) * h = f * (g * h) ,$$
$$\textbf{(7)} \qquad f * 0 = 0 \ .$$

Demostración. Para demostrar la ecuación (4), comenzamos con la definición

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - v)g(v)dv \ .$$

Ahora usamos el cambio de variable $w = t - v$:

$$(f * g)(t) = \int_t^0 f(w)g(t-w)(-dw) = \int_0^t g(t-w)f(w)dw = (g * f)(t) ,$$

lo que demuestra (4). Las demostraciones de las ecuaciones (5) y (6) se dejan para los ejercicios (véanse los problemas 33 y 34). La ecuación (7) es evidente, pues $f(t-v) \cdot 0 \equiv 0$. ■

De regreso a nuestro objetivo original, ahora mostraremos que si $Y(s)$ es el producto de las transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$, entonces $y(t)$ es la convolución $(f * g)(t)$.

TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Teorema 11. Sean $f(t)$ y $g(t)$ continuas por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α; sean $F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$ y $G(s) = \mathscr{L}\{g\}(s)$. Entonces

(8) $$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s) ,$$

o, de manera equivalente,

(9) $$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t) .$$

Demostración. Partimos del lado izquierdo de (8) y usamos la definición de convolución para escribir, con $s > \alpha$,

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-v)g(v)dv\right]dt .$$

Para simplificar la evaluación de esta integral iterada, introducimos la función escalón unitario $u(t-v)$ y escribimos

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty u(t-v)f(t-v)g(v)dv\right]dt ,$$

donde hemos usado el hecho de que $u(t-v) = 0$ si $v > t$. Al invertir el orden de integración† se tiene

(10) $$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty g(v)\left[\int_0^\infty e^{-st}u(t-v)f(t-v)dt\right]dv .$$

Recuerde, de la propiedad de traslación de la sección 7.6 que la integral entre paréntesis en la ecuación (10) es igual a $e^{-sv}F(s)$. Por tanto,

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty g(v)e^{-sv}F(s)dv = F(s)\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv = F(s)G(s) .$$

Esto demuestra la fórmula (8). ■

†Esto se puede hacer debido a que para $s > \alpha$, el valor absoluto del integrando es integrable en $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Para el problema con valores iniciales (1), recuerde que

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)G(s) = \mathscr{L}\{\text{sen } t\}(s)\,\mathscr{L}\{g\}(s) \ .$$

El teorema de convolución implica entonces que

$$y(t) = \text{sen } t * g(t) = \int_0^t \text{sen } (t - v)g(v)dv \ .$$

Así, hemos obtenido una representación integral para la solución del problema con valores iniciales (1) para cualquier función de forzamiento $g(t)$ que sea continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial.

EJEMPLO 1 Usar el teorema de convolución para resolver el problema con valores iniciales

(11) $$y'' - y = g(t) \ ; \qquad y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 1 \ ,$$

donde $g(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial.

SOLUCIÓN Sean $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$ y $G(s) = \mathscr{L}\{g\}(s)$. Al calcular la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial en (11) y usar las condiciones iniciales, tenemos

$$s^2Y(s) - s - 1 - Y(s) = G(s) \ .$$

Despejando $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{s + 1}{s^2 - 1} + \left(\frac{1}{s^2 - 1}\right)G(s) = \frac{1}{s - 1} + \left(\frac{1}{s^2 - 1}\right)G(s) \ .$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\}(t) + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\ G(s)\right\}(t)$$
$$= e^t + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\ G(s)\right\}(t) \ .$$

Usamos la tabla de transformadas de Laplace de los forros para ver que

$$\mathscr{L}\{\text{senh } t\}(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \ ,$$

de modo que ahora podemos expresar

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\ G(s)\right\}(t) = \text{senh } t * g(t) \ .$$

Así,

$$y(t) = e^t + \int_0^t \text{senh } (t - v)g(v)dv$$

es la solución del problema con valores iniciales (11). ■

EJEMPLO 2 Usar el teorema de convolución para determinar $\mathscr{L}^{-1}\{1/(s^2+1)^2\}$.

SOLUCIÓN Escribimos

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right) .$$

Como $\mathscr{L}\{\text{sen } t\}(s) = 1/(s^2+1)$, el teorema de convolución implica que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}(t) &= \text{sen } t * \text{sen } t = \int_0^t \text{sen}(t-v)\text{sen } v\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t [\cos(2v-t) - \cos t]\,dv^{\dagger} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(2v-t)}{2}\right]_0^t - \frac{1}{2}t\cos t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen } t}{2} - \frac{\text{sen}(-t)}{2}\right] - \frac{1}{2}t\cos t \\
&= \frac{\text{sen } t - t\cos t}{2} . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Como muestra el ejemplo anterior, el teorema de convolución es útil para determinar las transformadas inversas de funciones racionales de s. De hecho, es una alternativa al método de fracciones parciales. Por ejemplo,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-a}\right)\left(\frac{1}{s-b}\right)\right\}(t) = e^{at} * e^{bt} ,$$

y lo único que falta para determinarla inversa es calcular la convolución $e^{at} * e^{bt}$.

A principios de la década de 1900, V. Volterra introdujo las ecuaciones **íntegro-diferenciales** en su estudio del crecimiento de poblaciones. Estas ecuaciones le permitieron tomar en cuenta las "influencias hereditarias". En ciertos casos, estas ecuaciones implicaban una convolución. Como muestra el siguiente ejemplo, el teorema de convolución ayuda a resolver tales ecuaciones.

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación íntegro-diferencial

$$\textbf{(12)} \qquad y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-v)e^{-2v}dv , \qquad y(0) = 1 .$$

SOLUCIÓN La ecuación (12) se puede escribir como

$$\textbf{(13)} \qquad y'(t) = 1 - y(t) * e^{-2t} .$$

---

†Usamos la identidad sen a sen $\beta = \frac{1}{2}[\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)]$.

Sea $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$. Al calcular la transformada de Laplace de (13) (con la ayuda del teorema de convolución) y despejar $Y(s)$, obtenemos

$$sY(s) - 1 = \frac{1}{s} - Y(s)\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$sY(s) + \left(\frac{1}{s+2}\right)Y(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$\left(\frac{s^2+2s+1}{s+2}\right)Y(s) = \frac{s+1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)^2} = \frac{s+2}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} .$$

Por lo tanto, $y(t) = 2 - e^{-t}$. ■

La **función de transferencia** $H(s)$ de un sistema lineal es el cociente de la transformada de Laplace de la función de salida $y(t)$ entre la transformada de Laplace de la función de entrada $g(t)$, suponiendo que todas las condiciones iniciales se anulan. Es decir, $H(s) = Y(s)/G(s)$. Si el sistema lineal es controlado por la ecuación diferencial

(14) $$ay'' + by' + cy = g(t) , \qquad t > 0 ,$$

donde *a, b* y *c* son constantes, podemos calcular la función de transferencia como sigue. Calculamos la transformada de Laplace de ambos lados de (14) para obtener

$$as^2Y(s) - asy(0) - ay'(0) + bsY(s) - by(0) + cY(s) = G(s) .$$

Como suponemos que las condiciones iniciales se anulan, la ecuación se reduce a

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = G(s) .$$

Así, la función de transferencia para la ecuación (14) es

(15) $$H(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c} .$$

El lector puede notar la similitud de estos cálculos con los correspondientes para hallar la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea asociada a (14) (recuerde la sección 4.5, página 184). En efecto, el primero paso para invertir $Y(s) = G(s)/(as^2 + bs + c)$ sería hallar las raíces del denominador $as^2 + bs + c$, que es lo mismo que resolver la ecuación característica para (14).

La función $h(t) := \mathscr{L}^{-1}\{H\}(t)$ es la **función de respuesta al impulso** para el sistema; este nombre proviene del hecho de que describe la solución al golpear un sistema masa-resorte con un martillo (véase la sección 7.8). También podemos caracterizar $h(t)$ como la única solución al problema homogéneo

(16) $$ah'' + bh' + ch = 0 ; \qquad h(0) = 0 , \qquad h'(0) = 1/a .$$

Observe que al calcular la transformada de Laplace de la ecuación en (16) tenemos

(17) $$a[s^2H(s) - sh(0) - h'(0)] + b[sH(s) - h(0)] + cH(s) = 0 .$$

Sustituimos $h(0) = 0$ y $h'(0) = 1/a$ y despejamos $H(s)$:

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} ,$$

que es igual a la fórmula para la función de transferencia dada en la ecuación (15).

Una característica importante de la función de respuesta al impulso h es que nos ayuda a describir la solución del problema *general* con valores iniciales

$$\textbf{(18)} \qquad ay'' + by' + cy = g(t) \; ; \qquad y(0) = y_0 \; , \qquad y'(0) = y_1 \; .$$

Por el análisis de la ecuación (14) podemos ver que la convolución $h * g$ es la solución de (18) en el caso particular en que las condiciones iniciales se anulan (es decir, $y_0 = y_1 = 0$). Para trabajar con condiciones iniciales no nulas, sea y_k la solución del problema *homogéneo* con valores iniciales correspondiente; es decir, y_k es solución de

$$\textbf{(19)} \qquad ay'' + by' + cy = 0 \; ; \qquad y(0) = y_0 \; , \qquad y'(0) = y_1 \; .$$

Así, la solución deseada del problema general con valores iniciales (18) debe ser $h * g + y_k$. El principio de superposición (véase el teorema 5 de la sección 4.7) implica que, como $h * g$ es una solución de la ecuación (14) y y_k es una solución de la ecuación homogénea correspondiente, entonces $h * g + y_k$ es una solución de la ecuación (14). Además, como $h * g$ tiene condiciones iniciales nulas,

$$(h * g)(0) + y_k(0) = 0 + y_0 = y_0 \; ,$$
$$(h * g)'(0) + y_k'(0) = 0 + y_1 = y_1 \; .$$

Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema.

SOLUCIÓN MEDIANTE LA FUNCIÓN DE RESPUESTA AL IMPULSO

Teorema 12. Sea I un intervalo que contiene al origen. La solución única del problema con valores iniciales

$$ay'' + by' + cy = g \; ; \qquad y(0) = y_0 \; , \qquad y'(0) = y_1 \; ,$$

donde a, b y c son constantes y g es continua en I, está dada por

$$\textbf{(20)} \qquad y(t) = (h * g)(t) + y_k(t) = \int_0^t h(t - v)g(v)\,dv + y_k(t) \; ,$$

donde h es la función de respuesta al impulso para el sistema y y_k es la solución única de (19).

La ecuación (20) resalta la forma en que el valor de y en el instante t depende de las condiciones iniciales (a través de $y_k(t)$) y de la no homogeneidad $g(t)$ (a través de la integral de convolución). También exhibe la naturaleza *causal* de esta dependencia, pues el valor de $g(v)$ no puede influir sobre $y(t)$ a menos que $t \geq v$.

En el proyecto C del capítulo 4 se bosqueja una demostración del teorema 12 que no implica transformadas de Laplace.

En el siguiente ejemplo usamos el teorema 12 para determinar una fórmula para la solución de un problema con valores iniciales.

EJEMPLO 4 Un sistema lineal está descrito mediante la ecuación diferencial

$$\text{(21)} \qquad y'' + 2y' + 5y = g(t) \; ; \qquad y(0) = 2 \; , \qquad y'(0) = -2 \; .$$

Determine la función de transferencia para el sistema, la función de respuesta al impulso y una fórmula para la solución.

SOLUCIÓN De acuerdo con la fórmula (15), la función de transferencia para (21) es

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \; .$$

La transformada inversa de Laplace de $H(s)$ es la función de respuesta al impulso

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H\}(t) = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right\}(t)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t \; .$$

Para resolver el problema con valores iniciales, necesitamos la solución del problema homogéneo correspondiente. La ecuación auxiliar para la ecuación homogénea es $r^2 + 2r + 5 = 0$, que tiene raíces $r = -1 \pm 2i$. Así, $C_1e^{-t}\cos 2t + C_2e^{-t}\operatorname{sen} 2t$ es una solución general. Si elegimos C_1 y C_2 de modo que se cumplan las condiciones iniciales en (21), obtenemos $y_k(t) = 2e^{-t}\cos 2t$.

Por lo tanto, una fórmula para la solución del problema con valores iniciales (21) es

$$(h * g)(t) + y_k(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-v)}\operatorname{sen}[2(t-v)]g(v)dv + 2e^{-t}\cos 2t \; . \; \blacksquare$$

EJERCICIOS 7.7

En los problemas 1 a 4, use el teorema de convolución para obtener una fórmula para la solución del problema con valores iniciales dado, donde $g(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial.

1. $y'' - 2y' + y = g(t)$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

2. $y'' + 9y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. $y'' + 4y' + 5y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

4. $y'' + y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

En los problemas 5 a 12, use el teorema de convolución para hallar la transformada inversa de Laplace de la función dada.

5. $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

6. $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$.

7. $\dfrac{14}{(s+2)(s-5)}$.

8. $\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$.

9. $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$.

10. $\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$.

11. $\dfrac{s}{(s-1)(s+2)}$. $\left[\textit{Sugerencia: } \dfrac{s}{s-1} = 1 + \dfrac{1}{s-1} \; .\right]$

12. $\dfrac{s+1}{(s^2+1)^2}$.

13. Determine la transformada de Laplace de

$$f(t) := \int_0^t (t-v)e^{3v}dv \; .$$

14. Determine la transformada de Laplace de

$$f(t) := \int_0^t e^{v}\operatorname{sen}(t-v)dv \; .$$

En los problemas 15 a 22, resuelva la ecuación integral o íntegro-diferencial para $y(t)$.

15. $y(t) + 3\int_0^t y(v)\operatorname{sen}(t - v)dv = t$.

16. $y(t) + \int_0^t e^{t-v}y(v)dv = \operatorname{sen} t$.

17. $y(t) + \int_0^t (t - v)y(v)dv = 1$.

18. $y(t) + \int_0^t (t - v)y(v)dv = t^2$.

19. $y(t) + \int_0^t (t - v)^2y(v)dv = t^3 + 3$.

20. $y'(t) + \int_0^t (t - v)y(v)dv = t$, $y(0) = 0$.

21. $y'(t) + y(t) - \int_0^t y(v)\operatorname{sen}(t - v)dv = -\operatorname{sen} t$, $y(0) = 1$.

22. $y'(t) - 2\int_0^t e^{t-v}y(v)dv = t$, $y(0) = 2$.

En los problemas 23 a 28, un sistema lineal queda descrito mediante el problema con valores iniciales dado. Determine la función de transferencia $H(s)$ para el sistema, la función de respuesta al impulso $h(t)$ y dé una fórmula para la solución del problema con valores iniciales.

23. $y'' + 9y = g(t)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

24. $y'' - 9y = g(t)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

25. $y'' - y' - 6y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.

26. $y'' + 2y' - 15y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$.

27. $y'' - 2y' + 5y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

28. $y'' - 4y' + 5y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

En los problemas 29 y 30, la corriente $I(t)$ de un circuito RLC con fuente de voltaje $E(t)$ queda descrita mediante el problema con valores iniciales

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = e(t) ,$$
$$I(0) = a , \qquad I'(0) = b ,$$

donde $e(t) = E'(t)$ (véase la figura 7.23). Para las constantes dadas R, L, C, a y b, halle una fórmula para la solución $I(t)$ en términos de $e(t)$.

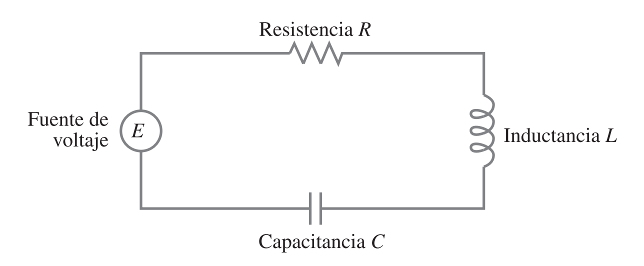


Figura 7.23 Diagrama esquemático de un circuito *RLC* en serie

29. $R = 20$ ohms, $L = 5$ henrys, $C = 0.005$ farads, $a = -1$ amperes, $b = 8$ amperes/segundo.

30. $R = 80$ ohms, $L = 10$ henrys, $C = 1/410$ farads, $a = 2$ amperes, $b = -8$ amperes/segundo.

31. Use el teorema de convolución y la transformada de Laplace para calcular $1 * 1 * 1$.

32. Use el teorema de convolución y la transformada de Laplace para calcular $1 * t * t^2$.

33. Demuestre la propiedad (5) en el teorema 10.

34. Demuestre la propiedad (6) en el teorema 10.

35. Use el teorema de convolución para mostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}(t) = \int_0^t f(v)dv ,$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$.

36. Use el teorema 5 de la sección 7.3 y el teorema de convolución para mostrar que

$$\int_0^t \int_0^v f(z)\,dz\,dv = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\}(t)$$
$$= t\int_0^t f(v)dv - \int_0^t vf(v)dv ,$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$.

37. Demuestre directamente que si $h(t)$ es la función de respuesta al impulso caracterizada por la ecuación (16), entonces para cualquier función continua $g(t)$ ocurre que $(h * g)(0) = (h * g)'(0) = 0$. [*Sugerencia*: Use la regla de Leibniz, descrita en el proyecto C del capítulo 4].

7.8 IMPULSOS Y LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

En los sistemas mecánicos, circuitos eléctricos, doblamiento de vigas y otras aplicaciones aparecen funciones con un valor muy grande durante un intervalo de tiempo muy corto. Por ejemplo, el golpe de un martillo ejerce una fuerza relativamente grande durante un intervalo relativamente corto, y un gran peso concentrado en un punto de una viga suspendida ejerce una fuerza de gran tamaño sobre una sección muy pequeña de la viga. Para trabajar con fuerzas violentas o de breve duración, los físicos y los ingenieros usan la función delta introducida por Paul A. M. Dirac. Relajaremos nuestro rigor por el momento y presentaremos la siguiente definición, un tanto informal.

FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

Definición 9. La **función delta de Dirac** $\delta(t)$ se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

(1) $$\delta(t) = \begin{cases} 0\,, & t \neq 0\,, \\ \text{“infinito”}, & t = 0\,, \end{cases}$$

y

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$$

para cualquier función $f(t)$ que sea continua en un intervalo abierto que contiene a $t = 0$.

Al recorrer el argumento de $\delta(t)$, tenemos que $\delta(t - a) = 0$, $t \neq a$ y

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)\,dt = f(a)$$

para cualquier función $f(t)$ que sea continua en un intervalo abierto que contiene a $t = a$.

Es claro que $\delta(t - a)$ no es una función en el sentido usual; en realidad, es un ejemplo de lo que se llama **función generalizada** o **distribución**. A pesar de este inconveniente, ¡la función delta de Dirac fue utilizada con éxito durante varios años para resolver varios problemas de física e ingeniería antes de que Laurent Schwarz justificara matemáticamente su uso!

Un argumento heurístico para la existencia de la función delta de Dirac considera el impulso de una fuerza durante un breve intervalo de tiempo. Si una fuerza $\mathscr{F}(t)$ se aplica del instante t_0 al instante t_1, entonces el **impulso** debido a $\mathscr{F}$ es la integral

$$\text{Impulso} := \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{F}(t)\,dt\ .$$

Por la segunda ley de Newton, vemos que

$$\textbf{(4)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{F}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{dv}{dt}\,dt = mv(t_1) - mv(t_0) ,$$

donde m denota la masa y v denota la velocidad. Como mv representa el momento, podemos interpretar la ecuación (4) diciendo que **el impulso es igual al cambio en el momento**.

Cuando un martillo golpea un objeto, transfiere un momento a éste. Este cambio en el momento ocurre durante un periodo muy breve de tiempo, digamos, $[t_0, t_1]$. Si $\mathscr{F}_1(t)$ representa la fuerza debida al martillo, entonces el *área* bajo la curva $\mathscr{F}_1(t)$ es el impulso o cambio de momento (véase la figura 7.24). Si, como muestra la figura 7.25, el mismo cambio de momento ocurre en intervalos de tiempo cada vez menores, digamos $[t_0, t_2]$ o $[t_0, t_3]$, entonces la fuerza promedio debe ser cada vez mayor para que los impulsos (las áreas bajo las curvas $\mathscr{F}_n$) sigan siendo iguales. Si las fuerzas $\mathscr{F}_n$ tienen el mismo acto de impulso sobre los intervalos $[t_0, t_n]$, respectivamente, donde $t_n \to t_0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\mathscr{F}_n$ tiende a una función que se anula para $t \neq t_0$ pero que tiene un valor infinito para $t = t_0$. Además, las áreas debajo de las $\mathscr{F}_n$ tienen un valor común. Al normalizar este valor en 1 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_n(t)\,dt = 1 \qquad \text{para toda } n.$$

Cuando $t_0 = 0$, deducimos de las propiedades límite de las $\mathscr{F}_n$ una "función" δ que satisface la propiedad (1) y la condición integral

$$\textbf{(5)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 .$$

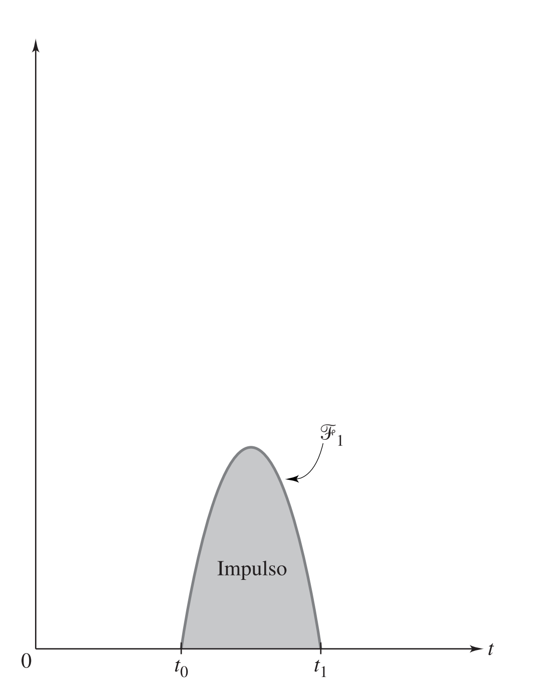


Figura 7.24 Fuerza debida al golpe de un martillo

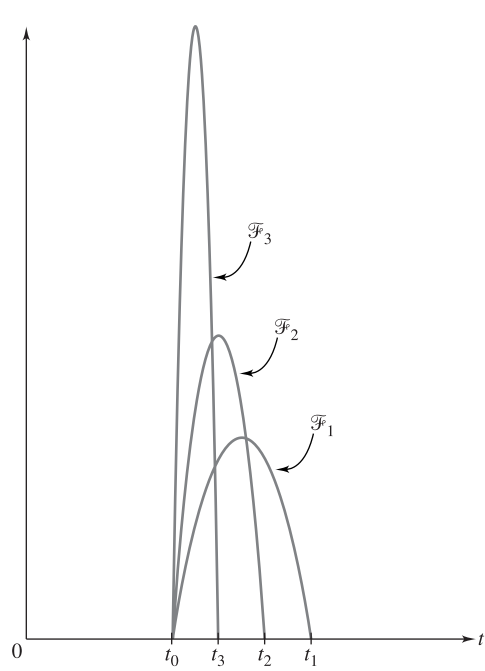


Figura 7.25 Fuerzas con el mismo impulso

Observe que (5) es un caso particular de la propiedad (2) obtenido al hacer $f(t) \equiv 1$. Es interesante notar que (1) y (5) implican la propiedad general (2) (véase el problema 33).

La transformada de Laplace de la función delta de Dirac se puede deducir fácilmente de la propiedad (3). Como $\delta(t-a)=0$ para $t \neq a$, si hacemos $f(t)=e^{-st}$ en (3), vemos que para $a \geq 0$,

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-as} .$$

Así, para $a \geq 0$,

(6) $$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as} .$$

La función escalón unitario y la función delta de Dirac tienen una relación interesante. Observe que la ecuación (5) y el hecho de que $\delta(x-a)$ se anule para $x < a$ y para $x > a$ implican que

(7) $$\int_{-\infty}^t \delta(x-a)dx = \begin{cases} 0 , & t < a , \\ 1 , & t > a \end{cases}$$
$$= u(t-a) .$$

Si derivamos formalmente ambos lados de (7) con respecto de t (en el espíritu del teorema fundamental del cálculo), vemos que

$$\delta(t-a) = u'(t-a) .$$

Así, parece que la función delta de Dirac es la derivada de la función escalón unitario. Esto es cierto si consideramos la "derivación" en un sentido más general.†

La función delta de Dirac se usa para modelar problemas de vibración mecánica que implican un impulso. Por ejemplo, un sistema masa-resorte en reposo golpeado por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa quedaría descrito mediante el problema con valores iniciales *simbólico*

(8) $$x'' + x = \delta(t) ; \quad x(0) = 0 , \quad x'(0) = 0 ,$$

donde $x(t)$ denota el desplazamiento con respecto del equilibrio en el instante t. Decimos que éste es un problema simbólico debido a que, aunque el lado izquierdo de la ecuación (8) representa una función ordinaria, el lado derecho *no*. En consecuencia, no es claro lo que queremos decir por una solución del problema (8). Como $\delta(t)$ se anula en todo punto excepto en $t = 0$, estaríamos tentados a considerar a (8) como una ecuación homogénea con condiciones iniciales nulas. Pero la solución de este problema se anularía en todo punto, lo que ciertamente no describe el movimiento del resorte después de que el martillo ha golpeado la masa.

Para definir qué entendemos por una solución de (8), recordemos que $\delta(t)$ se exhibe como el límite de fuerzas $\mathcal{F}_n(t)$ que tienen un impulso unitario y que actúan en intervalos de tiempo cada vez menores. Si $y_n(t)$ es la solución del problema con valores iniciales

(9) $$y_n'' + y_n = \mathcal{F}_n(t) ; \quad y_n(0) = 0 , \quad y_n'(0) = 0 ,$$

donde δ se reemplaza con $\mathcal{F}_n$, entonces podemos pensar la solución $x(t)$ de (8) como el límite (cuando $n \to \infty$) de las soluciones $y_n(t)$.

†Véase *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms*, por H. J. Bremermann (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965).

Por ejemplo, si

$$\mathcal{F}_n(t) := n - nu(t - 1/n) = \begin{cases} n\ , & 0 < t < 1/n\ , \\ 0\ , & \text{o bien.} \end{cases}$$

Al calcular la transformada de Laplace de la ecuación (9) vemos que

$$(s^2 + 1)Y_n(s) = \frac{n}{s}(1 - e^{-s/n})\ ,$$

y entonces

$$Y_n(s) = \frac{n}{s(s^2 + 1)} - e^{-s/n}\frac{n}{s(s^2 + 1)}\ .$$

Ahora

$$\frac{n}{s(s^2 + 1)} = \frac{n}{s} - \frac{ns}{s^2 + 1} = \mathcal{L}\{n - n\cos t\}(s)\ .$$

Por tanto,

(10)
$$\begin{aligned} y_n(t) &= n - n\cos t - \big(n - n\cos(t - 1/n)\big)u(t - 1/n) \\ &= \begin{cases} n - n\cos t\ , & 0 < t < 1/n\ , \\ n\cos(t - 1/n) - n\cos t\ , & 1/n < t\ . \end{cases} \end{aligned}$$

Fijemos $t > 0$. Entonces, para n suficientemente grande, tenemos que $1/n < t$. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\left[n\cos(t - 1/n) - n\cos t\right] \\ &= -\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(t - 1/n) - \cos t}{-1/n} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{\cos(t + h) - \cos t}{h}\ , \quad (\text{donde } h = -1/n)\ , \\ &= -\frac{d}{dt}(\cos t) = \operatorname{sen} t\ . \end{aligned}$$

Además, para $t = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n(0) = 0$ sen 0. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \operatorname{sen} t\ .$$

Por lo tanto, la solución del problema simbólico con valores iniciales (8) es $x(t) = \operatorname{sen} t$.

Por fortuna, no tenemos que pasar por todo el tedioso proceso de hallar cada y_n para hallar la solución x del problema simbólico. El método de la transformada de Laplace aplicado directamente a (8) nos proporciona la solución deseada $x(t)$. En efecto, al considerar la transformada de Laplace de ambos lados de (8), obtenemos de (6) (con $a = 0$)

$$\begin{aligned} (s^2 + 1)X(s) &= 1\ , \\ X(s) &= \frac{1}{s^2 + 1}\ , \end{aligned}$$

lo que da como resultado

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}(t) = \operatorname{sen} t \ .$$

Una peculiaridad del uso de la función delta de Dirac es que la solución $x(t) = \operatorname{sen} t$ del problema simbólico con valores iniciales (8) no satisface ambas condiciones iniciales; es decir, $x'(0) = 1 \neq 0$. Esto refleja el hecho de que el impulso $\delta(t)$ se aplica en $t = 0$. Así, el momento x' pasa abruptamente de $x'(0) = 0$ a $x'(0^+) = 1$ [observe que en la ecuación (8) la masa es igual a 1].

En el siguiente ejemplo usamos la función delta de Dirac para modelar un problema de vibración mecánica.

EJEMPLO 1 Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo, a un metro por debajo de la posición de equilibrio para el sistema masa-resorte y comienza a vibrar. Después de π segundos, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema queda descrito por el problema simbólico con valores iniciales

$$\textbf{(11)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3\delta(t - \pi) \ ; \qquad x(0) = 1 \ , \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \ ,$$

donde $x(t)$ denota el desplazamiento con respecto del equilibrio en el instante t. Determinar $x(t)$.

SOLUCIÓN Sea $X(s) = \mathscr{L}\{x\}(s)$. Como

$$\mathscr{L}\{x''\}(s) = s^2X(s) - s \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}\{\delta(t - \pi)\}(s) = e^{-\pi s} \ ,$$

al calcular la transformada de Laplace de ambos lados de (11) y despejar $X(s)$ tenemos

$$\begin{aligned} s^2X(s) - s + 9X(s) &= 3e^{-\pi s} \\ X(s) &= \frac{s}{s^2 + 9} + e^{-\pi s}\frac{3}{s^2 + 9} \\ &= \mathscr{L}\{\cos 3t\}(s) + e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 3t\}(s) \ . \end{aligned}$$

Usamos la propiedad de traslación (véase la página 387) para determinar la transformada inversa de Laplace de $X(s)$, de modo que

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 3t + [\operatorname{sen} 3(t - \pi)]u(t - \pi) \\ &= \begin{cases} \cos 3t \ , & t < \pi \ , \\ \cos 3t - \operatorname{sen} 3t \ , & \pi < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos 3t \ , & t < \pi \ , \\ \sqrt{2}\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{4}\right) \ , & \pi < t \ . \end{cases} \end{aligned}$$

La gráfica de $x(t)$ aparece en curva continua en la figura 7.26 de la página 412. Como comparación, la curva punteada exhibe el desplazamiento de un resorte vibrante sin perturbaciones. Observe que el impulso suma 3 unidades al momento en el instante $t = \pi$. ■

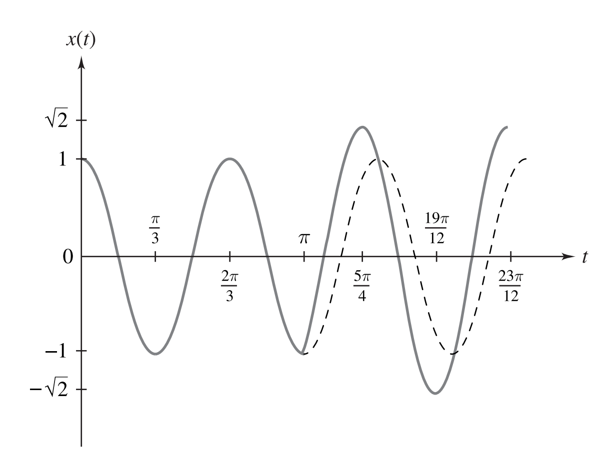


Figura 7.26 Desplazamiento de un resorte vibrante golpeado por un martillo en $t = \pi$

En la sección 7.7 definimos la **función de respuesta al impulso** para

(12) $$ay'' + by' + cy = g(t)$$

como la función $h(t) := \mathscr{L}^{-1}\{H\}(t)$, donde $H(s)$ es la **función de transferencia**. Recuerde que $H(s)$ es el cociente

$$H(s) := \frac{Y(s)}{G(s)} \ ,$$

donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la solución de (12) con condiciones iniciales nulas y $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$. Es importante observar que $H(s)$, y por tanto $h(t)$, no depende de la elección de la función $g(t)$ en (12) [véase la ecuación (15) en la sección 7.7]. Sin embargo, es útil pensar la función de respuesta al impulso como la solución del problema simbólico con valores iniciales

(13) $$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = \delta(t) \ ; \qquad y(0) \ , \qquad y'(0) = 0 \ .}$$

En efecto, si $g(t) = \delta(t)$, tenemos $G(s) = 1$ y en consecuencia $H(s) = Y(s)$. Así, $h(t) = y(t)$. Vemos que la función $h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta(t)$ para un sistema mecánico descrito por el problema simbólico con valores iniciales (13).

EJERCICIOS 7.8

En los problemas 1 a 6, evalúe la integral dada.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 1)\delta(t)\,dt$.

2. $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} e^{3t}\delta(t)\,dt$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sen} 3t)\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)dt$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta(t + 1)\,dt$.

5. $\int_0^{\infty} e^{-2t}\delta(t-1)\,dt$.

6. $\int_{-1}^{1} (\cos 2t)\delta(t)\,dt$.

En los problemas 7 a 12, determine la transformada de Laplace de la función generalizada dada.

7. $\delta(t-1) - \delta(t-3)$. **8.** $3\delta(t-1)$.

9. $t\delta(t-1)$. **10.** $t^3\delta(t-3)$.

11. $\delta(t-\pi)\,\text{sen}\, t$. **12.** $e^t\delta(t-3)$.

En los problemas 13 a 20, resuelva el problema simbólico con valores iniciales dados.

13. $w'' + w = \delta(t-\pi)$;
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$.

14. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

15. $y'' + 2y' - 3y = \delta(t-1) - \delta(t-2)$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

16. $y'' - 2y' - 3y = 2\delta(t-1) - \delta(t-3)$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

17. $y'' - y = 4\delta(t-2) + t^2$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. $y'' - y' - 2y = 3\delta(t-1) + e^t$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

19. $w'' + 6w' + 5w = e^t\delta(t-1)$;
$w(0) = 0$, $w'(0) = 4$.

20. $y'' + 5y' + 6y = e^{-t}\delta(t-2)$;
$y(0) = 2$, $y'(0) = -5$.

En los problemas 21 a 24, resuelva el problema simbólico con valores iniciales dados y bosqueje una gráfica de la solución.

21. $y'' + y = \delta(t-2\pi)$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

22. $y'' + y = \delta(t-\pi/2)$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

23. $y'' + y = -\delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi)$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

24. $y'' + y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

En los problemas 25 a 28, determine la función de respuesta al impulso $h(t)$ usando el hecho de que $h(t)$ es la solución del problema simbólico con valores iniciales con $g(t) = \delta(t)$ y condiciones iniciales nulas.

25. $y'' + 4y' + 8y = g(t)$.

26. $y'' - 6y' + 13y = g(t)$.

27. $y'' - 2y' + 5y = g(t)$. **28.** $y'' - y = g(t)$.

29. Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo, un metro por debajo de la posición de equilibrio para el sistema masa-resorte y comienza a vibrar. Después de $\pi/2$ segundos, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema queda descrito mediante el problema simbólico con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = -3\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) ;$$
$$x(0) = 1 ,$$
$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 ,$$

donde $x(t)$ denota el desplazamiento con respecto del equilibrio en el instante t. ¿Qué le ocurre a la masa después de ser golpeada?

30. Es probable que haya escuchado que los soldados no deben marchar en cadencia al cruzar un puente. Resuelva el problema simbólico con valores iniciales

$$y'' + y = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - 2k\pi) ;$$
$$y(0) = 0 , \qquad y'(0) = 0 ,$$

y explique por qué se han dado tales instrucciones a los soldados. [*Sugerencia*: Véase la sección 4.12].

31. Un sistema lineal es **estable** si su función de respuesta al impulso $h(t)$ permanece acotada cuando $t \to +\infty$. Si el sistema lineal es descrito por

$$ay'' + by' + cy = g(t) ,$$

donde b y c no se anulan al mismo tiempo, muestre que el sistema es estable si y sólo si las partes reales de las raíces de

$$ar^2 + br + c = 0$$

son menores o iguales a cero.

32. Un sistema lineal es **asintóticamente estable** si su función de respuesta al impulso satisface $h(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Si el sistema lineal queda descrito por

$$ay'' + by' + cy = g(t) ,$$

demuestre que el sistema es asintóticamente estable si y sólo si las partes reales de las raíces de

$$ar^2 + br + c = 0$$

son estrictamente menores que cero.

33. La función delta de Dirac también se puede caracterizar mediante las propiedades

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \ , & t \neq 0 \ , \\ \text{“infinito”}, & t = 0 \ , \end{cases}$$

y
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \ .$$

Use formalmente el teorema del valor medio para integrales definidas y verifique que si $f(t)$ es continua, entonces las propiedades anteriores implican que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0) \ .$$

34. Use formalmente integración por partes para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,dt = -f'(0) \ .$$

Además, muestre que en general,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n f^{(n)}(0) \ .$$

35. La figura 7.27 muestra una viga de longitud 2λ que está empotrada en un soporte por el lado derecho y libre por la derecha. La deflexión vertical de la viga a una distancia x del soporte se denota $y(x)$. Si la viga tiene una carga concentrada L que actúa sobre ella en el centro de la viga, entonces la deflexión debe satisfacer el problema simbólico con valores en la frontera

$$EIy^{(4)}(x) = L\delta(x - \lambda) \ ;$$
$$y(0) = y'(0) = y''(2\lambda) = y'''(2\lambda) = 0 \ ,$$

donde E, el módulo de elasticidad, e I, el momento de inercia, son constantes. Determine una fórmula para el desplazamiento $y(x)$ en términos de las constantes λ, L, E e I. [*Sugerencia*: Sean $y''(0) = A$ y $y'''(0) = B$. Resuelva primero el problema simbólico de cuarto orden con valores iniciales y luego use las condiciones $y''(2\lambda) = y'''(2\lambda) = 0$ para determinar A y B].

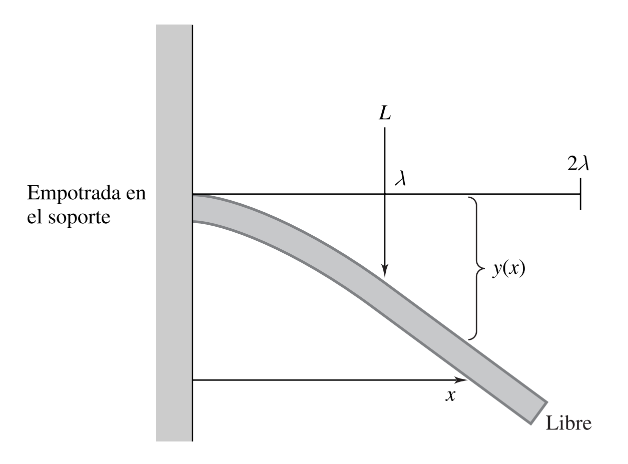


Figura 7.27 Viga empotrada en un soporte bajo una carga concentrada en $x = \lambda$

7.9 SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES MEDIANTE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Podemos usar la transformada de Laplace para reducir ciertos *sistemas* de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, donde de nuevo las incógnitas son las transformadas de las funciones que conforman la solución. Al despejar estas incógnitas y calcular sus transformadas inversas de Laplace, podemos obtener la solución del problema con valores iniciales para el sistema.

EJEMPLO 1 Resolver el problema con valores iniciales

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{aligned} x'(t) - 2y(t) &= 4t \ ; \qquad & x(0) = 4 \ , \\ y'(t) + 2y(t) - 4x(t) &= -4t - 2 \ ; \qquad & y(0) = -5 \ . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Al calcular la transformada de Laplace de ambos lados de las ecuaciones diferenciales tenemos

$$\textbf{(2)}\qquad \begin{aligned} \mathscr{L}\{x'\}(s) - 2\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{4}{s^2}\ , \\ \mathscr{L}\{y'\}(s) + 2\mathscr{L}\{y\}(s) - 4\mathscr{L}\{x\}(s) &= -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s}\ . \end{aligned}$$

Sean $X(s) := \mathscr{L}\{x\}(s)$ y $Y(s) := \mathscr{L}\{y\}(s)$. Entonces, por el teorema 4 de la página 361,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{x'\}(s) &= sX(s) - x(0) = sX(s) - 4\ , \\ \mathscr{L}\{y'\}(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) + 5\ . \end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en el sistema (2) y simplificar, obtenemos

$$\textbf{(3)}\qquad \begin{aligned} sX(s) - 2Y(s) &= \frac{4s^2 + 4}{s^2}\ , \\ -4X(s) + (s + 2)Y(s) &= -\frac{5s^2 + 2s + 4}{s^2}\ . \end{aligned}$$

Para eliminar $Y(s)$ del sistema, multiplicamos la primera ecuación por $(s + 2)$ y la segunda por 2, para luego sumar y obtener

$$\left[s(s + 2) - 8\right]X(s) = \frac{(s + 2)(4s^2 + 4)}{s^2} - \frac{10s^2 + 4s + 8}{s^2}\ .$$

Esto se simplifica como

$$X(s) = \frac{4s - 2}{(s + 4)(s - 2)}\ .$$

Para calcular la transformada inversa, primero escribimos a $X(s)$ en la forma de fracciones parciales

$$X(s) = \frac{3}{s + 4} + \frac{1}{s - 2}\ .$$

De la tabla de transformadas de Laplace vemos que

$$\textbf{(4)}\qquad x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}\ .$$

Para determinar $y(t)$ podríamos despejar $Y(s)$ en el sistema (3) y luego calcular su transformada inversa de Laplace. Sin embargo, es más fácil despejar $y(t)$ en la primera ecuación del sistema (1) en términos de $x(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - 2t\ .$$

Sustituimos $x(t)$ de la ecuación (4) para obtener

$$\textbf{(5)}\qquad y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t\ .$$

La solución del problema con valores iniciales (1) consta de la pareja de funciones $x(t)$, $y(t)$ dada por las ecuaciones (4) y (5). ■

EJERCICIOS 7.9

En los problemas 1 a 19, use el método de transformadas de Laplace para resolver el problema con valores iniciales dado. En este caso, x′, y′, etc., denotan derivadas con respecto de t, lo mismo que el símbolo D.

1. $x' = 3x - 2y$; $x(0) = 1$,
$y' = 3y - 2x$; $y(0) = 1$.

2. $x' = x - y$; $x(0) = -1$,
$y' = 2x + 4y$; $y(0) = 0$.

3. $z' + w' = z - w$; $z(0) = 1$,
$z' - w' = z - w$; $w(0) = 0$.

4. $x' - 3x + 2y = \text{sen}\, t$; $x(0) = 0$,
$4x - y' - y = \cos t$; $y(0) = 0$.

5. $x' = y + \text{sen}\, t$; $x(0) = 2$,
$y' = x + 2\cos t$; $y(0) = 0$.

6. $x' - x - y = 1$; $x(0) = 0$,
$-x + y' - y = 0$; $y(0) = -5/2$.

7. $(D - 4)[x] + 6y = 9e^{3t}$; $x(0) = -9$,
$x - (D - 1)[y] = 5e^{-3t}$; $y(0) = 4$.

8. $D[x] + y = 0$; $x(0) = 7/4$,
$4x + D[y] = 3$; $y(0) = 4$.

9. $x'' + 2y' = -x$; $x(0) = 2$, $x'(0) = -7$,
$-3x'' + 2y'' = 3x - 4y$; $y(0) = 4$,
$y'(0) = -9$.

10. $x'' + y = 1$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$,
$x + y'' = -1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

11. $x' + y = 1 - u(t - 2)$; $x(0) = 0$,
$x + y' = 0$; $y(0) = 0$.

12. $x' + y = x$; $x(0) = 0$, $y(0) = 1$,
$2x' + y'' = u(t - 3)$; $y'(0) = -1$.

13. $x' - y' = (\text{sen}\, t)u(t - \pi)$; $x(0) = 1$,
$x + y' = 0$; $y(0) = 1$.

14. $x'' = y + u(t - 1)$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,
$y'' = x + 1 - u(t - 1)$; $y(0) = 0$,
$y'(0) = 0$.

15. $x' - 2y = 2$; $x(1) = 1$,
$x' + x - y' = t^2 + 2t - 1$; $y(1) = 0$.

16. $x' - 2x + y' = -(\cos t + 4\,\text{sen}\, t)$; $x(\pi) = 0$,
$2x + y' + y = \text{sen}\, t + 3\cos t$; $y(\pi) = 3$.

17. $x' + x - y' = 2(t - 2)e^{t-2}$; $x(2) = 0$,
$x'' - x' - 2y = -e^{t-2}$; $x'(2) = 1$,
$y(2) = 1$.

18. $x' - 2y = 0$; $x(0) = 0$,
$x' - z' = 0$; $y(0) = 0$,
$x + y' - z = 3$; $z(0) = -2$.

19. $x' = 3x + y - 2z$; $x(0) = -6$,
$y' = -x + 2y + z$; $y(0) = 2$,
$z' = 4x + y - 3z$; $z(0) = -12$.

20. Use el método de transformadas de Laplace para resolver

$x'' + y' = 2$; $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$,
$4x + y' = 6$; $y(1) = 4$.

[*Sugerencia*: Haga $y(0) = c$ y luego despeje c].

21. Para el problema de tanques interconectados de la sección 5.1, página 239, suponga que la entrada al tanque A es controlada ahora por una válvula que durante los primeros cinco minutos deja entrar 6 litros/minuto de agua pura, pero después de ello deja pasar 6 litros/minuto de una solución salina con una concentración de 2 kg/litro. Suponga que los demás datos siguen siendo los mismos (véase la figura 5.1) y determine la masa de sal en cada tanque para $t > 0$ si $x_0 = 0$ y $y_0 = 4$.

22. Vuelva a calcular el movimiento oscilador masa-resorte en el problema 1 de los ejercicios 5.4 (página 272), usando transformadas de Laplace.

En los problemas 23 y 24, determine un sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales para las corrientes en las redes dadas en los diagramas esquemáticos; las corrientes iniciales son nulas. Determine las corrientes en cada rama de la red (véase la sección 5.6 para un análisis de las redes eléctricas).

23.

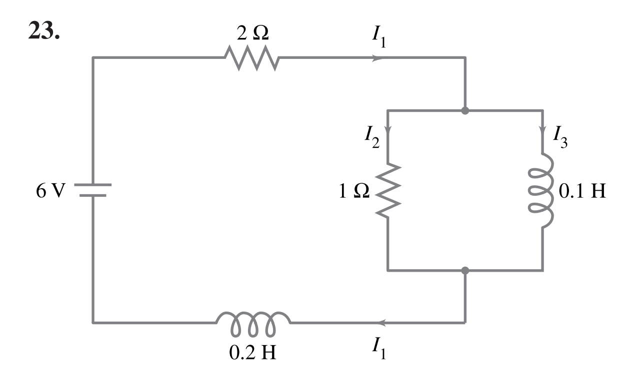


Figura 7.28 Red *RL* para el problema 23

24.

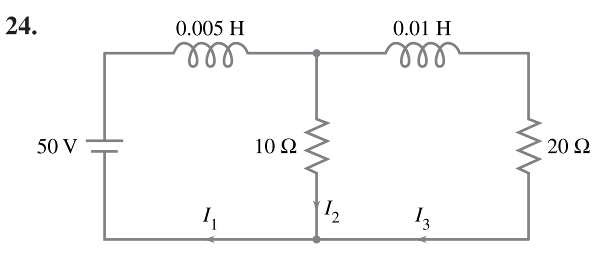


Figura 7.29 Red *RL* para el problema 24

Resumen del capítulo

El uso de la transformada de Laplace nos ayuda a simplificar el proceso para resolver problemas con valores iniciales para ciertas ecuaciones diferenciales e integrales, en particular cuando está presente una función de forzamiento con discontinuidades. La transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f\}$ de una función $f(t)$ se define como

$$\mathscr{L}\{f\}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

para todos los valores de s para los que existe la integral impropia. Si $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α (es decir, $|f(t)|$ no crece más rápido que una constante por $e^{\alpha t}$ cuando $t \to \infty$), entonces $\mathscr{L}\{f\}(s)$ existe para toda $s > \alpha$.

La transformada de Laplace se puede interpretar como un operador integral que a cada función $f(t)$ le asocia una función $F(s)$. Las transformadas de algunas funciones comunes aparecen en la tabla 7.1, página 358, y en el forro de este libro. El uso de estas tablas es mejorado por varias propiedades importantes del operador $\mathscr{L}$.

Linealidad: $\mathscr{L}\{af + bg\} = a\mathscr{L}\{f\} + b\mathscr{L}\{g\}$.

Traslación en *s*: $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a)$, donde $F = \mathscr{L}\{f\}$.

Traslación en *t*: $\mathscr{L}\{g(t)u(t - a)\}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t + a)\}(s)$, donde $u(t - a)$ es la función escalón, igual a 1 para $t > a$ y 0 para $t < a$. Si $f(t)$ es continua y $f(0) = 0$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = f(t - a)u(t - a) \ ,$$

donde $f = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$.

Propiedad de convolución: $\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f\}\mathscr{L}\{g\}$, donde $f * g$ denota la función convolución

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - v)g(v)\,dv \ .$$

Una razón de la utilidad de la transformada de Laplace está en la sencilla fórmula para la transformada de la derivada f':

(1) $$\mathscr{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0) \ , \quad \text{donde} \quad F = \mathscr{L}\{f\} \ .$$

Esta fórmula muestra que al usar la transformada de Laplace, podemos reemplazar, esencialmente, "derivación con respecto de t" por la sencilla operación de "multiplicación por s". La extensión de (1) a derivadas de orden superior es

$$\textbf{(2)} \qquad \mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \ .$$

Para resolver un problema con valores iniciales de la forma

$$\textbf{(3)} \qquad ay'' + by' + cy = f(t) \ ; \qquad y(0) = \alpha \ , \qquad y'(0) = \beta$$

por medio del método de transformada de Laplace, calculamos la transformada a ambos lados de la ecuación diferencial en (3). Usamos la linealidad de $\mathcal{L}$ y la fórmula (2) conduce a una ecuación que implica la transformada de Laplace $Y(s)$ de la solución (incógnita) $y(t)$. El siguiente paso consiste en hallar $Y(s)$ a partir de esta ecuación, más sencilla. Por último, calculamos la transformada *inversa* de Laplace de $Y(s)$ para obtener la solución deseada. Este último paso para determinar $\mathcal{L}^{-1}\{Y\}$ es con frecuencia el más difícil. A veces se necesita una descomposición en fracciones parciales, un uso adecuado de las propiedades de la transformada, una excursión a través de las tablas de transformadas de Laplace, o la evaluación de una integral de contorno en el plano complejo.

Para el problema particular en (3), donde a, b y c son constantes, la ecuación diferencial se transforma en una sencilla ecuación *algebraica* en términos de $Y(s)$. Otra característica importante de esta última ecuación es que incorpora las condiciones iniciales. Cuando los coeficientes de la ecuación en (3) dependen de t, la siguiente fórmula puede ser útil para calcular la transformada:

$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\}(s) = (-1)^n\frac{d^nF}{ds^n}(s) \ , \quad \text{donde} \quad F = \mathcal{L}\{f\} \ .$$

Si la función de forzamiento $f(t)$ en la ecuación (3) tiene discontinuidades, con frecuencia es conveniente escribir $f(t)$ en términos de funciones escalón unitario $u(t-a)$ antes de proceder con el método de la transformada de Laplace. La transformada de una función de forzamiento periódica $f(t)$ con periodo T está dada por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1 - e^{-sT}} \ .$$

La función delta de Dirac $\delta(t)$ es útil para modelar un sistema excitado por una fuerza de gran tamaño aplicada durante un breve intervalo de tiempo. No es una función en el sentido usual, pero se puede interpretar como la derivada de una función escalón unitario. La transformada de $\delta(t-a)$ es

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as} \ , \qquad a \geq 0 \ .$$

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 y 2, use la definición de la transformada de Laplace para determinar $\mathcal{L}\{f\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} 3 \ , & 0 \leq t \leq 2 \ , \\ 6 - t \ , & 2 < t \ . \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \ , & 0 \leq t \leq 5 \ , \\ -1 \ , & 5 < t \ . \end{cases}$

En los problemas 3 a 10, determine la transformada de Laplace de la función dada.

3. t^2e^{-9t} .

4. $e^{3t}\,\text{sen}\,4t$.

5. $e^{2t} - t^3 + t^2 - \text{sen}\,5t$.

6. $7e^{2t}\cos 3t - 2e^{7t}\,\text{sen}\,5t$.

7. $t\cos 6t$.

8. $(t+3)^2-(e^t+3)^2$.
9. $t^2u(t-4)$.
10. $f(t)=\cos t, -\pi/2 \le t \le \pi/2$, y $f(t)$ tiene periodo π.

En los problemas 11 a 17, determine la transformada inversa de Laplace de la función dada.

11. $\dfrac{7}{(s+3)^3}$.
12. $\dfrac{2s-1}{s^2-4s+6}$.
13. $\dfrac{4s^2+13s+19}{(s-1)(s^2+4s+13)}$.
14. $\dfrac{s^2+16s+9}{(s+1)(s+3)(s-2)}$.
15. $\dfrac{2s^2+3s-1}{(s+1)^2(s+2)}$.
16. $\dfrac{1}{(s^2+9)^2}$.
17. $\dfrac{e^{-2s}(4s+2)}{(s-1)(s+2)}$.
18. Determine la serie de Taylor para $f(t)=e^{-t^2}$ en torno de $t=0$. Suponiendo que la transformada de Laplace de $f(t)$ se puede calcular término a término, determine un desarrollo para $\mathcal{L}\{f\}(s)$ en potencias de $1/s$.

En los problemas 19 a 24, resuelva el problema con valores iniciales dado para $y(t)$ mediante el método de transformadas de Laplace.

19. $y''-7y'+10y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-3$.
20. $y''+6y'+9y=0$; $y(0)=-3$, $y'(0)=10$.
21. $y''+2y'+2y=t^2+4t$; $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
22. $y''+9y=10e^{2t}$; $y(0)=-1$, $y'(0)=5$.
23. $y''+3y'+4y=u(t-1)$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
24. $y''-4y'+4y=t^2e^t$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

En los problemas 25 y 26, determine soluciones del problema con valores iniciales dado.

25. $ty''+2(t-1)y'-2y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
26. $ty''+2(t-1)y'+(t-2)y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

En los problemas 27 y 28, resuelva la ecuación dada para $y(t)$.

27. $y(t)+\displaystyle\int_0^t (t-v)y(v)\,dv=e^{-3t}$.
28. $y'(t)-2\displaystyle\int_0^t y(v)\operatorname{sen}(t-v)\,dv=1$; $y(0)=-1$.
29. Un sistema lineal queda descrito mediante
$$y''-5y'+6y=g(t) .$$
Determine la función de transferencia y la función de respuesta al impulso.
30. Resuelva el problema simbólico con valores iniciales
$$y''+4y=\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right) ;$$
$$y(0)=0 , \quad y'(0)=1 .$$

En los problemas 31 y 32, use transformadas de Laplace para resolver el sistema dado.

31. $x'+y=0$; $x(0)=0$, $x+y'=1-u(t-2)$; $y(0)=0$.
32. $x''+2y'=u(t-3)$; $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x+y'=y$; $y(0)=0$.

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. Compare el uso de las transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes con el uso de logaritmos para resolver ecuaciones algebraicas de la forma $x^r=a$.
2. Explique por qué el método de transformadas de Laplace funciona tan bien para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes *y* para ecuaciones íntegro-diferenciales que implican una convolución.

3. Analice varios ejemplos de problemas con valores iniciales donde el método de transformadas de Laplace no sea aplicable.

4. Un sistema lineal es **asintóticamente estable** si su función de respuesta al impulso $h(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Suponga que $H(s)$, la transformada de Laplace de $h(t)$, es una función racional en forma reducida, de modo que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. Explique con detalle la forma de caracterizar la estabilidad asintótica del sistema lineal en términos de los ceros del denominador de $H(s)$. Dé ejemplos.

5. Compare y contraste la solución de problemas con valores iniciales mediante transformadas de Laplace contra los métodos del capítulo 4.

A. *Fórmulas de Duhamel*

Para un sistema lineal descrito por la ecuación

(1) $$ay'' + by' + cy = g(t) ,$$

donde *a, b* y *c* son constantes reales, la función

(2) $$H(s) := \frac{\mathcal{L}\{y\}(s)}{\mathcal{L}\{g\}(s)} = \frac{\mathcal{L}\{\text{salida}\}}{\mathcal{L}\{\text{entrada}\}},$$

donde todas las condiciones iniciales son nulas, es la **función de transferencia** del sistema. (Como mencionamos en la sección 7.7, la función de transferencia $H(s)$ depende sólo de las constantes *a, b, c* del sistema; no es afectada por la elección de g). Si la función de salida $g(t)$ es la función escalón unitario $u(t)$, entonces la ecuación (2) implica que

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{u\}(s)H(s) = \frac{H(s)}{s} .$$

La solución (función de salida) en este caso particular es la **admisión indicatriz** y se denota como $A(t)$. Por lo tanto, $\mathcal{L}\{A\}(s) = H(s)/s$.

Es posible expresar la respuesta $y(t)$ del sistema a una función general de entrada $g(t)$ en términos de $g(t)$ y de la admisión indicatriz $A(t)$. Para deducir estas relaciones, proceda como sigue:

(a) Muestre que

(3) $$\mathcal{L}\{y\}(s) = s\mathcal{L}\{A\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s) .$$

(b) Ahora aplique el teorema de convolución a (3) y muestre que

(4) $$y(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t A(t-v)g(v)dv\right] = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t A(v)g(t-v)dv\right] .$$

(c) Para calcular la derivada indicada en (4), se puede usar la **regla de Leibniz**:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{a(t)}^{b(t)} f(v,t)dv\right] = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(v,t)dv + f\big(b(t),t\big)\frac{db}{dt}(t) - f\big(a(t),t\big)\frac{da}{dt}(t) ,$$

donde suponemos que f y $\partial f/\partial t$ son continuas en v y t, y $a(t)$ y $b(t)$ son funciones diferenciables de t. Aplique esta regla a (4) para deducir las fórmulas

(5) $$y(t) = \int_0^t A'(t-v)g(v)dv ,$$

(6) $$y(t) = \int_0^t A(v)g'(t-v)dv + A(t)g(0) .$$

[*Sugerencia*: Recuerde que las condiciones iniciales sobre A son $A(0) = A'(0) = 0$].

(d) En las ecuaciones (5) y (6), haga el cambio de variable $w = t - v$, y muestre que

$$\textbf{(7)} \qquad y(t) = \int_0^t A'(w)g(t-w)dw \ ,$$

$$\textbf{(8)} \qquad y(t) = \int_0^t A(t-w)g'(w)dw + A(t)g(0) \ .$$

Las ecuaciones (5)-(8) se conocen como **fórmulas de Duhamel**, en honor del matemático francés J. M. C. Duhamel. Estas fórmulas son útiles para determinar la respuesta del sistema a una entrada general $g(t)$, pues la admisión indicatriz del sistema se puede determinar de manera experimental midiendo la respuesta del sistema a una función escalón unitario.

(e) La función de respuesta al impulso $h(t)$ se define como $h(t) := \mathscr{L}^{-1}\{H\}(t)$, donde $H(s)$ es la función de transferencia. Muestre que $h(t) = A'(t)$, de modo que las ecuaciones (5) y (7) se pueden escribir en la forma

$$\textbf{(9)} \qquad y(t) = \int_0^t h(t-v)g(v)dv = \int_0^t h(v)g(t-v)dv \ .$$

Observemos que la admisión indicatriz es la respuesta del sistema a una función escalón unitario y la función de respuesta al impulso es la respuesta al impulso o función delta unitaria (véase la sección 7.8). Pero la función delta es la derivada (en un sentido generalizado) de la función escalón unitario. Por lo tanto, el hecho de que $h(t) = A'(t)$ no es muy sorprendente.

B. *Modelación mediante la respuesta de frecuencia*

La modelación mediante la respuesta de frecuencia de un sistema lineal se basa en la premisa de que la dinámica de un sistema lineal se puede recuperar si conocemos la forma en que el sistema responde a las entradas senoidales. (Precisaremos esto matemáticamente en el teorema 13). En otras palabras, para determinar (o identificar) un sistema lineal, lo único que debemos hacer es observar la forma en que el sistema reacciona a las entradas senoidales.

Suponga que tenemos un sistema lineal descrito mediante

$$\textbf{(10)} \qquad y'' + py' + qy = g(t) \ ,$$

donde p y q son constantes reales. La función $g(t)$ es la **función de forzamiento** o **función de entrada**. Cuando $g(t)$ es un senoide, la solución particular de (10) obtenida mediante el método de coeficientes indeterminados es la **solución de estado estacionario** o **función de salida** $y_{ss}(t)$ correspondiente a $g(t)$. Podemos pensar un sistema lineal como un compartimento o bloque en el que entra una función de entrada g y sale una función de salida y_{ss} (véase la figura 7.30). **Identificar** un sistema lineal quiere decir determinar los coeficientes p y q en la ecuación (10).

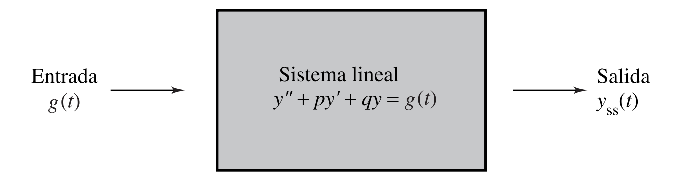


Figura 7.30 Diagrama de bloque que muestra un sistema lineal

Será conveniente trabajar con variables complejas. Un número complejo z se expresa por lo general en la forma $z = \alpha + i\beta$, donde α y β son números reales e i denota $\sqrt{-1}$. También podemos expresar a z en forma polar, $z = re^{i\theta}$, donde $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$ y $\tan \theta = \beta/\alpha$. La cantidad r (≥ 0) es la **magnitud** y θ el **ángulo fase** de z.

El siguiente teorema proporciona la relación entre el sistema lineal y su respuesta a entradas senoidales en términos de la **función de transferencia** $H(s)$ [véase la ecuación (2) del proyecto A].

SOLUCIONES DE ESTADO ESTACIONARIO PARA ENTRADAS SENOIDALES

Teorema 13. Sea $H(s)$ la función de transferencia para la ecuación (10). Si $H(s)$ es finito en $s = i\omega$, donde ω es real, entonces la solución de estado estacionario de (10) para $g(t) = e^{i\omega t}$ es

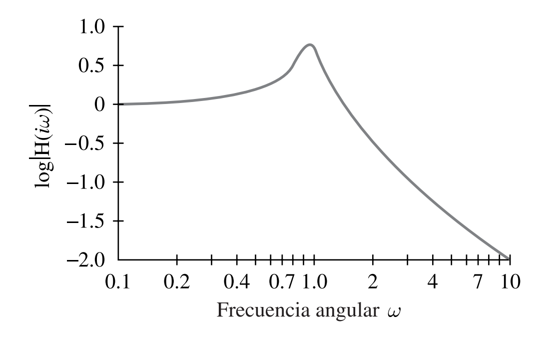
(11) $$\boldsymbol{y_{ss}(t) = H(i\omega)e^{i\omega t} = H(i\omega)\{\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t\}} \; .$$

(a) Demuestre el teorema 13. [*Sugerencia*: Haga $y_{ss}(t) = Ae^{i\omega t}$ y muestre que $A = H(i\omega)$].

(b) Use el teorema 13 para mostrar que si $g(t) = \operatorname{sen} \omega t$, entonces la solución de estado estacionario de (10) es $M(\omega) \operatorname{sen}[\omega t + N(\omega)]$, donde $H(i\omega) = M(\omega)e^{iN(\omega)}$ es la forma polar de $H(i\omega)$.

(c) Determine $M(\omega)$ y $N(\omega)$ en términos de p y q.

(d) Los resultados experimentales para la modelación mediante la respuesta de frecuencia se presentan por lo general en **gráficas de respuesta de frecuencia**† o **gráficas de Bode**. Hay dos tipos de gráficas de Bode. La primera es el logaritmo de la magnitud $M(\omega)$ de $H(i\omega)$ contra la frecuencia angular ω usando una escala logarítmica para ω. La segunda es una gráfica del ángulo fase o argumento $N(\omega)$ de $H(i\omega)$ contra la frecuencia angular usando una escala logarítmica para ω. Las gráficas de Bode para la función de transferencia $H(s) = (1 + 0.2s + s^2)$ aparecen en la figura 7.31.



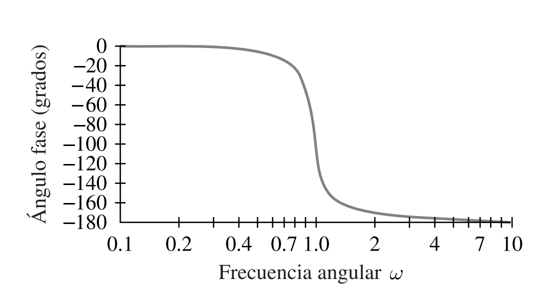


Figura 7.31 Gráficas de Bode para $H(i\omega) = [1 + 0.2(i\omega) + (i\omega)^2]^{-1}$

Bosqueje las gráficas de Bode del sistema lineal descrito mediante la ecuación (10) con $p = 0.4$ y $q = 1.0$. Use $\omega = 0.3, 0.6, 0.9, 1.2$ y 1.5 para graficar $M(\omega)$ y $\omega = 0.5, 0.8, 1, 2$ y 5 para la gráfica de $N(\omega)$.

(e) Suponga que sabemos que $q = 1$. Al introducir una onda senoidal con $\omega = 2$, el siste-

†Las curvas de respuesta de frecuencia también se analizan en la sección 4.9.

ma se estabiliza en una salida senoidal de estado estacionario con magnitud $M(2) = 0.333$. Determine p y con ello, identifique el sistema lineal.

(f) Suponga que una entrada con onda senoidal con $\omega = 2$ produce una salida senoidal de estado estacionario con magnitud $M(2) = 0.5$ y que cuando $\omega = 4$, entonces $M(4) = 0.1$. Determine p y q e identifique con ello el sistema.

En la mayor parte de las aplicaciones hay algunas imprecisiones al medir las magnitudes y las frecuencias. Para compensar estos errores, se usan como entrada varias frecuencias distintas. Luego se determina una aproximación mediante mínimos cuadrados para p y q. Para un análisis de la modelación mediante la respuesta de frecuencia como herramienta de modelación matemática, véase "Modeling Linear Systems by Frequency Response Methods", por W. F. Powers, capítulo 9 de *Differential Equations Models*, por M. Braun, C. Coleman y D. Drew (editores), (Springer-Verlag, Nueva York, 1983). Hay otros ejemplos en *Schaum's Outline on Feedback and Control Systems*, por J. J. DiStefano, A. R. Stubberud e I. J. Williams (McGraw-Hill, Nueva York, 1990, 2a. edición), capítulo 15.

C. Determinación de los parámetros del sistema

En el diseño mecánico, a veces hay que determinar parámetros del sistema aunque no se tenga toda la información sobre las fuerzas en el sistema. Por ejemplo, en la sección 4.1 (página 152) mostramos que la ecuación diferencial que describe el movimiento $x(t)$ de un oscilador masa-resorte amortiguado y con forzamiento externo es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t) ,$$

donde $f(t)$ es la fuerza externa; los otros parámetros se definen en la sección 4.1. Suponga que el sistema está subamortiguado ($b^2 < 4mk$; véase la sección 4.8), que parte del reposo $[x(0) = 0, x'(0) = 0]$ y que la fuerza está acotada: $|f(t)| \le A$ para toda t.

(a) Muestre que las transformadas $X(s)$ y $F(s)$ de $x(t)$ y $f(t)$ están relacionadas de la manera siguiente:

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}F(s) .$$

(b) Use el teorema de convolución para deducir la fórmula

$$x(t) = \frac{1}{\beta m}\int_0^t f(t - v)e^{bv/2m} \operatorname{sen} \beta v \, dv ,$$

donde (como en la ecuación (15) de la sección 4.11, página 233)

$$\beta := \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2} .$$

(c) Muestre que bajo estas circunstancias, el movimiento $x(t)$ está acotado por

$$|x(t)| \le At/\beta m$$

y también por

$$|x(t)| \le 2A/\beta b .$$

(d) Suponga que la masa $m = 5$ kg, que la constante de resorte $k = 3000$ N/m y que la fuerza está acotada por $A = 10$ N. ¿Qué rango de valores para la constante de amortiguamiento b garantizará un desplazamiento de 1 cm (0.01 m) o menor?

CAPÍTULO 8

Soluciones de ecuaciones diferenciales mediante series

8.1 INTRODUCCIÓN: LA APROXIMACIÓN POLINOMIAL DE TAYLOR

Tal vez la mejor herramienta para aproximar numéricamente una función $f(x)$ cerca de un punto particular x_0 sea el *polinomio de Taylor*. La fórmula para el polinomio de Taylor de grado n con centro en x_0, el cual aproxima una función $f(x)$ que posee n derivadas en x_0, es

(1)
$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \ . \end{aligned}$$

Los valores de este polinomio y de sus derivadas en x_0 concuerdan con los de f y sus derivadas:

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= f(x_0) \ , \\ p_n'(x_0) &= f'(x_0) \ , \\ p_n''(x_0) &= f''(x_0) \ , \\ &\vdots \\ p_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \ . \end{aligned}$$

Por ejemplo, los primeros cuatro polinomios de Taylor para e^x, en torno de $x_0 = 0$, son

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \ , \\ p_1(x) &= 1 + x \ , \\ p_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} \ , \\ p_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Su eficacia para aproximar la función exponencial se demuestra en la figura 8.1.

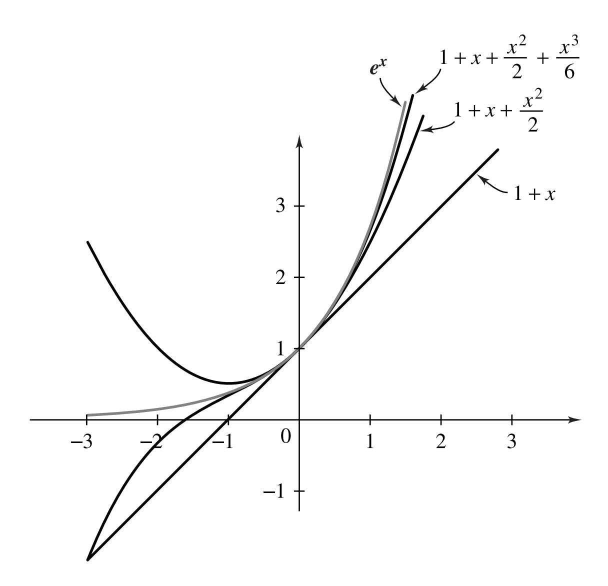


Figura 8.1 Gráficas de polinomios de Taylor para e^x

El polinomio de Taylor de grado n difiere del polinomio del siguiente grado inferior sólo por la suma de un término:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ ,$$

de modo que un listado como (2) es redundante; se puede leer $p_0(x)$, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ de una fórmula para $p_3(x)$. En efecto, si f es infinitamente diferenciable, $p_n(x)$ es justamente la $(n + 1)$-ésima suma parcial de la **serie de Taylor**†

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \ . \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Determinar los polinomios de Taylor de cuarto orden correspondientes a las funciones e^x, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en $x_0 = 2$.

†La serie de Taylor truncada se presentó en la sección 3.6 (página 122) como herramienta para construir fórmulas recursivas de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales.

SOLUCIÓN Para $f(x) = e^x$, tenemos que $f^{(j)}(2) = e^2$ para cada $j = 0, 1, \ldots,$ de modo que (1) implica

$$e^x \approx e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \frac{e^2}{4!}(x-2)^4 \ .$$

Para $f(x) = \cos x$, tenemos que $f'(x) = -\text{sen}\, x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \text{sen}\, x\, f^{(4)}(x) = \cos x$, de modo que

$$\cos x \approx \cos 2 - (\text{sen}\, 2)(x-2) - \frac{\cos 2}{2!}(x-2)^2 + \frac{\text{sen}\, 2}{3!}(x-2)^3 + \frac{\cos 2}{4!}(x-2)^4 \ .$$

De manera análoga vemos que

$$\text{sen}\, x \approx \text{sen}\, 2 + (\cos 2)(x-2) - \frac{\text{sen}\, 2}{2!}(x-2)^2 - \frac{\cos 2}{3!}(x-2)^3$$
$$+ \frac{\text{sen}\, 2}{4!}(x-2)^4 \ . \quad \blacksquare$$

Para relacionar este esquema de aproximación con nuestro tema (la solución de ecuaciones diferenciales), alteraremos nuestro punto de vista; consideramos una ecuación diferencial *no* como una "condición por satisfacer", sino como una receta para construir los polinomios de Taylor de sus soluciones. Además de proporcionar un método muy general para calcular soluciones aproximadas y precisas de la ecuación cerca de cualquier punto "de partida" particular, esta interpretación nos da una mejor idea del papel de las condiciones iniciales. El siguiente ejemplo ilustra el método.

EJEMPLO 2 Determinar los primeros polinomios de Taylor que aproximan la solución en torno de $x_0 = 0$ del problema con valores iniciales

$$y'' = 3y' + x^{7/3}y \ , \qquad y(0) = 10 \ , \qquad y'(0) = 5 \ .$$

SOLUCIÓN Para construir

$$p_n(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n \ ,$$

necesitamos los valores de $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, etc. Los dos primeros vienen dados por las condiciones iniciales. El valor de $y''(0)$ se puede deducir de la propia ecuación diferencial y los valores de las derivadas de orden menor:

$$y''(0) = 3y'(0) + 0^{7/3}y(0) = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 10 = 15 \ .$$

Como $y'' = 3y' + x^{7/3}y$ se cumple en cierto intervalo en torno de $x_0 = 0$, podemos derivar ambos lados para deducir

$$y''' = 3y'' + \frac{7}{3}x^{4/3}y + x^{7/3}y' \ ,$$

$$y^{(4)} = 3y''' + \frac{28}{9}x^{1/3}y + \frac{14}{3}x^{4/3}y' + x^{7/3}y'' \ ,$$

$$y^{(5)} = 3y^{(4)} + \frac{28}{27}x^{-2/3}y + (\cdots) \ .$$

Así, al sustituir $x = 0$ deducimos que

$$y'''(0) = 3 \cdot 15 + \frac{7}{3} \cdot 0^{4/3} \cdot 10 + 0^{7/3} \cdot 5 = 45 \ ,$$

$$y^{(4)}(0) = 3 \cdot 45 + \frac{28}{9} \cdot 0^{1/3} \cdot 10 + \frac{14}{3} \cdot 0^{4/3} \cdot 5 + 0^{7/3} \cdot 15 = 135 \ ,$$

$$y^{(5)}(0) = 3 \cdot 135 + \frac{28}{27} \cdot 0^{-2/3} \cdot 10 + (\cdots) \text{ ¡no existe!}$$

En consecuencia, sólo podemos construir los polinomios de Taylor de grado 0 a 4 para la solución, y $p_4(x)$ está dado por

$$p_4(x) = 10 + 5x + \frac{15}{2}x^2 + \frac{45}{6}x^3 + \frac{135}{24}x^4$$

$$= 10 + 5x + \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^3 + \frac{45}{8}x^4 \ . \ ■$$

El siguiente ejemplo demuestra la aplicación del método de polinomios de Taylor a una ecuación *no lineal*.

EJEMPLO 3 Determine el polinomio de Taylor de grado 3 para la solución al problema con valores iniciales

(4) $$y' = \frac{1}{x + y + 1} \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

SOLUCIÓN Como $y(0) = 0$, sustituimos $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación (4) y vemos que $y'(0) = 1$. Para determinar $y''(0)$, derivamos ambos lados de la ecuación en (4) con respecto de x, obteniendo así una expresión para $y''(x)$ en términos de x, $y(x)$ y $y'(x)$; a saber,

(5) $$y''(x) = (-1)[x + y(x) + 1]^{-2}[1 + y'(x)] \ .$$

Sustituimos $x = 0$, $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$ en (5) para obtener

$$y''(0) = (-1)(1)^{-2}(1 + 1) = -2 \ .$$

De manera similar, derivando (5) y sustituyendo,

$$y^{(3)}(x) = 2[x + y(x) + 1]^{-3}[1 + y'(x)]^2 - [x + y(x) + 1]^{-2}y''(x) \ ,$$
$$y^{(3)}(0) = 2(1)^{-3}(1 + 1)^2 - (1)^{-2}(-2) = 10 \ .$$

Así, el polinomio de Taylor de grado 3 es

$$p_3(x) = 0 + x - x^2 + \frac{10}{6}x^3 = x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 \ . \ ■$$

En un sentido teórico, podemos estimar la precisión con la que un polinomio de Taylor $p_n(x)$ aproxima su función objetivo $f(x)$ para x cercana a x_0. Si $\varepsilon_n(x)$ mide la precisión de la aproximación,

$$\varepsilon_n(x) := f(x) - p_n(x) \ ,$$

entonces el cálculo nos proporciona varias fórmulas para estimar ε_n. La más transparente se debe a Lagrange: *si la* $(n + 1)$*-ésima derivada de f existe y es continua en un intervalo que contenga a* x_0 *y* x*, entonces*

$$\textbf{(6)} \qquad \varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \ ,$$

donde se garantiza que ξ*, aunque desconocida, está entre* x_0 *y* x*.*†

La figura 8.1 y la ecuación (6) sugieren que uno podría controlar el error en la aproximación mediante polinomios de Taylor aumentando el grado n del polinomio (es decir, considerando más términos), aumentando con ello el factor $(n + 1)!$ en el denominador. Por supuesto, esta posibilidad está limitada por el número de veces que podemos derivar a f. En el ejemplo 2, por ejemplo, la solución no tenía una quinta derivada en $x_0 = 0$ ($f^{(5)}(0)$ es "infinita"). Así, no podríamos construir $p_5(x)$, ni concluir algo acerca de la precisión de $p_4(x)$ a partir de la fórmula de Lagrange.

Sin embargo, para el ejemplo 3 podríamos, en teoría, calcular *cada* derivada de la solución $y(x)$ en $x_0 = 0$ y especular acerca de la *convergencia* de la serie de Taylor

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

a la solución $y(x)$. Para ecuaciones no lineales como (4), el factor $f^{(n+1)}(\xi)$ en la fórmula de Lagrange para el error puede crecer demasiado rápido con n y amenazar la convergencia. Pero si la ecuación diferencial es lineal y sus coeficientes y término homogéneo gozan de una característica llamada *analiticidad*, nuestro deseo se verá cumplido; el error realmente tiende a cero cuando el grado n tiende a infinito, y se puede asegurar que la sucesión de polinomios de Taylor converge a la solución real en cierto intervalo (conocido). Por ejemplo, las funciones exponencial, seno y coseno del ejemplo 1 satisfacen ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, y sus series de Taylor convergen a los valores correspondientes de la función. (En realidad, *todas* sus derivadas están acotadas en cualquier intervalo de longitud finita, de modo que la fórmula de Lagrange para sus errores de aproximación tiende a cero al crecer n, para cada valor de x). Éste es el tema de las primeras secciones de este capítulo.

En las secciones 8.5 y 8.6 veremos que las soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden pueden tener un comportamiento complejo cerca de puntos x_0 donde el coeficiente de y'' se anule; de hecho, tan complejo que los algoritmos de Euler o Runge-Kutta no serían de mucha ayuda. Pero una inteligente modificación del método de polinomios de Taylor, debida a Frobenius, proporciona aproximaciones muy precisas a las soluciones en esas regiones. Tal vez esta última característica sea la que acentúa el valor de la metodología de Taylor en la práctica actual de las matemáticas aplicadas.

---

†La ecuación (6) se demuestra mediante el teorema del valor medio; véase, por ejemplo, *Principles of Mathematical Analysis*, 3a. edición, por Walter Rudin (McGraw-Hill, Nueva York, 1976).

EJERCICIOS 8.1

En los problemas 1 a 8, determine los tres primeros términos no nulos en las aproximaciones mediante polinomios de Taylor para el problema con valores iniciales dado.

1. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 1$.

2. $y' = y^2$; $y(0) = 2$.

3. $y' = \operatorname{sen} y + e^x$; $y(0) = 0$.

4. $y' = \operatorname{sen}(x + y)$; $y(0) = 0$.

5. $x'' + tx = 0$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

6. $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7. $y''(\theta) + y(\theta)^3 = \operatorname{sen} \theta$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' + \operatorname{sen} y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

9. **(a)** Construya el polinomio de Taylor $p_3(x)$ de grado 3 para la función $f(x) = \ln x$ en torno de $x = 1$.
(b) Use la fórmula (6) para el error y muestre que

$$|\ln(1.5) - p_3(1.5)| \le \frac{(0.5)^4}{4} = 0.015625 .$$

(c) Compare la estimación de la parte (b) con el error real calculando $|\ln(1.5) - p_3(1.5)|$.
(d) Bosqueje las gráficas de $\ln x$ y $p_3(x)$ (en el mismo plano) para $0 < x < 2$.

10. **(a)** Construya el polinomio de Taylor $p_3(x)$ de grado 3 para la función $f(x) = 1/(2 - x)$ en torno de $x = 0$.
(b) Use la fórmula (6) para el error y muestre que

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{2}{3} - p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{2}{3^5} .$$

(c) Compare la estimación de (b) con el error real

$$\left|\frac{2}{3} - p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| .$$

(d) Bosqueje las gráficas de $1/(2 - x)$ y $p_3(x)$ (en el mismo plano) para $-2 < x < 2$.

11. Justifique que si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ en el intervalo (a, b), donde p, q y g son dos veces diferenciables, entonces la cuarta derivada de $\phi(x)$ existe en (a, b).

12. Justifique que si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ en el intervalo (a, b), donde p, q y g tienen derivadas de todos los órdenes, entonces $\phi(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en (a, b).

13. **Ecuación de Duffing.** En el estudio de un resorte no lineal con forzamiento periódico surge la siguiente ecuación:

$$y'' + ky + ry^3 = A \cos \omega t .$$

Sean $k = r = A = 1$ y $\omega = 10$. Determine los tres primeros términos no nulos de las aproximaciones mediante polinomios de Taylor a la solución con valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

14. **Resortes suaves y duros.** Para la ecuación de Duffing dada en el problema 13, el comportamiento de las soluciones se modifica cuando r cambia de signo. Cuando $r > 0$, la fuerza de restauración $ky + ry^3$ se vuelve más fuerte que para el resorte lineal ($r = 0$). Dicho resorte es **duro**. Cuando $r < 0$, la fuerza de restauración es más débil que la del resorte lineal y el resorte es **suave**. Los péndulos actúan como resortes suaves.
(a) Vuelva a resolver el problema 13, con $r = -1$. Observe que para las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, los resortes suaves y duros parecen responder de la misma forma para t pequeño.
(b) Mantenga $k = A = 1$ y $\omega = 10$; cambie las condiciones iniciales por $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Ahora vuelva a resolver el problema 13 con $r = \pm 1$.
(c) Con base en los resultados de la parte (b), ¿hay alguna diferencia entre el comportamiento de los resortes suaves y duros para t pequeña? Explique.

15. La solución del problema con valores iniciales

$$xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0 ,$$
$$y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0$$

tiene derivadas de todos los órdenes en $x = 0$ (aunque esto no es evidente). Use la regla de L'Hôpital para calcular el polinomio de Taylor de grado 2 que aproxima a esta solución.

16. **Ecuación de van der Pol.** En el estudio de los tubos al vacío surge la siguiente ecuación:

$$y'' + (0.1)(y^2 - 1)y' + y = 0 .$$

Determine el polinomio de Taylor de grado 4 que aproxima la solución con valores iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8.2 SERIES DE POTENCIAS Y FUNCIONES ANALÍTICAS

Con frecuencia, las ecuaciones diferenciales estudiadas en secciones anteriores poseían soluciones $y(x)$ que se pueden escribir en términos de funciones elementales como polinomios, exponenciales, senos y cosenos. Sin embargo, hay muchas ecuaciones importantes cuyas soluciones no se pueden expresar de tal forma. En los capítulos anteriores, al encontrar una ecuación de este tipo expresamos la solución como una integral (véase el problema 27 de los ejercicios 2.2, página 46) o como una aproximación numérica (secciones 3.5-3.7 y 5.6). Sin embargo, el esquema de aproximación mediante polinomios de Taylor de la sección anterior sugiere otra posibilidad. Suponga que la ecuación diferencial (y las condiciones iniciales) permiten el cálculo de *cada* derivada $y^{(n)}$ en el punto de desarrollo x_0. ¿Existen condiciones que garanticen que la sucesión de polinomios de Taylor *converja* a la solución $y(x)$ cuando el grado de los polinomios tiende a infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = y(x)\ ?$$

En otras palabras, ¿cuándo podemos estar seguros que una solución de una ecuación diferencial se representa mediante su *serie de Taylor*? Como veremos, la respuesta es bastante favorable y presenta una nueva y poderosa técnica para resolver ecuaciones.

La forma más eficaz de iniciar nuestro análisis de este tema es investigar las propiedades algebraicas y de convergencia de expresiones genéricas que incluyen a las series de Taylor, "polinomios largos", por así decirlo, o, de manera más convencional, *series de potencias*.

Series de potencias

Una **serie de potencias** en torno del punto x_0 es una expresión de la forma

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots\ ,$$

donde x es una variable y las a_n son constantes. Decimos que (1) **converge** en el punto $x = c$ si la serie infinita (de números reales) $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(c-x_0)^n$ converge; es decir, si el límite de las sumas parciales

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(c-x_0)^n\ ,$$

existe (como número finito). Si este límite no existe, decimos que la serie de potencias **diverge** en $x = c$. Observe que (1) converge en $x = x_0$, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-x_0)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0\ .$$

¿Pero qué hay de la convergencia para otros valores de x? Como afirma el siguiente teorema 1, una serie de potencias de la forma (1) converge para todos los valores de x en algún "intervalo" con centro en x_0 y diverge para x fuera de ese intervalo. Además, en los puntos interiores de este intervalo, la serie de potencias **converge absolutamente**, en el sentido de que $\Sigma_{n=0}^{\infty}|a_n(x-x_0)^n|$ converge. (Recuerde que la convergencia absoluta de una serie implica la convergencia "ordinaria" de la misma).

RADIO DE CONVERGENCIA

Teorema 1. Para cada serie de potencias de la forma (1) existe un número ρ $(0 \leq \rho \leq \infty)$, llamado **radio de convergencia** de la serie de potencias, tal que (1) converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$ y diverge para $|x - x_0| > \rho$. (Véase la figura 8.2).

Si la serie (1) converge para todo valor de x, entonces $\rho = \infty$. Si la serie (1) sólo converge en x_0, entonces $\rho = 0$.

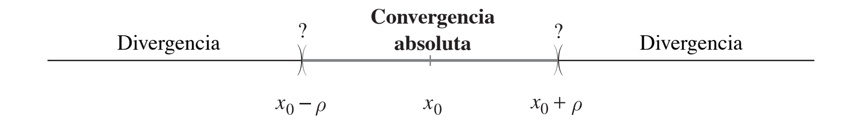


Figura 8.2 Intervalo de convergencia

Observe que el teorema 1 resuelve la cuestión de convergencia excepto en los extremos $x_0 \pm \rho$. Así, estos dos puntos requieren un análisis por separado. Para determinar el radio de convergencia ρ, un método que con frecuencia se puede aplicar fácilmente es el criterio del cociente.

CRITERIO DEL COCIENTE

Teorema 2. Si para n grande, los coeficientes a_n no se anulan y satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \qquad (0 \leq L \leq \infty) \ ,$$

entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ es $\rho = 1/L$, donde $\rho = \infty$ si $L = 0$ y $\rho = 0$ si $L = \infty$.

Observación. Debemos advertir al lector que si el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ no tiene un límite, entonces hay que usar otros métodos distintos al criterio de cociente (por ejemplo, el criterio de la raíz) para determinar ρ. En particular, si una infinidad de a_n se anulan, entonces no podemos aplicar el criterio del cociente directamente. (Sin embargo, el problema 7 demuestra la forma de aplicar el resultado para series que sólo contienen términos "pares" o "impares").

EJEMPLO 1 Determinar el conjunto de convergencia de

$$\textbf{(2)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(x-3)^n \ .$$

SOLUCIÓN Como $a_n = (-2)^n/(n + 1)$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}(n+1)}{(-2)^n(n+2)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(n+2)} = 2 = L \ .$$

Por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $\rho = 1/2$. Por tanto, la serie (2) converge absolutamente para $|x - 3| < 1/2$ y diverge cuando $|x - 3| > 1/2$. Sólo resta determinar qué ocurre cuando $|x - 3| = 1/2$, es decir, cuando $x = 5/2$ y $x = 7/2$.

Al hacer $x = 5/2$, la serie (2) se convierte en la serie armónica $\Sigma_{n=0}^{\infty} a(n + 1)^{-1}$, que sabemos diverge. Cuando $x = 7/2$, la serie (2) se convierte en una serie armónica **alternante**, que sabemos converge. Así, la serie de potencias converge para cada x en el intervalo semiabierto $(5/2,7/2]$; fuera de este intervalo diverge. ■

Para cada valor de x para el que la serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge, obtenemos un número que es la suma de la serie. Es adecuado denotar esta suma por $f(x)$, pues su valor depende de la elección de x. Así, escribimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

para todos los números x en el intervalo de convergencia. Por ejemplo, la **serie geométrica** $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ tiene radio de convergencia $\rho = 1$ y la función suma $f(x) = 1/(1 - x)$; es decir,

(3) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{para} \quad -1 < x < 1.$$

En este capítulo apelaremos con frecuencia a la siguiente propiedad básica de las series de potencias.

SERIES DE POTENCIAS QUE SE ANULAN EN UN INTERVALO

Teorema 3. Si $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ para toda x en cierto intervalo abierto, entonces cada coeficiente a_n es igual a cero.

Dadas dos series de potencias

(4) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n , \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n ,$$

con radios de convergencia no nulos, queremos hallar representaciones en serie de potencias para la suma, producto y cociente de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. La suma se obtiene fácilmente sumando término a término:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$$

para toda x en el intervalo común de convergencia de las series de potencias en (4). La representación en serie de potencias para el producto $f(x)g(x)$ es un poco más complicada. Para motivar la fórmula, consideramos a las series de potencias para $f(x)$ y $g(x)$ como "polinomios largos", aplicamos la ley distributiva y agrupamos los términos en potencias de $(x - x_0)$:

$$\begin{aligned}&[a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots] \cdot [b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots] \\ &\quad = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x - x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x - x_0)^2 + \cdots .\end{aligned}$$

La fórmula general para el producto es

(5) $$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n ,$$

donde

(6) $$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

La serie de potencias en (5) se llama **producto de Cauchy**, y converge para toda x en el intervalo común de convergencia *abierto* para las series de potencias de f y g.†

El cociente $f(x)/g(x)$ también tendrá un desarrollo en serie de potencias en torno de x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$. Sin embargo, el radio de convergencia para este cociente puede ser menor que el de $f(x)$ o $g(x)$. Por desgracia, no hay una fórmula agradable para obtener los coeficientes de la serie de potencias para $f(x)/g(x)$. Sin embargo, podemos usar el producto de Cauchy para dividir la serie de potencias de manera indirecta (véase el problema 15). La serie cociente también se puede obtener aplicando formalmente el proceso de división de polinomios (véase el problema 16).

El siguiente teorema explica, en parte, por qué las series de potencias son tan útiles.

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Teorema 4. Si la serie $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tiene un radio de convergencia positivo ρ, entonces f es diferenciable en el intervalo $|x - x_0| < \rho$ y al derivar término a término se obtiene la serie de potencias de la derivada:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} \quad \text{para} \quad |x - x_0| < \rho .$$

Además, al integrar término a término se obtiene la serie de potencias para la integral de f:

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + C \quad \text{para} \quad |x - x_0| < \rho .$$

EJEMPLO 2 Partiendo de la serie geométrica (3) para $1/(1 - x)$, determinar una serie de potencias para cada una de las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{1}{1 + x^2}$. **(b)** $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$. **(c)** $\arctan x$.

SOLUCIÓN **(a)** Al reemplazar x por $-x^2$ en (3) se obtiene inmediatamente

(7) $$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots .$$

(b) Observe que $1/(1 - x)^2$ es la derivada de la función $f(x) = 1/(1 - x)$. Por lo tanto, al derivar (3) término a término obtenemos

†En realidad, puede ocurrir que el radio de convergencia de la serie de potencias para $f(x)g(x)$ o $f(x) + g(x)$ sea mayor que el de las series de potencias para f o g.

(8) $$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \ .$$

(c) Como

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \ ,$$

podemos integrar la serie en (7) término a término para obtener la serie de arctan x. Así,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \{1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots\}dt$$

(9) $$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \ . \ ■$$

Es importante recordar que como la serie geométrica (3) tiene el intervalo (abierto) de convergencia $(-1, 1)$, las representaciones (7), (8) y (9) son válidas al menos en este intervalo. (En realidad, la serie (9) para arctan x converge para toda $|x| \leq 1$).

Corrimiento del índice de la suma

El índice de la suma en una serie de potencias es un índice nominal, como la variable de integración en una integral definida. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i \ .$$

Así como a veces queremos cambiar la variable de integración, hay situaciones (y encontraremos muchas en este capítulo) en que es recomendable cambiar o recorrer el índice de la suma. Esto es de particular importancia cuando hay que combinar dos series de potencias distintas.

EJEMPLO 3 Expresar la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

como una serie donde el término genérico sea x^k en vez de x^{n-2}.

SOLUCIÓN Al hacer $k = n - 2$, tenemos que $n = k + 2$ y $n - 1 = k + 1$. Observe que cuando $n = 2$, $k = 0$. Por lo tanto, al sustituir en la serie dada, vemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \ . \ ■$$

EJEMPLO 4 Mostrar que

$$x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} (n-3)^2(n-5)a_{n-3}x^n \ .$$

SOLUCIÓN Primero introducimos el término x^3 dentro de la suma del lado izquierdo:

$$x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^{n+3} .$$

Para escribir esto con el término genérico x^k, hacemos $k = n + 3$. Así, $n = k - 3$ y $n = 0$ corresponde a $k = 3$. Una sustitución directa implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^{n+3} = \sum_{k=3}^{\infty} (k-3)^2(k-5)a_{k-3}x^k .$$

Al reemplazar k por n obtenemos la forma deseada. ■

EJEMPLO 5 Mostrar que la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^{n+1} = 0$$

implica que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ y $a_n = -b_{n-1}/(n+1)$ para $n \geq 3$.

SOLUCIÓN Primero escribimos ambas series en términos de x^k. Para la primera serie, hacemos $k = n - 1$, de modo que $n = k + 1$ y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k x^k .$$

Luego, con $k = n + 1$, $n = k - 1$, la segunda serie se convierte en

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n x^{n+1} = \sum_{k=3}^{\infty} b_{k-1}x^k .$$

Así, la identidad establece que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k x^k + \sum_{k=3}^{\infty} b_{k-1}x^k = 0 ,$$

de modo que tenemos una serie de potencias cuya suma es igual a cero; en consecuencia, por el teorema 3, cada uno de sus coeficientes es igual a cero. Para $k = 3, 4, \ldots$, ambas series contribuyen al coeficiente de x^k y con ello confirmamos que

$$(k+1)a_k + b_{k-1} = 0$$

o $a_k = -b_{k-1}/(k+1)$ para $k \geq 3$. Para $k = 0$, 1 o 2, sólo contribuye la primera serie, de modo que

$$(0+1)a_0 = 0 ,$$
$$(1+1)a_1 = 0 ,$$
$$(2+1)a_2 = 0 .$$

Por lo tanto, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. ■

Funciones analíticas

No todas las funciones se pueden expresar como series de potencias; aquellas funciones que cumplen esta restricción se llaman **analíticas**.

FUNCIÓN ANALÍTICA

Definición 1. Una función f es **analítica en x_0** si en un intervalo abierto en torno de x_0, esta función es la suma de una serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ con un radio de convergencia positivo.

Por ejemplo, una función polinomial $b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ es analítica para cada x_0, pues siempre podemos escribirla en la forma $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$. Una función racional $P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios sin factores comunes, es una función analítica excepto en los puntos x_0 para los que $Q(x_0) = 0$. Como recordará el lector de sus cursos de cálculo, las funciones elementales e^x, sen x y cos x son analíticas para cada x, mientras que ln x es analítica para $x > 0$. Algunas representaciones conocidas son

(10) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ,$$

(11) $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} ,$$

(12) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} ,$$

(13) $$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n ,$$

donde (10), (11) y (12) son válidas para cada x, mientras que (13) es válida para x en el intervalo semiabierto $(0, 2]$.

El teorema 4 relativo a la derivada de una serie de potencias muestra que una función f analítica en x_0 es diferenciable en una vecindad de x_0. Además, como f' tiene una representación en serie de potencias en esta vecindad, también es analítica en x_0. Al repetir este argumento, vemos que f'', $f^{(3)}$, etc., existen y son analíticas en x_0. En consecuencia, si una función no tiene derivadas de todos los órdenes en x_0, entonces no puede ser analítica en x_0. La función $f(x) = |x - 1|$ no es analítica en $x_0 = 1$, pues $f'(1)$ no existe; $f(x) = x^{7/3}$ no es analítica en $x_0 = 0$, pues $f'''(0)$ no existe.

Ahora podemos deducir algo muy específico acerca de las series de potencias que pudieran representar una función analítica. Si $f(x)$ es analítica en x_0, entonces (por definición), es la suma de *alguna* serie de potencias que converge en una vecindad de x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n .$$

Por el razonamiento del párrafo anterior, las derivadas de f tienen representaciones en series

de potencias convergentes

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} = 0 + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots\big(n - [j-1]\big)a_n(x - x_0)^{n-j}$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} n(n-1)\cdots\big(n - [j-1]\big)a_n(x - x_0)^{n-j}$$

$$\vdots$$

Pero si evaluamos estas series en $x = x_0$ vemos que

$$f(x_0) = a_0\ ,$$
$$f'(x_0) = 1 \cdot a_1\ ,$$
$$f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2\ ,$$
$$\vdots$$
$$f^{(j)}(x_0) = j! \cdot a_j\ ,$$
$$\vdots$$

es decir, $a_j = f^{(j)}(x_0)/j!$ y la serie de potencias *debe coincidir* con la serie de Taylor†

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

en torno de x_0. *Cualquier serie de potencias, sin importar la forma en que se deduzca, convergente en una vecindad de x_0 a una función, tiene que ser la serie de Taylor de esa función.* Por ejemplo, el desarrollo para arctan x dado en (9) del ejemplo 2 debe ser su desarrollo en serie de Taylor.

Con estos hechos en mente estamos listos para regresar al estudio de la eficacia de las técnicas de series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales. En las siguientes secciones, el lector deberá tener en mente que si f y g son analíticas en x_0, entonces también lo son $f + g$, cf, fg y f/g si $g(x_0) \neq 0$. Estos hechos son consecuencia de las propiedades algebraicas de las series de potencias, analizadas anteriormente.

EJERCICIOS 8.2

En los problemas 1 a 6, determine el conjunto de convergencia de la serie de potencias dada.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}(x-1)^n$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}x^n$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x+2)^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n}(x-3)^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}(x-2)^n$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!}(x+2)^n$.

7. En ocasiones, el criterio del cociente (teorema 2) es aplicable a una serie de potencias que contiene una infinidad de coeficientes nulos, siempre que el patrón de ceros sea regular. Por ejemplo, use el teore-

†Cuando el punto de desarrollo x_0 es cero, la serie de Taylor también se conoce como **serie de Maclaurin**.

ma 2 para mostrar que la serie

$$a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k}$$

tiene un radio de convergencia $\rho = 1/\sqrt{L}$, si

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right| = L ,$$

y que

$$a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

tiene un radio de convergencia $\rho = 1/\sqrt{M}$, si

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}\right| = M .$$

[*Sugerencia*: Sea $z = x^2$].

8. Determine el conjunto de convergencia de la series de potencias dadas.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}x^{2k}$. **(b)** $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+1}x^{2k+1}$.

(c) sen x [ec. (11)]. **(d)** cos x (ec. (12)).

(e) $(\operatorname{sen} x)/x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n+1)!$.

(f) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}x^{4k}$.

En los problemas 9 y 10, determine el desarrollo en serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ para $f(x) + g(x)$, dados los desarrollos para $f(x)$ y $g(x)$.

9. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^n , \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x^{n-1} .$

10. $f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-1)^{n-2} ,$

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x-1)^{n-1} .$

En los problemas 11 a 14, determine los tres primeros términos no nulos en el desarrollo en serie de potencias para el producto $f(x)g(x)$.

11. $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n ,$

$g(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} .$

12. $f(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} ,$

$g(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} .$

13. $f(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n ,$

$g(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n .$

14. $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n ,$

$g(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n .$

15. Determine los primeros términos de la serie de potencias para el cociente

$$q(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}x^n\right)\Bigg/\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right)$$

mediante los siguientes pasos:

(a) Sea $q(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, donde hay que determinar los coeficientes a_n. Argumente que $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/2^n$ es el producto de Cauchy de $q(x)$ y $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

(b) Use la fórmula (6) del producto de Cauchy para deducir las ecuaciones

$$\frac{1}{2^0} = a_0 , \quad \frac{1}{2} = a_0 + a_1 ,$$

$$\frac{1}{2^2} = \frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 ,$$

$$\frac{1}{2^3} = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2 + a_3 , \ldots .$$

(c) Resuelva las ecuaciones de la parte (b) para determinar los constantes a_0, a_1, a_2, a_3.

16. Para determinar los primeros términos en la serie de potencias para el cociente $q(x)$ en el problema 15, trate a las series de potencias en el numerador y el denominador como "polinomios largos" y realice la división de polinomios. Es decir,

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots \overline{\Big) 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \cdots} .$$

En los problemas 17 a 20, determine un desarrollo en serie de potencias para $f'(x)$, dado el desarrollo para $f(x)$.

17. $f(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n .$

18. $f(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} .$

19. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n .$

20. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$.

En los problemas 21 y 22, determine un desarrollo en serie de potencias para $g(x) := \int_0^x f(t)$, dado el desarrollo para $f(x)$.

21. $f(x) = (1 + x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

22. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2k}$.

En los problemas 23 a 26, exprese la serie de potencias dada como una serie con término genérico x^k.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$.

24. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n+2}$.

25. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n + 3} x^{n-3}$.

27. Muestre que

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n + 1)a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)(n-1)a_{n-2} x^n .$$

28. Muestre que

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2a_{n-1} + (n+1)b_{n+1}\right]x^n .$$

En los problemas 29 a 34, determine la serie de Taylor en torno del punto x_0 para las funciones y valores de x_0 dados.

29. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

30. $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 1$.

31. $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$, $x_0 = 0$.

32. $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$.

33. $f(x) = x^3 + 3x - 4$, $x_0 = 1$.

34. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

35. La serie de Taylor para $f(x) = \ln x$ en torno de $x_0 = 1$ dada en la ecuación (13) también se puede obtener como sigue:

(a) Partiendo del desarrollo $1/(1 - s) = \Sigma_{n=0}^{\infty} s^n$ y de la observación

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x - 1)} ,$$

obtenga la serie de Taylor para $1/x$ en torno de $x_0 = 1$.

(b) Como $\ln x = \int_1^x 1/t\, dt$, use el resultado de la parte (a) y la integración término a término para obtener la serie de Taylor para $f(x) = \ln x$ en torno de $x_0 = 1$.

36. Sean $f(x)$ y $g(x)$ analíticas en x_0. Determine si las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas o a veces falsas:

(a) $3f(x) + g(x)$ es analítica en x_0 .

(b) $f(x)/g(x)$ es analítica en x_0 .

(c) $f'(x)$ es analítica en x_0 .

(d) $[f(x)]^3 - \int_{x_0}^x g(t)\, dt$ es analítica en x_0 .

37. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} , & x \neq 0 , \\ 0 , & x = 0 . \end{cases}$$

Muestre que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, y por tanto que la serie de Maclaurin para $f(x)$ es $0 + 0 + 0 + \cdots$, la que converge para toda x pero es igual a $f(x)$ sólo cuando $x = 0$. Éste es un ejemplo de función que tiene derivadas de todos los órdenes (en $x_0 = 0$), cuya serie de Taylor converge, pero la serie de Taylor (en torno de $x_0 = 0$) ¡no converge a la función original! En consecuencia, esta función no es analítica en $x = 0$.

38. Calcule la serie de Taylor para $f(x) = \ln(1 + x^2)$ en torno de $x_0 = 0$. [*Sugerencia*: Multiplique la serie para $(1 + x^2)$ por $2x$ e integre].

8.3 SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

En esta sección demostraremos un método para obtener una solución en serie de potencias de una ecuación diferencial lineal con coeficientes polinomiales. Este método es más fácil de

utilizar que el método con series de Taylor analizado en la sección 8.1 y a veces proporciona una expresión agradable para el término general en el desarrollo en serie de potencias. El hecho de conocer la forma del término general también nos permite verificar el radio de convergencia de la serie de potencias.

Primero escribimos la ecuación diferencial lineal

(1) $$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en la forma canónica

(2) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \ ,$$

donde $p_1(x) := a_1(x)/a_2(x)$ y $q(x) := a_0(x)/a_2(x)$.

PUNTOS ORDINARIOS Y SINGULARES

Definición 2. Un punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación (1) si $p = a_1/a_2$ y $q = a_0/a_2$ son analíticas en x_0. Si x_0 no es un punto ordinario, se dice que es un **punto singular** de la ecuación.

EJEMPLO 1 Determinar todos los puntos singulares de

$$xy'' + x(1-x)^{1}y' + (\operatorname{sen} x)y = 0 \ .$$

SOLUCIÓN Al dividir la ecuación entre x vemos que

$$p(x) = \frac{x}{x(1-x)} \ , \qquad q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ .$$

Los puntos singulares son aquellos donde $p(x)$ *o* $q(x)$ dejan de ser analíticas. Observe que $p(x)$ y $q(x)$ son cocientes de funciones que son analíticas en todo punto. Por tanto, $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas excepto, *tal vez*, cuando sus denominadores se anulan. Para $p(x)$, esto ocurre en $x = 0$ y $x = 1$. Pero como podemos cancelar una x en el numerador y el denominador de $p(x)$, es decir,

$$p(x) = \frac{x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x} \ ,$$

vemos que en realidad $p(x)$ es analítica en $x = 0$.† Por lo tanto, $p(x)$ es analítica excepto en $x = 1$. Para $q(x)$, el denominador se anula en $x = 0$. Como en el caso de $p(x)$, este cero es removible, pues $q(x)$ tiene el desarrollo en serie de potencias

$$q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots \ .$$

Así, $q(x)$ es analítica en todo punto. En consecuencia, el único punto singular de la ecuación dada es $x = 1$. ■

†Tales puntos se llaman **singularidades removibles.** En este capítulo supondremos que en tales casos hemos definido (o redefinido) a la función de modo que sea analítica en el punto.

En un punto ordinario x_0 de la ecuación (1) (o (2)), las funciones coeficiente $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas. Por lo tanto, es de esperar que las soluciones de estas ecuaciones hereden esta propiedad. Por el análisis de la sección 6.1 relativo a ecuaciones lineales de segundo orden, la continuidad de p y q en una vecindad de x_0 basta para implicar que la ecuación (2) tiene dos soluciones linealmente independientes definidas en esa vecindad. Pero las funciones analíticas no son meramente continuas, tienen derivadas de todos los órdenes en una vecindad de x_0. Así, podemos derivar la ecuación (2) para mostrar que $y^{(3)}$ existe; continuando de esta forma, podemos demostrar que las soluciones de (2) deben tener también derivadas de todos los órdenes. Aunque no podemos concluir de este razonamiento que las soluciones disfrutan de la propiedad más fuerte, la analiticidad, éste es el caso (véase el teorema 5 de la sección 8.4). Por lo tanto, en una vecindad de un punto ordinario x_0, las soluciones de (1) (o (2)) se pueden expresar como una serie de potencias en torno de x_0.

Para ilustrar el método de series de potencias en torno de un punto ordinario, analicemos una ecuación diferencial lineal de *primer orden* sencilla.

EJEMPLO 2 Determinar una solución en serie de potencias en torno de $x = 0$ para

(3) $$y' + 2xy = 0 .$$

SOLUCIÓN El coeficiente de y es el polinomio $2x$, que es analítico en todo punto, de modo que $x = 0$ es un punto ordinario† de la ecuación (3). Así, esperamos hallar una solución en serie de potencias de la forma

(4) $$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n .$$

Nuestra tarea consiste en determinar los coeficientes a_n.

Para esto necesitamos el desarrollo para $y'(x)$ dado por la derivación término a término de (4):

$$y'(x) = 0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} .$$

Ahora sustituimos los desarrollos en serie para y y y' en (3) y obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 ,$$

lo que se simplifica como

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = 0 .$$

Para sumar las dos series de potencias en (5), sumamos los coeficientes de potencias semejantes de x. Si escribimos los primeros términos de esta suma, obtenemos

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots) + (2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + \cdots) = 0 ,$$

(6) $$a_1 + (2a_2 + 2a_0)x + (3a_3 + 2a_1)x^2 + (4a_4 + 2a_2)x^3 + \cdots = 0 .$$

Para que la serie de potencias del lado izquierdo de la ecuación (6) se anule, todos los coefi-

†Por un punto ordinario de una ecuación de primer orden $y' + q(x)y = 0$ entendemos un punto donde $q(x)$ es analítica.

cientes deben ser iguales a cero. Así,

$$a_1 = 0 \ , \qquad 2a_2 + 2a_0 = 0 \ ,$$
$$3a_3 + 2a_1 = 0 \ , \qquad 4a_4 + 2a_2 = 0 \ , \qquad \text{etc.}$$

Al resolver el sistema anterior, tenemos

$$a_1 = 0 \ , \qquad a_2 = -a_0 \ , \qquad a_3 = -\frac{2}{3}a_1 = 0 \ ,$$
$$a_4 = -\frac{1}{2}a_2 = -\frac{1}{2}(-a_0) = \frac{1}{2}a_0 \ .$$

Por tanto, la serie de potencias para la solución asume la forma

(7) $$y(x) = a_0 - a_0x^2 + \frac{1}{2}a_0x^4 + \cdots \ .$$

Aunque los primeros términos que aparecen en (7) son útiles, a veces es bueno tener una fórmula para el *término general* en el desarrollo en serie de potencias para la solución. Para lograr esto, regresaremos a la ecuación (5). Esta vez, en vez de sólo escribir unos cuantos términos, recorreremos los índices en las dos series de potencias para sumar sobre las mismas potencias de x, digamos x^k. Para esto, recorremos el índice de la primera suma en (5) haciendo $k = n - 1$. Entonces $n = k + 1$ y $k = 0$ cuando $n = 1$. Por lo tanto, la primera suma de (5) se convierte en

(8) $$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k \ .$$

En la segunda suma de (5) hacemos $k = n + 1$ de modo que $n = k - 1$ y $k = 1$ cuando $n = 0$. Esto implica

(9) $$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1}x^k \ .$$

Al sustituir (8) y (9) en (5) tenemos

(10) $$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1}x^k = 0 \ .$$

Como la primera suma en (10) comienza en $k = 0$ y la segunda en $k = 1$, descomponemos la primera en

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k \ .$$

Entonces (10) se convierte en

(11) $$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)a_{k+1} + 2a_{k-1}]x^k = 0 \ .$$

Al igualar todos los coeficientes en (11) a cero, vemos que

$$a_1 = 0 \ ,$$

y para toda $k \geq 1$,

(12) $$(k+1)a_{k+1} + 2a_{k-1} = 0 \ .$$

La ecuación (12) es una **relación de concurrencia** que podemos usar para determinar el coeficiente a_{k+1} en términos de a_{k-1}; es decir,

$$a_{k+1} = -\frac{2}{k+1}a_{k-1} \ .$$

Al hacer $k = 1, 2, \ldots, 8$ y usar el hecho de que $a_1 = 0$, tenemos

$$a_2 = -\frac{2}{2}a_0 = -a_0 \quad (k=1) \ , \qquad a_3 = -\frac{2}{3}a_1 = 0 \quad (k=2) \ ,$$

$$a_4 = -\frac{2}{4}a_2 = \frac{1}{2}a_0 \quad (k=3) \ , \qquad a_5 = -\frac{2}{5}a_3 = 0 \quad (k=4) \ ,$$

$$a_6 = -\frac{2}{6}a_4 = -\frac{1}{3!}a_0 \quad (k=5) \ , \qquad a_7 = -\frac{2}{7}a_5 = 0 \quad (k=6) \ ,$$

$$a_8 = -\frac{2}{8}a_6 = \frac{1}{4!}a_0 \quad (k=7) \ , \qquad a_9 = -\frac{2}{9}a_7 = 0 \quad (k=8) \ .$$

Después de reflexionar un poco, nos damos cuenta que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}a_0 \ , \qquad n = 1, 2, \ldots \ ,$$

$$a_{2n+1} = 0 \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Al sustituir de nuevo en la expresión (4), obtenemos la solución en serie de potencias

(13) $$y(x) = a_0 - a_0x^2 + \frac{1}{2!}a_0x^4 + \cdots = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} \ .$$

Como a_0 no está determinado aún, sirve como una constante arbitraria, y por tanto (13) proporciona una solución general de la ecuación (3). ■

Podemos aplicar el criterio del cociente descrito en el problema 7 de los ejercicios 8.2 (página 438) para verificar que la serie de potencias en (13) tiene radio de convergencia $\rho = \infty$. Además, (13) nos recuerda el desarrollo para la función exponencial; el lector debe verificar que converge a

$$y(x) = a_0 e^{-x^2} \ .$$

Esta solución general de la sencilla ecuación (3) también se puede obtener mediante el método de separación de variables.

La convergencia de las sumas parciales de (13), con $a_0 = 1$, a la solución real e^{-x^2} se muestra en la figura 8.3. Observe que al considerar más términos se obtiene una mejor aproximación en torno de $x = 0$. Observe además, sin embargo, que cada suma parcial es *polinomial*, por lo que diverge en $x = \pm\infty$, mientras que e^{-x^2} converge a cero, por supuesto. Así, cada aproximación mediante una suma parcial comienza a deteriorarse para $|x|$ grande. Ésta es una característica típica de las aproximaciones mediante series de potencias.

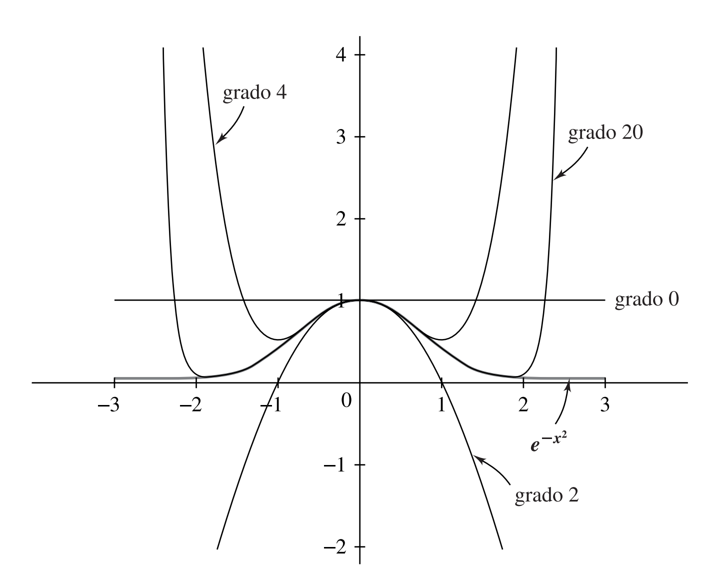


Figura 8.3 Aproximaciones mediante sumas parciales a e^{-x^2}

En el siguiente ejemplo usamos el método de series de potencias para obtener una solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

EJEMPLO 3 Determinar una solución general de

(14) $$2y'' + xy' + y = 0$$

en la forma de una serie de potencias en torno del punto ordinario $x = 0$.

SOLUCIÓN Escribimos

(15) $$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

y derivamos término a término para obtener

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} ,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} .$$

Al sustituir esta serie de potencias en la ecuación (14), vemos que

(16) $$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 .$$

Para simplificar la suma de las tres expresiones en (16), recorremos los índices de modo que el término general en cada uno sea una constante por x^k. Para la primera suma, sustituimos $k = n - 2$ y obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1)a_{k+2} x^k .$$

En la segunda y tercera sumas, simplemente sustituimos k por n. Con estos cambios de índices, la ecuación (16) queda

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = 0 \ .$$

A continuación separamos los términos x^0 de los demás y luego agrupamos las potencias semejantes de x en las tres sumas para obtener

$$4a_2 + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[2(k+2)(k+1)a_{k+2} + ka_k + a_k\right]x^k = 0 \ .$$

Al igualar a cero los coeficientes de esta serie de potencias tenemos

(17) $$4a_2 + a_0 = 0$$

y la relación de recurrencia

(18) $$2(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+1)a_k = 0 \ , \qquad k \geq 1 \ .$$

Ahora podemos usar (17) y (18) para determinar todos los coeficientes a_k de la solución en términos de a_0 y a_1. Despejando a_{k+2} en (18),

(19) $$a_{k+2} = \frac{-1}{2(k+2)}a_k \ , \qquad k \geq 1 \ .$$

Así,

$$a_2 = \frac{-1}{2^2}a_0 \ ,$$

$$a_3 = \frac{-1}{2 \cdot 3}a_1 \qquad (k=1) \ ,$$

$$a_4 = \frac{-1}{2 \cdot 4}a_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 2 \cdot 4}a_0 \qquad (k=2) \ ,$$

$$a_5 = \frac{-1}{2 \cdot 5}a_3 = \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}a_1 \qquad (k=3) \ ,$$

$$a_6 = \frac{-1}{2 \cdot 6}a_4 = \frac{-1}{2^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}a_0 = \frac{-1}{2^6 \cdot 3!}a_0 \qquad (k=4) \ ,$$

$$a_7 = \frac{-1}{2 \cdot 7}a_5 = \frac{-1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}a_1 \qquad (k=5) \ ,$$

$$a_8 = \frac{-1}{2 \cdot 8}a_6 = \frac{1}{2^4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}a_0 = \frac{1}{2^8 \cdot 4!}a_0 \qquad (k=6) \ .$$

Ahora es claro el patrón de los coeficientes. Como a_0 y a_1 no tiene restricciones, vemos que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!}a_0 \ , \qquad n \geq 1 \ ,$$

y

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)]} a_1 , \qquad n \geq 1 .$$

De aquí surgen dos soluciones linealmente independientes, a saber,

(20) $$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} x^{2n} \qquad (\text{haga } a_0 = 1, a_1 = 0) ,$$

(21) $$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)]} x^{2n+1} \qquad (\text{haga } a_0 = 0, a_1 = 1) .$$

Por lo tanto, una solución general de (14) es $a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$. La figura 8.4 muestra algunas aproximaciones a las soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$. ■

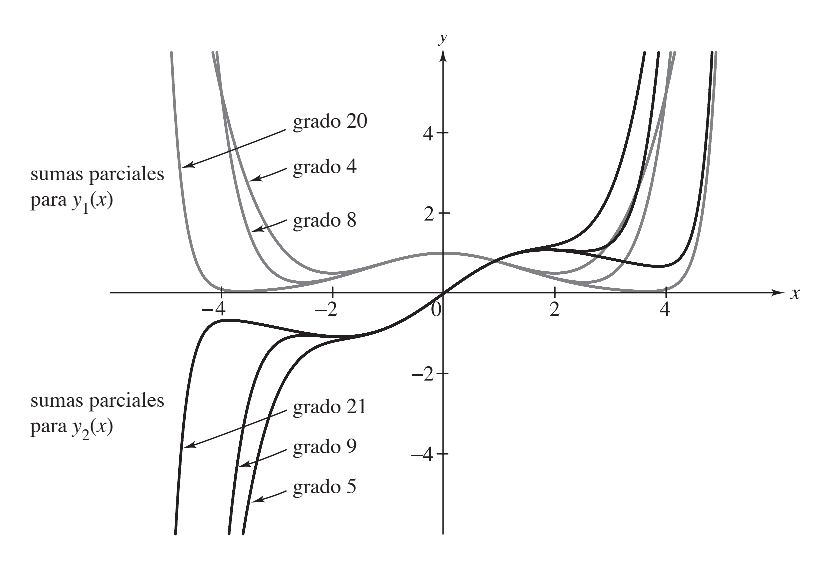


Figura 8.4 Aproximaciones mediante sumas parciales a las soluciones del ejemplo 3

El método ilustrado en el ejemplo 3 se puede usar también para resolver problemas con valores iniciales. Suponga que tenemos dados los valores de $y(0)$ y $y'(0)$; entonces, de la ecuación (15), vemos que $a_0 = y(0)$ y $a_1 = y'(0)$. Al conocer estos dos coeficientes obtenemos una única solución en serie de potencias para el problema con valores iniciales.

La relación de recurrencia (18) en el ejemplo 3 sólo implicaba a dos de los coeficientes, a_{k+2} y a_k, y podemos deducir de esta relación la forma general del coeficiente a_n. Sin embargo, en muchos casos se obtienen relaciones de recurrencia más complicadas, con dos o más términos. Cuando esto ocurre, es imposible determinar la forma general de los coeficientes a_n. En el siguiente ejemplo consideramos una ecuación que da lugar a una relación de recurrencia de tres términos.

EJEMPLO 4 Determinar los primeros términos de un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de

$$(1 + x^2)y'' - y' + y = 0 . \tag{22}$$

SOLUCIÓN Como $p(x) = -(1 + x^2)^{-1}$ y $q(x) = (1 + x^2)^{-1}$ son analíticas en $x = 0$, éste es un punto ordinario para la ecuación (22). Por lo tanto, podemos expresar su solución general en la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Al sustituir este desarrollo en (22) tenemos

$$(1 + x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 ,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 . \tag{23}$$

Para sumar sobre potencias semejantes x^k, hacemos $k = n - 2$ en la primera suma de (23), $k = n - 1$ en la tercera y $k = n$ en la segunda y cuarta. Esto implica

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 .$$

Separamos los términos correspondientes a $k = 0$ y $k = 1$ y agrupamos el resto bajo una suma,

$$(2a_2 - a_1 + a_0) + (6a_3 - 2a_2 + a_1)x$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)a_{k+1} + \big(k(k-1)+1\big)a_k\right]x^k = 0 .$$

Al igualar los coeficientes a cero tenemos

$$2a_2 - a_1 + a_0 = 0 , \tag{24}$$

$$6a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \tag{25}$$

y la relación de recurrencia

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)a_{k+1} + (k^2 - k + 1)a_k = 0 , \qquad k \geq 2 . \tag{26}$$

Podemos despejar a a_2 en (24) en términos de a_0 y a_1:

$$a_2 = \frac{a_1 - a_0}{2} .$$

Ahora que tenemos a_2, podemos usar (25) para expresar a_3 en términos de a_0 y a_1:

$$a_3 = \frac{2a_2 - a_1}{6} = \frac{(a_1 - a_0) - a_1}{6} = \frac{-a_0}{6} .$$

Despejamos a_{k+2} en la relación de recurrencia (26) para obtener

$$a_{k+2} = \frac{(k+1)a_{k+1} - (k^2 - k + 1)a_k}{(k+2)(k+1)} , \qquad k \geq 2 . \tag{27}$$

Para $k = 2$, 3 y 4, esto da

$$a_4 = \frac{3a_3 - 3a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_3 - a_2}{4}$$

$$= \frac{\frac{-a_0}{6} - \left(\frac{a_1 - a_0}{2}\right)}{4} = \frac{2a_0 - 3a_1}{24} \qquad (k = 2) \, ,$$

$$a_5 = \frac{4a_4 - 7a_3}{5 \cdot 4} = \frac{3a_0 - a_1}{40} \qquad (k = 3) \, ,$$

$$a_6 = \frac{5a_5 - 13a_4}{6 \cdot 5} = \frac{36a_1 - 17a_0}{720} \qquad (k = 4) \, .$$

Ahora podemos expresar una solución general en términos hasta de orden 6, usando a_0 y a_1 como las constantes arbitrarias. Así,

(28)
$$y(x) = a_0 + a_1 x + \left(\frac{a_1 - a_0}{2}\right)x^2 - \frac{a_0}{6}x^3 + \left(\frac{2a_0 - 3a_1}{24}\right)x^4 + \left(\frac{3a_0 - a_1}{40}\right)x^5 + \left(\frac{36a_1 - 17a_0}{720}\right)x^6 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{17}{720}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{20}x^6 + \cdots\right) \, . \; \blacksquare$$

Si tenemos valores específicos para a_0 y a_1, ¿las sumas parciales de la representación en serie de potencias (28) nos dará aproximaciones útiles de la solución cuando $x = 0.5$? ¿Y qué decir cuando $x = 2.3$ o $x = 7.8$? Las respuestas a estas preguntas dependen del radio de convergencia de la serie de potencias en (28). Pero como no logramos determinar una forma general para los coeficientes a_n en este ejemplo, no podemos usar el criterio del cociente (u otros métodos, como el criterio de la raíz, el criterio de la integral o el criterio de comparación) para calcular el radio ρ. En la siguiente sección remediaremos esta situación dando un procedimiento sencillo para determinar una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie de potencias.

EJERCICIOS 8.3

En los problemas 1 a 10, determine los puntos singulares de la ecuación diferencial dada.

1. $(x + 1)y'' - x^2y' + 3y = 0$.

2. $x^2y'' + 3y' - xy = 0$.

3. $(\theta^2 - 2)y'' + 2y' + (\operatorname{sen}\theta)y = 0$.

4. $(x^2 + x)y'' + 3y' - 6xy = 0$.

5. $(t^2 - t - 2)x'' + (t + 1)x' - (t - 2)x = 0$.

6. $(x^2 - 1)y'' + (1 - x)y' + (x^2 - 2x + 1)y = 0$.

7. $(\operatorname{sen} x)y'' + (\cos x)y = 0$.

8. $e^xy'' - (x^2 - 1)y' + 2xy = 0$.

9. $(\operatorname{sen}\theta)y'' - (\ln\theta)y = 0$.

10. $[\ln(x - 1)]y'' + (\operatorname{sen} 2x)y' - e^xy = 0$.

En los problemas 11 a 18, determine al menos los primeros cuatro términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación diferencial dada.

11. $y' + (x + 2)y = 0$. **12.** $y' - y = 0$.

13. $z'' - x^2 z = 0$. **14.** $(x^2 + 1)y'' + y = 0$.

15. $y'' + (x - 1)y' + y = 0$.

16. $y'' - 2y' + y = 0$.

17. $w'' - x^2 w' + w = 0$.

18. $(2x - 3)y'' - xy' + y = 0$.

En los problemas 19 a 24, determine un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación diferencial dada. Su respuesta debe incluir una fórmula general para los coeficientes.

19. $y' - 2xy = 0$. **20.** $y'' + y = 0$.

21. $y'' - xy' + 4y = 0$. **22.** $y'' - xy = 0$.

23. $z'' - x^2 z' - xz = 0$.

24. $(x^2 + 1)y'' - xy' + y = 0$.

En los problemas 25 a 28, determine al menos los primeros cuatro términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para la solución del problema con valores iniciales dado.

25. $w'' + 3xw' - w = 0$;
$w(0) = 2$, $w'(0) = 0$.

26. $(x^2 - x + 1)y'' - y' - y = 0$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

27. $(x + 1)y'' - y = 0$;
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

28. $y'' + (x - 2)y' - y = 0$;
$y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

En los problemas 29 a 31, use los primeros términos del desarrollo en serie de potencias para determinar una aproximación polinomial cúbica para la solución del problema con valores iniciales dado. Grafique las aproximaciones polinomiales lineal, cuadrática y cúbica para $-5 \leq x \leq 5$.

29. $y'' + y' - xy = 0$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

30. $y'' - 4xy' + 5y = 0$;
$y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

31. $(x^2 + 2)y'' + 2xy' + 3y = 0$;
$y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

32. Considere el problema con valores iniciales

$$y'' - 2xy' - 2y = 0 ;$$
$$y(0) = a_0 , \qquad y'(0) = a_1 ,$$

donde a_0 y a_1 son constantes.

(a) Muestre que si $a_0 = 0$, entonces la solución será una función impar [es decir, $y(-x) = -y(x)$ para toda x]. ¿Qué ocurre cuando $a_1 = 0$?

(b) Muestre que si a_0 y a_1 son positivos, entonces la solución es creciente en $(0, \infty)$.

(c) Muestre que si a_0 es negativo y a_1 es positivo, entonces la solución es creciente en $(-\infty, 0)$.

(d) ¿Qué condiciones sobre a_0 y a_1 garantizarían que la solución es creciente en $(-\infty, \infty)$?

33. Use el criterio del cociente para mostrar que el radio de convergencia de la serie en la ecuación (13) es infinito. [*Sugerencia*: Véase el problema 7 de los ejercicios 8.2, página 438].

34. Ecuación de Emden. Una ecuación no lineal clásica que aparece en el estudio del comportamiento térmico de una nube esférica es la **ecuación de Emden**

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^n = 0 ,$$

con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Aunque $x = 0$ *no* es un punto ordinario para esta ecuación (que es no lineal para $x \neq 1$), es posible mostrar que existe una solución analítica en $x = 0$. Si n es un entero positivo, muestre que los primeros términos de una solución en serie de potencias son

$$y = 1 - \frac{x^2}{3!} + n\frac{x^4}{5!} + \cdots .$$

[*Sugerencia*: Sustituya $x = 1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots$ en la ecuación y calcule con cuidado los primeros términos del desarrollo de y^n].

35. Resistencia variable. En la sección 5.6 mostramos que la carga q en el capacitor de un circuito sencillo *RLC* queda descrita mediante la ecuación

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t) ,$$

donde L es la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia y E la fuente de voltaje. Como la resistencia de un resistor se incrementa con la temperatura, supongamos que el resistor se calienta de modo que $R(t) = 1 + t/10$ ohms (véase la figura 8.5). Si $L = 0.1$ henrys, $C = 2$ farads, $E(t) \equiv 0$, $q(0) = 10$ coulombs y $q'(0) = 0$ amperes, determine al menos los primeros cuatro términos no nulos en un desarrollo

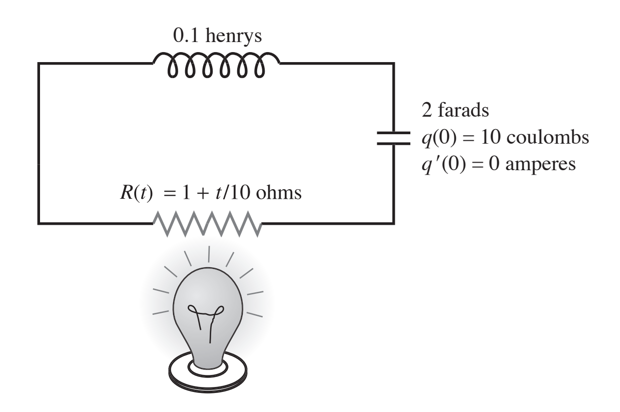


Figura 8.5 Un circuito *RLC* cuya resistencia se calienta

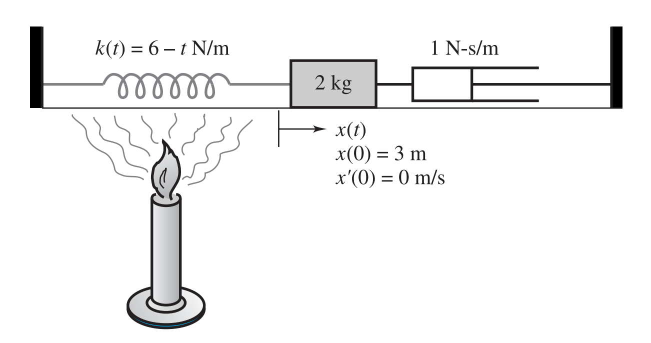


Figura 8.6 Un sistema masa-resorte cuyo resorte se calienta

en serie de potencias en torno de $t = 0$ para la carga en el capacitor.

36. Constante de un resorte variable. Al calentar un resorte, su "constante" decrece. Suponga que el resorte se calienta de modo que la "constante" en el instante t es $k(t) = 6 - t$ N/m (véase la figura 8.6). Si el sistema masa-resorte sin forzamiento tiene masa $m = 2$ kg y una constante de amortiguamiento $b = 1$ N-s/m con condiciones iniciales $x(0) = 3$ m y $x'(0) = 0$ m/s, entonces el desplazamiento $x(t)$ queda descrito mediante el problema con valores iniciales

$$2x''(t) + x'(t) + (6 - t)x(t) = 0 \; ;$$
$$x(0) = 3 \, , \qquad x'(0) = 0 \, .$$

Determine al menos los primeros cuatro términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $t = 0$ para el desplazamiento.

8.4 ECUACIONES CON COEFICIENTES ANALÍTICOS

En la sección 8.3 presentamos un método para obtener una solución en serie de potencias en torno de un punto ordinario. En esta sección continuamos el análisis de este procedimiento. Primero enunciaremos un teorema básico de existencia para la ecuación

(1) $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \, ,$$

que justifica el método de series de potencias.

EXISTENCIA DE SOLUCIONES ANALÍTICAS

Teorema 5. Suponga que x_0 es un punto ordinario para la ecuación (1). Entonces (1) tiene dos soluciones analíticas linealmente independientes de la forma

(2) $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \, .$$

Además, el radio de convergencia de cualquier solución en serie de potencias de la forma dada por (2) es al menos tan grande como la distancia de x_0 al punto singular más cercano (con valores reales o complejos) de la ecuación (1).

El elemento clave en la demostración del teorema 5 es la construcción de una serie geo-

métrica convergente que domine al desarrollo en serie (2) de una solución para la ecuación (1). La convergencia de la serie en (2) es entonces consecuencia del criterio de comparación. Los detalles de esta demostración aparecen en textos más avanzados de ecuaciones diferenciales.†

Como vimos en la sección 8.3, el método de series de potencias nos proporciona una solución general con la misma forma de (2), donde a_0 y a_1 son constantes arbitrarias. Las dos soluciones linealmente independientes que se mencionan en el teorema 5 se pueden obtener haciendo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ para la primera y $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ para la segunda. Así, podemos extender el teorema 5 diciendo que *la ecuación* (1) *tiene una solución general de la forma* (2) *con a_0 y a_1 como las constantes arbitrarias*.

La segunda parte del teorema 5 indica una forma sencilla de determinar un valor mínimo para el radio de convergencia de la serie de potencias. Sólo necesitamos hallar los puntos singulares de la ecuación (1) y luego determinar la distancia entre el punto ordinario x_0 y el punto singular más cercano.

EJEMPLO 1 Determinar un valor mínimo para el radio de convergencia de una solución en serie de potencias en torno de $x = 0$ para

(3) $$2y'' + xy' + y = 0 .$$

SOLUCIÓN Para esta ecuación, $p(x) = x/2$ y $q(x) = 1/2$. Ambas funciones son analíticas para todos los valores reales o complejos de x. Como la ecuación (3) no tiene puntos singulares, la distancia entre el punto ordinario $x = 0$ y el punto singular más cercano es infinita. Por tanto, el radio de convergencia es infinito. ■

El siguiente ejemplo nos ayuda a contestar las preguntas planteadas al final de la última sección.

EJEMPLO 2 Determinar un valor mínimo para el radio de convergencia de una solución en serie de potencias en torno de $x = 0$ para

(4) $$(1 + x^2)y'' - y' + y = 0 .$$

SOLUCIÓN En este caso, $p(x) = -1/(1 + x^2)$, $q(x) = 1/(1 + x^2)$ de modo que los puntos singulares de la ecuación (4) aparecen cuando $1 + x^2 = 0$; es decir, cuando $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Como los únicos puntos singulares de la ecuación (4) son los números complejos $\pm i$, vemos que $x = 0$ es un punto ordinario. Además, la distancia†† de 0 a cualquiera de los puntos $\pm i$ es 1. Así, el radio de convergencia de una solución en serie de potencias en torno de $x = 0$ es al menos 1. ■

En la ecuación (28) de la sección 8.3 hallamos los primeros términos de una solución en serie de potencias de la ecuación (4). Como ahora sabemos que esta serie tiene radio de convergencia al menos 1, las sumas parciales de esta serie convergerán a la solución para $|x| < 1$. Sin embargo, cuando $|x| \geq 1$, no tenemos bases para decidir si podemos usar la serie para aproximar la solución.

Los desarrollos en serie de potencias en torno de $x_0 = 0$ son más fáciles de manejar que los desarrollos en torno de puntos distintos del cero. Como muestra el siguiente ejemplo, un sencillo corrimiento en la variable nos permite desarrollar siempre con respecto del origen.

---

†Véase, por ejemplo, *Ordinary Differential Equations*, 4a. edición, por G. Birkhoff y G.-C. Rota (John Wiley & Sons, Nueva York, 1989).

††Recuerde que la distancia entre los dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ está dada por $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

EJEMPLO 3 Determine los primeros términos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 1$ para una solución general de

$$2y'' + xy' + y = 0 \ . \tag{5}$$

Determine además el radio de convergencia de la serie.

SOLUCIÓN Como vimos en el ejemplo 1, la ecuación (5) no tiene puntos singulares. Así, $x = 1$ es un punto ordinario y, como consecuencia del teorema 5, la ecuación (5) tiene una solución general de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \ . \tag{6}$$

Además, el radio de convergencia de la serie en (6) debe ser infinito.

Podemos simplificar el cálculo de los coeficientes a_n recorriendo el centro del desarrollo (6) de $x_0 = 1$ a $t_0 = 0$. Logramos esto sustituyendo $x = t + 1$. Hacemos $Y(t) = y(t+1)$ y usamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dt} \ , \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dt^2} \ ,$$

y, por lo tanto, podemos modificar la ecuación (5) como

$$2\frac{d^2Y}{dt^2} + (t+1)\frac{dY}{dt} + Y = 0 \ . \tag{7}$$

Ahora buscamos una solución general de la forma

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \ , \tag{8}$$

donde las a_n en las ecuaciones (6) y (8) son las mismas. Procediendo de la manera usual, sustituimos la serie de potencias para $Y(t)$ en (7) y deducimos una relación de recurrencia para los coeficientes, para hallar en última instancia

$$Y(t) = a_0\left\{1 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{24}t^3 + \cdots\right\} + a_1\left\{t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t^3 + \cdots\right\}$$

(dejamos los detalles al lector). Así, al hacer de nuevo $t = x - 1$ tenemos

$$\begin{aligned} y(x) = a_0&\left\{1 - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 + \cdots\right\} \\ &+ a_1\left\{(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3 + \cdots\right\} \ . \ \blacksquare \end{aligned} \tag{9}$$

Cuando los coeficientes de una ecuación lineal no son polinomios en x, sino funciones analíticas, podemos seguir encontrando soluciones analíticas esencialmente con el mismo método.

EJEMPLO 4 Determinar un desarrollo en serie de potencias para la solución de

$$y''(x) + e^x y'(x) + (1 + x^2)y(x) = 0 \ ; \qquad y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0 \ . \tag{10}$$

SOLUCIÓN En este caso, $p(x) = e^x$ y $q(x) = 1 + x^2$ y ambas son analíticas para toda x. Así, por el teore-

ma 5, el problema con valores iniciales (10) tiene una solución en serie de potencias

(11) $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

que converge para toda x $(\rho = \infty)$. Para determinar los primeros términos de esta serie, primero desarrollamos $p(x) = e^x$ en su serie de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Al sustituir los desarrollos de $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ y e^x en (10) obtenemos

(12) $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + (1 + x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 .$$

Debido a las dificultades de los cálculos por el hecho de que aparece el producto de la serie de potencias de e^x y $y'(x)$, nos concentraremos en los términos hasta de orden 4. Desarrollamos (12) y nos fijamos en tales términos:

(13) $$\begin{array}{rll}
& (2a_2 + 6a_3 x + \mathbf{12a_4x^2} + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \cdots) & \\
+ & (a_1 + 2a_2x + \mathbf{3a_3x^2} + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots) & 1 \cdot \Sigma\, na_n x^{n-1} \\
+ & (a_1x + \mathbf{2a_2x^2} + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + \cdots) & x \cdot \Sigma\, na_n x^{n-1} \\
+ & \left(\mathbf{\frac{1}{2}a_1x^2} + a_2x^3 + \frac{3}{2}a_3x^4 + \cdots\right) & \frac{x^2}{2} \cdot \Sigma\, na_n x^{n-1} \\
+ & \left(\frac{1}{6}a_1x^3 + \frac{1}{3}a_2x^4 + \cdots\right) & \vdots \\
+ & \left(\frac{1}{24}a_1x^4 + \cdots\right) & \\
+ & (a_0 + a_1x + \mathbf{a_2x^2} + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) & 1 \cdot \Sigma\, a_n x^n \\
+ & (\mathbf{a_0x^2} + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots) = 0 . & x^2 \cdot \Sigma\, a_n x^n
\end{array}$$

Al agrupar las potencias semejantes de x en la ecuación (13) (por ejemplo, los términos x^2 aparecen en **negritas**) y luego igualar los coeficientes a cero, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rl}
2a_2 + a_1 + a_0 = 0 & (\text{término } x^0) , \\
6a_3 + 2a_2 + 2a_1 = 0 & (\text{término } x^1) , \\
\mathbf{12a_4 + 3a_3 + 3a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0 = 0} & (\textbf{término } \mathbf{x^2}) , \\
20a_5 + 4a_4 + 4a_3 + a_2 + \frac{7}{6}a_1 = 0 & (\text{término } x^3) , \\
30a_6 + 5a_5 + 5a_4 + \frac{3}{2}a_3 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{1}{24}a_1 = 0 & (\text{término } x^4) .
\end{array}$$

Las condiciones iniciales en (10) implican que $y(0) = a_0 = 1$ y $y'(0) = a_1 = 0$. Usamos es-

tos valores de a_0 y a_1 para hallar a_2, luego a_3, y así sucesivamente:

$$2a_2 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} ,$$

$$6a_3 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} ,$$

$$12a_4 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 0 + 1 = 0 \Rightarrow a_4 = 0 ,$$

$$20a_5 + 0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 0 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{1}{120} ,$$

$$30a_6 - \frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 0 = 0 \Rightarrow a_6 = \frac{11}{720} .$$

Así, la solución del problema con valores iniciales en (10) es

(14) $$y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{11}{720}x^6 + \cdots . \blacksquare$$

Hasta ahora hemos usado el método de series de potencias sólo para ecuaciones homogéneas. Pero podemos aplicar el mismo método, con obvias modificaciones, a las ecuaciones no homogéneas de la forma

(15) $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) ,$$

siempre que el término de forzamiento $g(x)$ y las funciones coeficientes sean analíticas en x_0. Por ejemplo, para hallar una serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de

(16) $$y''(x) - xy'(x) - y(x) = \text{sen } x ,$$

usamos la sustitución $y(x) = Sa_nx^n$ para obtener un desarrollo en serie de potencias para el lado izquierdo de (16). Luego igualamos los coeficientes de esta serie con los coeficientes correspondientes del desarrollo de Maclaurin para sen x:

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} x^{2n+1} .$$

Después de hacer los detalles (véase el problema 20), un desarrollo para una solución general de (16) es

(17) $$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x) + y_p(x) ,$$

donde

(18) $$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \cdots ,$$

(19) $$y_2(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{105}x^7 + \cdots$$

son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (16) y

(20) $$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{19}{5040}x^7 + \cdots$$

es una solución particular de la ecuación (16).

EJERCICIOS 8.4

En los problemas 1 a 6, determine un valor mínimo para el radio de convergencia de una solución en serie de potencias en torno de x_0.

1. $(x+1)y'' - 3xy' + 2y = 0 \;; \quad x_0 = 1 \;.$

2. $y'' - xy' - 3y = 0 \;; \quad x_0 = 2 \;.$

3. $(1 + x + x^2)y'' - 3y = 0 \;; \quad x_0 = 1 \;.$

4. $(x^2 - 5x + 6)y'' - 3xy' - y = 0 \;; \quad x_0 = 0 \;.$

5. $y'' - (\tan x)y' + y = 0 \;; \quad x_0 = 0 \;.$

6. $(1 + x^3)y'' - xy' + 3x^2y = 0 \;; \quad x_0 = 1 \;.$

En los problemas 7 a 12, determine al menos los cuatro primeros términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de x_0 para una solución general de la ecuación diferencial dada con el valor indicado para x_0.

7. $y' + 2(x-1)y = 0 \;; \quad x_0 = 1 \;.$

8. $y' - 2xy = 0 \;; \quad x_0 = -1 \;.$

9. $(x^2 - 2x)y'' + 2y = 0 \;; \quad x_0 = 1 \;.$

10. $x^2y'' - xy' + 2y = 0 \;; \quad x_0 = 2 \;.$

11. $x^2y'' - y' + y = 0 \;; \quad x_0 = 2 \;.$

12. $y'' + (3x - 1)y' - y = 0 \;; \quad x_0 = -1 \;.$

En los problemas 13 a 19, determine al menos los cuatro primeros términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias de la solución al problema con valores iniciales dado.

13. $x' + (\operatorname{sen} t)x = 0 \;; \quad x(0) = 1 \;.$

14. $y' - e^xy = 0 \;; \quad y(0) = 1 \;.$

15. $(x^2 + 1)y'' - e^xy' + y = 0 \;;$
$y(0) = 1 \;, \quad y'(0) = 1 \;.$

16. $y'' + ty' + e^ty = 0 \;;$
$y(0) = 0 \;, \quad y'(0) = -1 \;.$

17. $y'' - (\operatorname{sen} x)y = 0 \;;$
$y(\pi) = 1 \;, \quad y'(\pi) = 0 \;.$

18. $y'' - (\cos x)y' - y = 0 \;;$
$y(\pi/2) = 1 \;, \quad y'(\pi/2) = 1 \;.$

19. $y'' - e^{2x}y' + (\cos x)y = 0 \;;$
$y(0) = -1 \;, \quad y'(0) = 1 \;.$

20. Para deducir la solución general dada por las ecuaciones (17)-(20) para la ecuación no homogénea (16), siga estos pasos:

(a) Sustituya $y(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ y la serie de Maclaurin para sen x en la ecuación (16) para obtener

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)a_k\right]x^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \;.$$

(b) Iguale los coeficientes de potencias semejantes de x en ambos lados de la ecuación de la parte (a) y deduzca con ello las ecuaciones

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \;, \quad a_3 = \frac{1}{6} + \frac{a_1}{3} \;, \quad a_4 = \frac{a_0}{8} \;,$$
$$a_5 = \frac{1}{40} + \frac{a_1}{15} \;, \quad a_6 = \frac{a_0}{48} \;,$$
$$a_7 = \frac{19}{5040} + \frac{a_1}{105} \;.$$

(c) Muestre que las relaciones de la parte (b) proporcionan la solución general de (16) dada en las ecuaciones (17)-(20).

En los problemas 21 a 28, use el procedimiento ilustrado en el problema 20 para hallar al menos los cuatro primeros términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ de una solución general para la ecuación diferencial dada.

21. $y' - xy = \operatorname{sen} x \;.$

22. $w' + xw = e^x \;.$

23. $z'' + xz' + z = x^2 + 2x + 1 \;.$

24. $y'' - 2xy' + 3y = x^2 \;.$

25. $(1 + x^2)y'' - xy' + y = e^{-x} \;.$

26. $y'' - xy' + 2y = \cos x \;.$

27. $(1 - x^2)y'' - y' + y = \tan x \;.$

28. $y'' - (\operatorname{sen} x)y = \cos x \;.$

29. La ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \;,$$

donde n es un parámetro no especificado, es llamada **ecuación de Legendre**. Esta ecuación aparece en aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a física e ingeniería.

(a) Determine un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución de la ecuación de Legendre.

(b) Muestre que para un entero no negativo n, existe un polinomio de grado n que es solución de la

ecuación de Legendre. Estos polinomios, salvo un múltiplo constante, se llaman **polinomios de Legendre**.

(c) Determine los tres primeros polinomios de Legendre (salvo un múltiplo constante).

30. Resorte vencido. Cuando se vence un resorte, el valor de su "constante" de resorte decrece. Un modelo para un sistema masa-resorte con un resorte vencido es

$$mx''(t) + bx'(t) + ke^{-\eta t}x(t) = 0 \ ,$$

donde m es la masa, b la constante de amortiguamiento, k y η son constantes positivas, y $x(t)$ es el desplazamiento del resorte con respecto de la posición de equilibrio. Sean $m = 1$ kg, $b = 2$ N-s/m, $k = 1$ N/m y $\eta = 1(\mathrm{s})^{-1}$. El sistema se pone en movimiento desplazando la masa un metro con respecto de su posición de equilibrio y luego se libera ($x(0) = 1$, $x'(0) = 0$). Determine al menos los cuatro primeros términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $t = 0$ para el desplazamiento.

31. Resorte vencido sin amortiguamiento. En el sistema masa-resorte para un resorte vencido analizado en el problema 30, suponga que no hay amortiguamiento (es decir, $b = 0$), $m = 1$ y $k = 1$. Para ver el efecto del desgaste en el resorte, considere a η como un parámetro positivo.

(a) Vuelva a resolver el problema 30 con $b = 0$ y η arbitrario pero fijo.

(b) Haga $\eta = 0$ en el desarrollo obtenido en la parte (a). ¿Coincide este desarrollo con el de la solución al problema con $\eta = 0$? [*Sugerencia*: Cuando $\eta = 0$, la solución es $x(t) = \cos t$].

8.5 REVISIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAUCHY-EULER (EQUIDIMENSIONALES)

En las secciones anteriores consideramos métodos para obtener soluciones en serie de potencias en torno de un punto ordinario para una ecuación lineal de segundo orden. Sin embargo, en ciertos casos quisiéramos obtener un desarrollo en serie en torno de un *punto singular* de la ecuación. Para motivar un procedimiento para hallar tales desarrollos, regresemos a las **ecuaciones de Cauchy-Euler**. En el ejercicio 4.3, problema 38, resolvimos estas ecuaciones haciendo el cambio de variable $x = e^t$, que transforma una ecuación de Cauchy-Euler en una ecuación con coeficientes constantes. Sin embargo, es más instructivo para nuestro estudio de los desarrollos en serie en torno de puntos singulares trabajar directamente con la variable x.

Recuerde que una ecuación de Cauchy-Euler homogénea de segundo orden tiene la forma

$$\textbf{(1)} \qquad \boldsymbol{ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \ , \quad x > 0},$$

donde a $(\neq 0)$, b y c son constantes (reales). Como en este caso $p(x) = b/(ax)$ y $q(x) = c/(ax^2)$, tenemos que $x = 0$ es un punto singular de (1).

La ecuación (1) tiene soluciones de la forma $y = x^r$. Para determinar los valores de r, podemos hacer lo siguiente. Sea L el operador diferencial definido por el lado izquierdo de la ecuación (1), es decir,

$$\textbf{(2)} \qquad L[y](x) := ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) \ ,$$

y hacemos

$$\textbf{(3)} \qquad w(r, x) := x^r \ .$$

Al sustituir $w(r, x)$ en vez de $y(x)$ en (2), vemos que

$$\begin{aligned} L[w](x) &= ax^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r \\ &= \{ar^2 + (b-a)r + c\}x^r \ . \end{aligned}$$

De aquí vemos que $w = x^r$ es una solución de (1) si y sólo si r satisface

(4) $$ar^2 + (b - a)r + c = 0 \ .$$

La ecuación (4) es la **ecuación auxiliar**, o **indicial**, de (1).

Cuando la ecuación indicial tiene dos raíces distintas, tenemos

$$L[w](x) = a(r - r_1)(r - r_2)x^r \ ,$$

lo cual implica que la ecuación (1) tiene las dos soluciones

(5) $$y_1(x) = w(r_1, x) = x^{r_1} \ , \qquad x > 0 \ ,$$

(6) $$y_2(x) = w(r_2, x) = x^{r_2} \ , \qquad x > 0 \ ,$$

que son linealmente independientes.

Cuando r_1 y r_2 son complejos conjugados, $\alpha \pm i\beta$, podemos usar la fórmula de Euler para expresar

$$\begin{aligned} x^{\alpha + i\beta} &= e^{(\alpha + i\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x}\cos(\beta \ln x) + ie^{\alpha \ln x}\operatorname{sen}(\beta \ln x) \\ &= x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) + ix^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta \ln x) \ . \end{aligned}$$

Como las partes real e imaginaria de $x^{\alpha + i\beta}$ también deben ser soluciones de (1), podemos reemplazar (5) y (6) por las dos soluciones con valores reales, linealmente independientes

$$y_1(x) = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \ , \qquad y_2(x) = x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta \ln x) \ .$$

Si la ecuación indicial (4) tiene una raíz real repetida r_0, se puede ver que x^{r_0} y $x^{r_0} \ln x$ son dos soluciones linealmente independientes. Esto se puede deducir con el método de reducción de orden del ejercicio 6.1, problema 31. Sin embargo, es más instructivo para aplicaciones posteriores ver cómo se pueden obtener estas dos soluciones linealmente independientes con el punto de vista de los operadores. Si r_0 es una raíz repetida, entonces

(7) $$L[w](x) = a(r - r_0)^2 x^r \ .$$

Al hacer $r = r_0$ tenemos la solución

(8) $$y_1(x) = w(r_0, x) = x^{r_0} \ , \qquad x > 0 \ .$$

Para determinar una segunda solución linealmente independiente, observemos lo siguiente. El lado derecho de (7) tiene el factor $(r - r_0)^2$, de modo que al considerar la derivada parcial de (7) con respecto de r y hacer $r = r_0$, obtenemos un *cero*. Es decir,

(9) $$\frac{\partial}{\partial r}\{L[w](x)\}\bigg|_{r=r_0} = \{a(r - r_0)^2 x^r \ln x + 2a(r - r_0)x^r\}\bigg|_{r=r_0} = 0 \ .$$

Aunque no parece que hayamos avanzado hacia una segunda solución, una observación detallada de la expresión de la izquierda en (9) reivindicará nuestros esfuerzos.

Observemos primero que $w(r, x) = x^r$ tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes con respecto de r y x. Por lo tanto, las derivadas parciales cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial r} \ , \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial r} \ .$$

En consecuencia, para el operador diferencial L tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}L[w] &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{ax^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\frac{\partial w}{\partial x} + cw\right\}\\ &= ax^2\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial x^2} + bx\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial x} + c\frac{\partial w}{\partial r}\\ &= ax^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial r} + bx\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial r} + c\frac{\partial w}{\partial r}\\ &= L\left[\frac{\partial w}{\partial r}\right] ;\end{aligned}$$

es decir, los operadores $\partial/\partial r$ y L se conmutan. Con este hecho, podemos escribir (9) como

$$L\left[\frac{\partial w}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=r_0} = 0 .$$

Así, para el caso de una raíz repetida r_0, una segunda solución linealmente independiente de (1) es

(10) $$y_2(x) = \frac{\partial w}{\partial r}(r_0, x) = \frac{\partial}{\partial r}(x^r)\bigg|_{r=r_0} = x^{r_0}\ln x , \qquad x > 0 .$$

EJEMPLO 1 Hallar una solución general de

(11) $$4x^2y''(x) + y(x) = 0 , \qquad x > 0 .$$

SOLUCIÓN Sea $w(r, x) = x^r$ y hagamos que L denote el lado izquierdo de (11). Un breve cálculo implica

$$L[w](x) = (4r^2 - 4r + 1)x^r .$$

Resolvemos la ecuación indicial

$$4r^2 - 4r + 1 = (2r - 1)^2 = 4\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

al obtener la raíz repetida $r_0 = 1/2$. Así, se tiene una solución general de (11) de las ecuaciones (8) y (10) haciendo $r_0 = 1/2$. Es decir,

$$y(x) = C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{x}\ln x , \qquad x > 0 . \ \blacksquare$$

Para concluir observemos que las soluciones de las ecuaciones de Cauchy-Euler pueden exhibir algunas características extraordinarias cerca de sus puntos singulares, muy distintas a las que hemos encontrado en el caso de las ecuaciones con coeficientes constantes. Note que:

(i) x^r y $x^r \ln x$, para $0 < r < 1$, tienen pendiente infinita en el origen;

(ii) x^r, para $r < 0$, diverge en el origen, y

(iii) $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ y $x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$ oscilan “con rapidez infinita” cerca del origen. (Véase la figura 8.7).

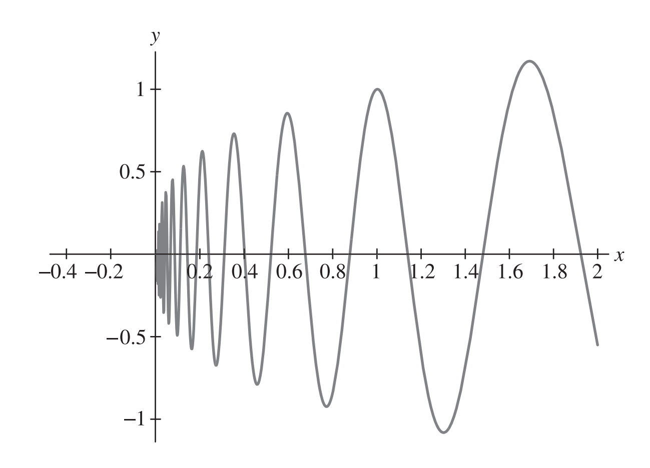


Figura 8.7 Gráfica de $x^{0.3}\cos(12 \ln x)$

Los paquetes numéricos para resolver ecuaciones diferenciales con base en los procedimientos de Euler o Runge-Kutta no podrían graficar este comportamiento; los métodos analíticos son esenciales para caracterizar las soluciones cerca de los puntos singulares.

En la sección 8.7 analizaremos el problema de determinar una segunda solución *en serie* linealmente independiente para ciertas ecuaciones diferenciales. Como veremos, los métodos con operadores similares a los descritos en esta sección nos conducirán a la deseada segunda solución.

EJERCICIOS 8.5

En los problemas 1 a 10, use la sustitución $y = x^r$ para hallar una solución general de la ecuación dada para $x > 0$.

1. $x^2y''(x) + 6xy'(x) + 6y(x) = 0$.

2. $2x^2y''(x) + 13xy'(x) + 15y(x) = 0$.

3. $x^2y''(x) - xy'(x) + 17y(x) = 0$.

4. $x^2y''(x) + 2xy'(x) - 3y(x) = 0$.

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{5}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{13}{x^2}y$.

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x^2}y$.

7. $x^3y'''(x) + 4x^2y''(x) + 10xy'(x) - 10y(x) = 0$.

8. $x^3y'''(x) + 4x^2y''(x) + xy'(x) = 0$.

9. $x^3y'''(x) + 3x^2y''(x) + 5xy'(x) - 5y(x) = 0$.

10. $x^3y'''(x) + 9x^2y''(x) + 19xy'(x) + 8y(x) = 0$.

En los problemas 11 y 12, use una sustitución de la forma $y = (x - c)^r$ para hallar una solución general de la ecuación dada para $x > c$.

11. $2(x - 3)^2y''(x) + 5(x - 3)y'(x) - 2y(x) = 0$.

12. $4(x + 2)^2y''(x) + 5y(x) = 0$.

En los problemas 13 y 14, use variación de parámetros para hallar una solución general de la ecuación dada para $x > 0$.

13. $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^{-1/2}$.

14. $x^2y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 6x^{-2} + 3x$.

En los problemas 15 a 17, resuelva el problema con valores iniciales dado.

15. $t^2x''(t) - 12x(t) = 0$;
$x(1) = 3$, $x'(1) = 5$.

16. $x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = 0$;
$y(1) = 3$, $y'(1) = 7$.

17. $x^3y'''(x) + 6x^2y''(x) + 29xy'(x) - 29y(x) = 0$;
$y(1) = 2$, $y'(1) = -3$, $y''(1) = 19$.

18. Cuando r_0 es una raíz repetida de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$, entonces $y_1(t) = e^{r_0 t}$ es una solución de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$, donde a, b y c son constantes. Use una deducción similar a la de esta sección para el caso en que la ecuación indicial tiene una raíz repetida para mostrar que una segunda solución linealmente independiente es $y_2(t) = te^{r_0 t}$.

19. Sea $L[y](x) := x^3 y'''(x) + xy'(x) - y(x)$.

(a) Muestre que $L[x^r](x) = (r - 1)^3 x^r$.

(b) Use una extensión del argumento dado en esta sección para el caso en que la ecuación indicial tiene una raíz doble y muestre que $L[y] = 0$ tiene la solución general

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x (\ln x)^2 .$$

8.6 MÉTODO DE FROBENIUS

En la sección anterior mostramos que una ecuación homogénea de Cauchy-Euler tiene una solución de la forma $y(x) = x^r$, $x > 0$, donde r es cierta constante. Las ecuaciones de Cauchy-Euler tienen, por supuesto, una forma muy particular, con un único punto singular (en $x = 0$). En esta sección mostraremos que la teoría de ecuaciones de Cauchy-Euler se puede generalizar a otras ecuaciones con un tipo particular de singularidad.

Para motivar el procedimiento, escribamos la ecuación de Cauchy-Euler

(1) $$ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 , \qquad x > 0 ,$$

en la forma canónica

(2) $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 , \qquad x > 0 ,$$

donde

$$p(x) = \frac{p_0}{x} , \qquad q(x) = \frac{q_0}{x^2} ,$$

y p_0, q_0 son las constantes b/a y c/a, respectivamente. Al sustituir $w(r, x) = x^r$ en vez de y en la ecuación (2) obtenemos

$$[r(r - 1) + p_0 r + q_0]x^{r-2} = 0 ,$$

lo que da la ecuación indicial

(3) $$r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0 .$$

Así, si r_1 es una raíz de (3), entonces $w(r_1, x) = x^{r_1}$ es solución de las ecuaciones (1) y (2).

Supongamos ahora, de manera más general, que (2) es una ecuación para la que $xp(x)$ y $x^2 q(x)$, en vez de constantes, son *funciones analíticas*. Es decir, en cierto intervalo en torno de $x = 0$,

(4) $$xp(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n ,$$

(5) $$x^2 q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n .$$

(4) y (5) implican que

(6) $$\lim_{x \to 0} xp(x) = p_0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = q_0 ,$$

y por tanto, para x cercana a 0, tenemos $xp(x) \approx p_0$ y $x^2q(x) \approx q_0$. Por lo tanto, es razonable esperar que las soluciones de (2) se comporten (para x cercana a 0) como las soluciones de la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \ .$$

Si $p(x)$ y $q(x)$ satisfacen (4) y (5), decimos que el punto singular en $x = 0$ es regular. Más en general, establecemos lo siguiente.

PUNTO SINGULAR REGULAR

Definición 3. Un punto singular x_0 de

(7) $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

es un **punto singular regular** si $(x - x_0)p(x)$ y $(x - x_0)^2q(x)$ son analíticas en x_0.† En caso contrario, x_0 es un **punto singular irregular**.

EJEMPLO 1 Clasificar los puntos singulares de la ecuación

(8) $$(x^2 - 1)^2y''(x) + (x + 1)y'(x) - y(x) = 0 \ .$$

SOLUCIÓN En este caso

$$p(x) = \frac{x+1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} \ ,$$

$$q(x) = \frac{-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2(x-1)^2} \ ,$$

se puede observar que ± 1 son los puntos singulares de (8). Para la singularidad en 1, tenemos

$$(x - 1)p(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)} \ ,$$

que no es analítica en $x = 1$. Por lo tanto, $x = 1$ es un punto singular irregular.

Para la singularidad en -1, tenemos

$$(x + 1)p(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \ , \qquad (x + 1)^2q(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \ ,$$

que son analíticas en $x = -1$. Por lo tanto, $x = -1$ es un punto singular regular. ■

Supongamos que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (7) de modo que $p(x)$ y $q(x)$ satisfacen (4) y (5); es decir,

(9) $$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} \ , \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{n-2} \ .$$

La idea del matemático Frobenius fue que, como las ecuaciones de Cauchy-Euler tienen so-

---

†En la terminología de variable compleja, p tiene un polo de orden a lo más 1 y q tiene un polo de orden a lo más 2 en x_0.

luciones de la forma x^r, entonces para el punto singular regular $x = 0$ deben existir soluciones de (7) de la forma x^r *por una función analítica*.† Por lo tanto, buscamos soluciones de (7) de la forma

(10) $$w(r,x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} , \qquad x > 0 .$$

Al escribir (10) hemos supuesto que a_0 es el primer coeficiente distinto de cero, de modo que debemos determinar r y los coeficientes a_n, $n \geq 1$. Derivamos $w(r, x)$ con respecto de x para obtener

(11) $$w'(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} ,$$

(12) $$w''(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} .$$

Si sustituimos los desarrollos anteriores para $w(r, x)$, $w'(r, x)$, $w''(r, x)$, $p(x)$ y $q(x)$ en (7), tenemos que

(13) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{n-2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) = 0 .$$

Ahora usamos el producto de Cauchy para realizar la multiplicación de las series y luego agrupamos las potencias semejantes de x, a partir de la potencia menor, x^{r-2}, de donde

(14) $$[r(r-1) + p_0 r + q_0]a_0 x^{r-2} + [(r+1)ra_1 + (r+1)p_0 a_1 + p_1 r a_0 + q_0 a_1 + q_1 a_0]x^{r-1} + \cdots = 0 .$$

Para que el desarrollo del lado izquierdo de la ecuación (14) sume cero, cada coeficiente debe ser igual a cero. Al considerar el primer término x^{r-2}, tenemos

(15) $$[r(r-1) + p_0 r + q_0]a_0 = 0 .$$

Como hemos supuesto que $a_0 \neq 0$, la cantidad entre corchetes debe anularse. Esto nos da la ecuación indicial igual a la deducida para las ecuaciones de Cauchy-Euler.

ECUACIÓN INDICIAL

Definición 4. Si x_0 es un punto singular regular de $y'' + py' + qy = 0$, entonces la **ecuación indicial** para este punto es

(16) $$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 ,$$

donde

$$p_0 := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)p(x) , \qquad q_0 := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) .$$

Las raíces de la ecuación indicial son los **exponentes** (**índices**) de la singularidad x_0.

†***Nota histórica:*** George Frobenius (1848-1917) desarrolló este método en 1873. También se le conoce por sus investigaciones en teoría de grupos.

EJEMPLO 2 Hallar la ecuación indicial y los exponentes en la singularidad $x = -1$ de

(17) $$(x^2 - 1)^2 y''(x) + (x + 1)y'(x) - y(x) = 0 \ .$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 mostramos que $x = -1$ es un punto singular regular. Como $p(x) = (x + 1)^{-1}(x - 1)^{-2}$ y $q(x) = -(x + 1)^{-2}(x - 1)^{-2}$, tenemos

$$p_0 = \lim_{x \to -1} (x + 1)p(x) = \lim_{x \to -1} (x - 1)^{-2} = \frac{1}{4} \ ,$$

$$q_0 = \lim_{x \to -1} (x + 1)^2 q(x) = \lim_{x \to -1} \left[-(x - 1)^{-2} \right] = -\frac{1}{4} \ .$$

Al sustituir estos valores para p_0 y q_0 en (16), obtenemos la ecuación indicial

(18) $$r(r - 1) + \frac{1}{4}r - \frac{1}{4} = 0 \ .$$

Multiplicamos por 4 y factorizamos para obtener $(4r + 1)(r - 1) = 0$. Por lo tanto, $r = 1$, $-1/4$ son los exponentes. ■

Como hemos visto, podemos usar la ecuación indicial para determinar los valores de r para los que el coeficiente de x^{r-2} en (14) se anula. Si igualamos a cero el coeficiente de x^{r-1} en (14), tenemos

(19) $$\left[(r + 1)r + (r + 1)p_0 + q_0 \right] a_1 + (p_1 r + q_1) a_0 = 0 \ .$$

Como a_0 es arbitrario y conocemos p_i, q_i y r, podemos determinar a_1 en la ecuación (19), siempre que el coeficiente de a_1 en (19) no sea cero. Esto ocurrirá si consideramos a r como la mayor de las dos raíces de la ecuación indicial (véase el problema 43).† De manera análoga, al igualar a cero el coeficiente de x^r, podemos despejar a_2 en términos de p_i, q_i, r, a_0 y a_1. Si continuamos de esta manera, podemos hallar los a_n de forma recursiva. El procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Determinar un desarrollo en serie en torno del punto singular regular $x = 0$ para una solución de

(20) $$(x + 2)x^2 y''(x) - xy'(x) + (1 + x)y(x) = 0 \ , \qquad x > 0 \ .$$

SOLUCIÓN En este caso, $p(x) = -x^{-1}(x + 2)^{-1}$ y $q(x) = x^{-2}(x + 2)^{-1}(1 + x)$, de modo que

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) = \lim_{x \to 0} \left[-(x + 2)^{-1} \right] = -\frac{1}{2} \ ,$$

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = \lim_{x \to 0} (x + 2)^{-1}(1 + x) = \frac{1}{2} \ .$$

Como $x = 0$ es un punto singular regular, buscamos una solución a (20) de la forma

(21) $$w(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \ .$$

†Surgen varias posibilidades interesantes si consideramos a r como la raíz menor; analizaremos esto en la siguiente sección.

Por el análisis anterior, r debe satisfacer la ecuación indicial (16). Al sustituir p_0 y q_0 en (16) obtenemos

$$r(r-1)-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=0\ ,$$

que simplificamos como $2r^2-3r+1=(2r-1)(r-1)=0$. Así, $r=1$ y $r=1/2$ son las raíces de la ecuación indicial asociada a $x=0$.

Utilicemos la raíz mayor $r=1$; luego calculemos los valores de a_1, a_2, etc., para obtener la solución $w(1, x)$. Podemos simplificar los cálculos sustituyendo $w(r, x)$ directamente en la ecuación (20), donde los coeficientes son polinomios en x, en vez de dividir entre $(x+2)x^2$ y tener que trabajar con las funciones racionales $p(x)$ y $q(x)$. Al insertar $w(r, x)$ en (20) y recordar las fórmulas para $w'(r, x)$ y $w''(r, x)$ en (11) y (12) tenemos (con $r=1$)

(22) $$(x+2)x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n+(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0\ ,$$

lo que podemos escribir como

(23) $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=0\ .$$

A continuación recorremos los índices de modo que cada suma en (23) tenga potencias x^k. Con $k=n+2$ en la primera y última sumas y $k=n+1$ en el resto, (23) se convierte en

(24) $$\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k-1)(k-2)+1\right]a_{k-2}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2k(k-1)-k+1\right]a_{k-1}x^k=0\ .$$

Separamos el término $k=1$ y agrupamos el resto en una suma:

(25) $$\left[2(1)(0)-1+1\right]a_0x+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k^2-3k+3)a_{k-2}+(2k-1)(k-1)a_{k-1}\right]x^k=0\ .$$

Observe que el coeficiente de x en (25) es igual a cero, lo que se debe a que $r=1$ es una raíz de la ecuación indicial, obtenida ésta al igualar a cero el coeficiente de la menor potencia de x.

Ahora podemos determinar los a_k en términos de a_0 igualando a cero los coeficientes de x^k en la ecuación (25) para $k=2, 3$, etc. Esto nos proporciona la relación de recurrencia

(26) $$(k^2-3k+3)a_{k-2}+(2k-1)(k-1)a_{k-1}=0\ ,$$

o, de manera equivalente,

(27) $$a_{k-1}=-\frac{k^2-3k+3}{(2k-1)(k-1)}a_{k-2}\ ,\qquad k\geq 2\ .$$

Al hacer $k = 2$, 3 y 4 en (27), vemos que

$$a_1 = -\frac{1}{3}a_0 \qquad (k = 2) \ ,$$

$$a_2 = -\frac{3}{10}a_1 = \frac{1}{10}a_0 \qquad (k = 3) \ ,$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{30}a_0 \qquad (k = 4) \ .$$

Sustituimos los valores de r, a_1, a_2 y a_3 en (21) para obtener

(28) $$w(1, x) = a_0 x^1 \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{30}x^3 + \cdots \right) ,$$

donde a_0 es arbitrario. En particular, para $a_0 = 1$, obtenemos la solución

$$y_1(x) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{30}x^4 + \cdots \ , \qquad x > 0 \ .$$

Véase la figura 8.8. ■

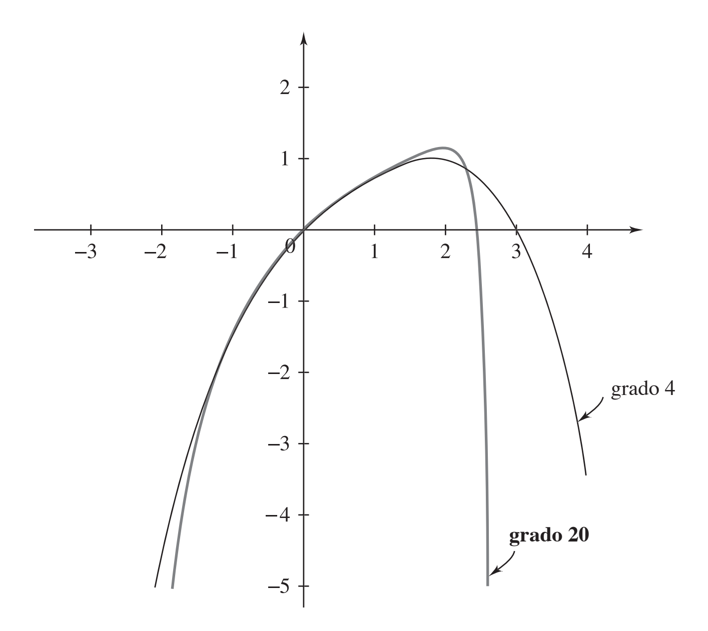


Figura 8.8 Sumas parciales que aproximan la solución $y_1(x)$ del ejemplo 3

Para hallar una segunda solución linealmente independiente de la ecuación (20), tal vez podríamos hacer $r = 1/2$ y hallar $a_1, a_2, \ldots$ para obtener una solución $w(1/2, x)$ (véase el problema 44). En este caso particular, este enfoque funcionará. Sin embargo, si encontramos

una ecuación indicial con una raíz repetida, el método de Frobenius nos dará sólo una solución (salvo múltiplos constantes). Para hallar la deseada segunda solución, debemos usar otra técnica, como el procedimiento de reducción de orden analizado en el ejercicio 6.1, problema 31. En la siguiente sección enfrentaremos el problema de determinar una segunda solución linealmente independiente.

Podemos resumir el método de Frobenius como sigue.

MÉTODO DE FROBENIUS

Para deducir una solución en términos de una serie en torno del punto singular x_0 de

(29) $$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 , \qquad x > x_0 :$$

(a) Haga $p(x) := a_1(x)/a_2(x)$, $q(x) := a_0(x)/a_2(x)$. Si $(x - x_0)p(x)$ y $(x - x_0)^2q(x)$ son analíticas en x_0, entonces x_0 es un punto singular regular y se pueden aplicar los siguientes pasos.

(b) Sea

(30) $$w(r, x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+r} ,$$

y, al derivar término a término, sustituimos $w(r, x)$ en la ecuación (29) para obtener una ecuación de la forma

$$A_0(x - x_0)^{r+J} + A_1(x - x_0)^{r-J+1} + \cdots = 0 .$$

(c) Igualamos los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots$ a cero. [Observe que la ecuación $A_0 = 0$ es justo un múltiplo constante de la ecuación indicial $r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$].

(d) Use el sistema de ecuaciones

$$A_0 = 0 , \quad A_1 = 0 , \quad \ldots , \quad A_k = 0$$

para determinar una relación de recurrencia que implique a_k y $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

(e) Haga $r = r_1$, la raíz mayor de la ecuación indicial, y use la relación obtenida en el paso (d) para determinar $a_1, a_2, \ldots$ de manera recursiva en términos de a_0 y r_1.

(f) Un desarrollo en serie para una solución de (29) es

(31) $$w(r_1, x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n , \qquad x > x_0 ,$$

donde a_0 es arbitrario y los a_n se definen en términos de a_0 y r_1.

Una cuestión importante que queda pendiente es la relativa al radio de convergencia de la serie de potencias que aparece en (31). El siguiente teorema contiene una respuesta.†

†Para una demostración de este teorema, véase *Ordinary Differential Equations*, por E. L. Ince (Dover Publications, Inc., Nueva York, 1956), capítulo 16.

TEOREMA DE FROBENIUS

Teorema 6. Si x_0 es un punto singular regular de la ecuación (29), entonces existe al menos una solución en términos de una serie de la forma (30), donde $r = r_1$ es la mayor de las raíces de la ecuación indicial asociada. Además, esta serie converge para toda x tal que $0 < x - x_0 < R$, donde R es la distancia de x_0 al otro punto singular más cercano (real o complejo) de (29).

Para simplificar la exposición, en los siguientes ejemplos sólo consideraremos desarrollos en serie en torno del punto singular regular $x = 0$ y sólo aquellas ecuaciones para las que la ecuación indicial correspondiente tiene raíces reales.

Los siguientes tres ejemplos no sólo ilustran el método de Frobenius sino que son modelos importantes a los que nos referiremos en secciones posteriores.

EJEMPLO 4 Determinar una solución en términos de una serie en torno del punto singular regular $x = 0$ de

(32) $$x^2y''(x) - xy'(x) + (1 - x)y(x) = 0 , \qquad x > 0 .$$

SOLUCIÓN En este caso, $p(x) = -x^{-1}$ y $q(x) = (1 - x)x^{-2}$. Es fácil verificar que $x = 0$ es un punto singular regular de (32), de modo que calculamos

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1 ,$$
$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0}(1 - x) = 1 .$$

La ecuación indicial es

$$r(r - 1) - r + 1 = r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0 .$$

que tiene las raíces $r_1 = r_2 = 1$.

A continuación, sustituimos

(33) $$w(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

en (32) y obtenemos

(34) $$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1}$$
$$+ (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 ,$$

lo que escribimos como

(35) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0 .$$

Recorremos los índices de modo que cada suma en (35) quede en términos de potencias x^{k+r},

haciendo $k = n + 1$ en la última suma y $k = n$ en el resto. Esto implica

(36) $$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r)(k+r-1)-(k+r)+1\right]a_k x^{k+r} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^{k+r} = 0 \ .$$

Separamos el término correspondiente a $k = 0$ y agrupamos el resto bajo una suma para obtener

(37) $$\left[r(r-1)-r+1\right]a_0 x^r + \sum_{k=1}^{\infty}\{\left[(k+r)(k+r-1)-(k+r)+1\right]a_k - a_{k-1}\}x^{k+r} = 0 \ .$$

Al igualar a cero los coeficientes, recuperamos la ecuación indicial

(38) $$\left[r(r-1)-r+1\right]a_0 = 0 \ ,$$

y obtenemos, para $k \geq 1$, la relación de recurrencia

(39) $$\left[(k+r)^2 - 2(k+r)+1\right]a_k - a_{k-1} = 0 \ ,$$

lo que se reduce a

(40) $$(k+r-1)^2 a_k - a_{k-1} = 0 \ .$$

Podemos usar la relación (40) para hallar a_k en términos de a_{k-1}:

(41) $$a_k = \frac{1}{(k+r-1)^2}a_{k-1} \ , \qquad k \geq 1 \ .$$

Al hacer $r = r_1 = 1$ en (38) obtenemos (como era de esperar) $0 \cdot a_0 = 0$ y en (41) tenemos

(42) $$a_k = \frac{1}{k^2}a_{k-1} \ , \qquad k \geq 1 \ .$$

Para $k = 1$, 2 y 3 tenemos

$$a_1 = \frac{1}{1^2}a_0 = a_0 \qquad (k=1) \ ,$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2}a_1 = \frac{1}{(2\cdot 1)^2}a_0 = \frac{1}{4}a_0 \qquad (k=2) \ ,$$

$$a_3 = \frac{1}{3^2}a_2 = \frac{1}{(3\cdot 2\cdot 1)^2}a_0 = \frac{1}{36}a_0 \qquad (k=3) \ .$$

En general, tenemos

(43) $$a_k = \frac{1}{(k!)^2}a_0 \ .$$

Por lo tanto, la ecuación (32) tiene una solución en términos de una serie dada por

(44) $$w(1,x) = a_0 x\left\{1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \cdots\right\}$$

$$= a_0 x \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}x^k \ , \qquad x > 0 \ . \ \blacksquare$$

Como $x = 0$ es el único punto singular para la ecuación (32), el teorema de Frobenius (o el criterio del cociente) implica que la solución en términos de una serie (44) converge para toda $x > 0$.

En los dos ejemplos siguientes, sólo bosquejamos el método e invitamos al lector a proporcionar los pasos intermedios.

EJEMPLO 5 Determinar una solución desde el punto de vista de una serie en torno del punto singular regular $x = 0$ de

(45) $$xy''(x) + 4y'(x) - xy(x) = 0 , \qquad x > 0 .$$

SOLUCIÓN Como $p(x) = 4/x$ y $q(x) = -1$, vemos que $x = 0$ es un punto singular regular y

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) = 4 , \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = 0 .$$

La ecuación indicial es

$$r(r-1) + 4r = r^2 + 3r = r(r+3) = 0 ,$$

con raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = -3$.

Ahora sustituimos

(46) $$w(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

en (45). Después de un poco de álgebra y de recorrer los índices, obtenemos

(47) $$[r(r-1) + 4r]a_0 x^{r-1} + [(r+1)r + 4(r+1)]a_1 x^r + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+r+1)(k+r+4)a_{k+1} - a_{k-1}]x^{k+r} = 0 .$$

A continuación igualamos los coeficientes a cero y vemos que

(48) $$[r(r-1) + 4r]a_0 = 0 ,$$

(49) $$[(r+1)r + 4(r+1)]a_1 = 0 ,$$

y para $k \geq 1$, tenemos la relación de recurrencia

(50) $$(k+r+1)(k+r+4)a_{k+1} - a_{k-1} = 0 .$$

Para $r = r_1 = 0$, la ecuación (48) se convierte en $0 \cdot a_0 = 0$ y (49) se convierte en $4 \cdot a_1 = 0$. Por lo tanto, aunque a_0 es arbitrario, a_1 debe anularse. Al hacer $r = r_1 = 0$ en (50), vemos que

(51) $$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+4)} a_{k-1} , \qquad k \geq 1 ,$$

lo que implica (después de unos cuantos cálculos experimentales) que $a_{2k+1} = 0$ para $k = 0,1 \ldots ,$ y

(52) $$a_{2k} = \frac{1}{[2 \cdot 4 \cdots (2k)][5 \cdot 7 \cdots (2k+3)]} a_0 = \frac{1}{2^k k! [5 \cdot 7 \cdots (2k+3)]} a_0 , \qquad k \geq 1 .$$

Por lo tanto, la ecuación (45) tiene una solución en serie de potencias

(53) $$w(0, x) = a_0 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k! [5 \cdot 7 \cdots (2k+3)]} x^{2k} \right\} , \qquad x > 0 \ . \ \blacksquare$$

Si en el ejemplo 5 hubiésemos trabajado con la raíz $r = r_2 = -3$, habríamos obtenido *dos* soluciones linealmente independientes (véase el problema 45).

EJEMPLO 6 Determinar una solución en términos de una serie en torno del punto singular regular $x = 0$ de

(54) $$xy''(x) + 3y'(x) - xy(x) = 0 \ , \qquad x > 0 \ .$$

SOLUCIÓN Como $p(x) = 3/x$ y $q(x) = -1$, vemos que en efecto $x = 0$ es un punto singular regular. Además,

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) = 3 \ , \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = 0 \ .$$

De modo que la ecuación indicial es

(55) $$r(r-1) + 3r = r^2 + 2r = r(r+2) = 0 \ ,$$

con raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$.

Sustituimos

(56) $$w(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

en (54) para obtener

(57) $$[r(r-1) + 3r] a_0 x^{r-1} + [(r+1)r + 3(r+1)] a_1 x^r + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+r+1)(k+r+3) a_{k+1} - a_{k-1}] x^{k+r} = 0 \ .$$

Al igualar a cero los coeficientes tenemos

(58) $$[r(r-1) + 3r] a_0 = 0 \ ,$$

(59) $$[(r+1)r + 3(r+1)] a_1 = 0 \ ,$$

y para $k \geq 1$, la relación de recurrencia

(60) $$(k+r+1)(k+r+3) a_{k+1} - a_{k-1} = 0 \ .$$

Para $r = r_1 = 0$, estas ecuaciones conducen a las siguientes fórmulas: $a_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, y

(61) $$a_{2k} = \frac{1}{[2 \cdot 4 \cdots (2k)][4 \cdot 6 \cdots (2k+2)]} a_0 = \frac{1}{2^{2k} k! (k+1)!} a_0 \ , \qquad k \geq 0.$$

Por lo tanto, la ecuación (54) tiene una solución en serie de potencias

(62) $$w(0, x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} k! (k+1)!} x^{2k} \ , \qquad x > 0 \ . \ \blacksquare$$

A diferencia del ejemplo 5, si trabajamos con la segunda raíz $r = r_2 = -2$ del ejemplo 6, *no* obtendríamos una segunda solución linealmente independiente (véase el problema 46).

En los ejemplos anteriores podríamos usar el método de Frobenius para hallar una solución en términos de una serie válida a la derecha $(x > 0)$ del punto singular regular $x = 0$. Para $x < 0$, podemos usar el cambio de variable $x = -t$ y luego resolver la ecuación resultante para $t > 0$.

El método de Frobenius también se aplica a ecuaciones lineales de orden superior (véanse los problemas 35-38).

EJERCICIOS 8.6

En los problemas 1 a 10, clasifique cada punto singular (real o complejo) de la ecuación dada como regular o irregular:

1. $(x^2 - 1)y'' + xy' + 3y = 0$.

2. $x^2y'' + 8xy' - 3xy = 0$.

3. $(x^2 + 1)z'' + 7x^2z' - 3xz = 0$.

4. $x^2y'' - 5xy' + 7y = 0$.

5. $(x^2 - 1)^2y'' - (x - 1)y' + 3y = 0$.

6. $(x^2 - 4)y'' + (x + 2)y' + 3y = 0$.

7. $(t^2 - t - 2)^2x'' + (t^2 - 4)x' - tx = 0$.

8. $(x^2 - x)y'' + xy' + 7y = 0$.

9. $(x^2 + 2x - 8)^2y'' + (3x + 12)y' - x^2y = 0$.

10. $x^3(x - 1)y'' + (x^2 - 3x)(\operatorname{sen} x)y' - xy = 0$.

En los problemas 11 a 18, determine la ecuación indicial y los exponentes para la singularidad indicada para la ecuación diferencial dada.

11. $x^2y'' - 2xy' - 10y = 0$, en $x = 0$.

12. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$, en $x = 0$.

13. $(x^2 - x - 2)^2z'' + (x^2 - 4)z' - 6xz = 0$, en $x = 2$.

14. $(x^2 - 4)y'' + (x + 2)y' + 3y = 0$, en $x = -2$.

15. $\theta^3y'' + \theta(\operatorname{sen}\theta)y' - (\tan\theta)y = 0$, en $\theta = 0$.

16. $(x^2 - 1)y'' - (x - 1)y' - 3y = 0$, en $x = 1$.

17. $(x - 1)^2y'' + (x^2 - 1)y' - 12y = 0$, en $x = 1$.

18. $4x(\operatorname{sen} x)y'' - 3y = 0$, en $x = 0$.

En los problemas 19 a 24, use el método de Frobenius para hallar al menos los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución de la ecuación dada, con $x > 0$.

19. $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$.

20. $2x(x - 1)y'' + 3(x - 1)y' - y = 0$.

21. $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$.

22. $xy'' + y' - 4y = 0$.

23. $x^2z'' + (x^2 + x)z' - z = 0$.

24. $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$.

En los problemas 25 a 30, use el método de Frobenius para hallar una fórmula general para los coeficientes a_n en un desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución de la ecuación dada, con $x > 0$.

25. $4x^2y'' + 2x^2y' - (x + 3)y = 0$.

26. $x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$.

27. $xw'' - w' - xw = 0$.

28. $3x^2y'' + 8xy' + (x - 2)y = 0$.

29. $xy'' + (x - 1)y' - 2y = 0$.

30. $x(x + 1)y'' + (x + 5)y' - 4y = 0$.

En los problemas 31 a 34, determine primero una fórmula de recurrencia para los coeficientes en el desarrollo en serie (de Frobenius) de la solución en torno de $x = 0$. Use esta fórmula de recurrencia para determinar si existe una solución de la ecuación diferencial, decreciente para $x > 0$.

31. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$.

32. $x^2y'' - x(1 + x)y' + y = 0$.

33. $3xy'' + 2(1 - x)y' - 4y = 0$.

34. $xy'' + (x + 2)y' - y = 0$.

En los problemas 35 a 38, use el método de Frobenius para determinar al menos los cuatro primeros términos no nulos en el desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución de la ecuación lineal de tercer orden dada, para $x > 0$.

35. $6x^3y''' + 13x^2y'' + (x + x^2)y' + xy = 0$.

36. $6x^3y''' + 11x^2y'' - 2xy' - (x - 2)y = 0$.

37. $6x^3y''' + 13x^2y'' - (x^2 + 3x)y' - xy = 0$.

38. $6x^3y''' + (13x^2 - x^3)y'' + xy' - xy = 0$.

En los problemas 39 y 40, trate de usar el método de Frobenius para hallar un desarrollo en serie en torno del punto singular irregular $x = 0$ para una solución de la ecuación diferencial dada. Si el método funciona, dé al menos los cuatro primeros términos no nulos en el desarrollo. Si el método no funciona, explique por qué.

39. $x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0$.

40. $x^2y'' + y' - 2y = 0$.

En ciertas aplicaciones es deseable tener un desarrollo en torno del punto al infinito. Para obtener tal desarrollo, use el cambio de variable $z = 1/x$ y desarrolle en torno de $z = 0$. En los problemas 41 y 42, muestre que infinito es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada, mostrando que $z = 0$ es un punto singular regular de la ecuación transformada en z. Encuentre además los primeros cuatro términos (como mínimo) en el desarrollo en serie en torno de infinito de una solución a la ecuación original en x.

41. $x^3y'' - x^2y' - y = 0$.

42. $18(x - 4)^2(x - 6)y'' + 9x(x - 4)y' - 32y = 0$.

43. Muestre que si r_1 y r_2 son raíces de la ecuación indicial (16), donde r_1 es la raíz mayor (Re $r_1 \geq$ Re r_2), entonces el coeficiente de a_1 en la ecuación (19) no se anula cuando $r = r_1$.

44. Para obtener una segunda solución linealmente independiente de la ecuación (20):

(a) Sustituya $w(r, x)$ dado en (21) en la ecuación (20) y concluya que los coeficientes a_k, $k \geq 1$, deben satisfacer la relación de recurrencia

$$(k + r - 1)(2k + 2r - 1)a_k + [(k + r - 1)(k + r - 2) + 1]a_{k-1} = 0 .$$

(b) Use la relación de recurrencia con $r = 1/2$ para deducir la segunda solución en términos de una serie

$$w\left(\frac{1}{2}, x\right) = a_0\left(x^{1/2} - \frac{3}{4}x^{3/2} + \frac{7}{32}x^{5/2} - \frac{133}{1920}x^{7/2} + \cdots\right) .$$

(c) Use la relación de recurrencia con $r = 1$ para obtener $w(1, x)$ en (28).

45. En el ejemplo 5, muestre que si elegimos $r = r_2 = -3$, entonces obtenemos *dos* soluciones linealmente independientes de la ecuación (45). [*Sugerencia*: a_0 y a_3 son constantes arbitrarias].

46. En el ejemplo 6, muestre que si elegimos $r = r_2 = -2$, entonces obtenemos una solución que es un múltiplo constante de la solución dada en (62). [*Sugerencia*: Muestre que a_0 y a_1 deben anularse, mientras que a_2 es arbitrario].

47. Al aplicar el método de Frobenius surge la siguiente relación de recurrencia: $a_{k+1} = 15^7a_k/(k+1)^9$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Muestre que los coeficientes están dados por la fórmula $a_k = 15^{7k}a_0/(k!)^9$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Use la fórmula de la parte (a), con $a_0 = 1$, para calcular a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20} y a_{25} en su computadora o calculadora. ¿Qué está fallando?

(c) Ahora use la relación de recurrencia para calcular a_k para $k = 1, 2, 3, \ldots, 25$, suponiendo que $a_0 = 1$.

(d) ¿Qué ventaja tiene la relación de recurrencia sobre la fórmula?

8.7 DETERMINACIÓN DE UNA SEGUNDA SOLUCIÓN LINEALMENTE INDEPENDIENTE

En la sección anterior mostramos que si $x = 0$ es un punto singular regular de

$$\textbf{(1)} \qquad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 , \qquad x > 0 ,$$

entonces es posible usar el método de Frobenius para hallar una solución en términos de una serie válida para x cercana a cero. El primer paso del método consiste en hallar las raíces r_1 y r_2 (Re $r_1 \geq$ Re r_2) de la ecuación indicial asociada

$$\textbf{(2)} \qquad r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0 .$$

Entonces, utilizando la raíz mayor r_1, la ecuación (1) tiene una solución en términos de una serie de la forma

$$\textbf{(3)} \qquad w(r_1, x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-r_1} \ ,$$

donde $a_0 \neq 0$. Para determinar una segunda solución linealmente independiente, nos inclinamos primero por hacer $r = r_2$ y buscar una solución de la forma

$$\textbf{(4)} \qquad w(r_2, x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2} \ .$$

Veremos que este procedimiento funciona, *siempre que* $r_1 - r_2$ *no sea un entero*. Sin embargo, cuando $r_1 - r_2$ *es* un entero, el método de Frobenius con $r = r_2$ podría simplemente conducir a la misma solución obtenida con la raíz r_1. (Esto es evidente cuando $r_1 = r_2$).

EJEMPLO 1 Determinar los primeros término en el desarrollo en torno del punto singular regular $x = 0$ para una solución general de

$$\textbf{(5)} \qquad (x + 2)x^2 y''(x) - xy'(x) + (1 + x)y(x) = 0 \ , \qquad x > 0 \ .$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 de la sección 8.6 usamos el método de Frobenius para hallar una solución en términos de una serie para (5). En el proceso vimos que $p_0 = -1/2$, $q_0 = 1/2$ y la ecuación indicial tiene raíces $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$. Como estas raíces no difieren en un entero $(r_1 - r_2 = 1/2)$, el método de Frobenius nos dará dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$\textbf{(6)} \qquad w(r, x) := x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-r} \ .$$

En el problema 44 de los ejercicios 8.6 pedimos al lector que muestre que al sustituir $w(r, x)$ en (5) se llega a la relación de recurrencia

$$\textbf{(7)} \qquad (k + r - 1)(2k + 2r - 1)a_k + \left[(k + r - 1)(k + r - 2) + 1\right]a_{k-1} = 0 \ , \quad k \geq 1.$$

Con $r = r_1 = 1$ y $a_0 = 1$, entonces

$$\textbf{(8)} \qquad y_1(x) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{30}x^4 + \cdots$$

como se obtuvo en la sección anterior. Además, al hacer $r = r_2 = 1/2$ y $a_0 = 1$ en (7) tenemos la segunda solución,

$$\textbf{(9)} \qquad y_2(x) = x^{1/2} - \frac{3}{4}x^{3/2} + \frac{7}{32}x^{5/2} - \frac{133}{1920}x^{7/2} + \cdots \ .$$

En consecuencia, una solución general de la ecuación (5) es

$$\textbf{(10)} \qquad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ , \qquad x > 0 \ ,$$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son las soluciones en serie dadas en las ecuaciones (8) y (9). Véase la figura 8.9. ■

Cuando una ecuación indicial tiene raíces repetidas $r_1 = r_2$, es claro que al sustituir $r = r_2$ obtenemos la primera solución, lo que no nos lleva a parte alguna. Una posibilidad consiste en usar el método de reducción de orden descrito en el problema 31 de los ejercicios 6.1. Sin embargo, este método tiene la desventaja de requerir el manejo de series que con frecuencia hacen difícil determinar el término general en el desarrollo en serie para la segunda solución linealmente independiente. Un método más directo consiste en usar el siguiente teorema, que proporciona la *forma* de esta segunda solución. Usted no deberá sorprenderse de ver que, en analogía con la situación para una ecuación de Cauchy-Euler cuya ecuación indicial tiene raíces repetidas, una segunda solución linealmente independiente implica a la primera solución multiplicada por una función logarítmica.

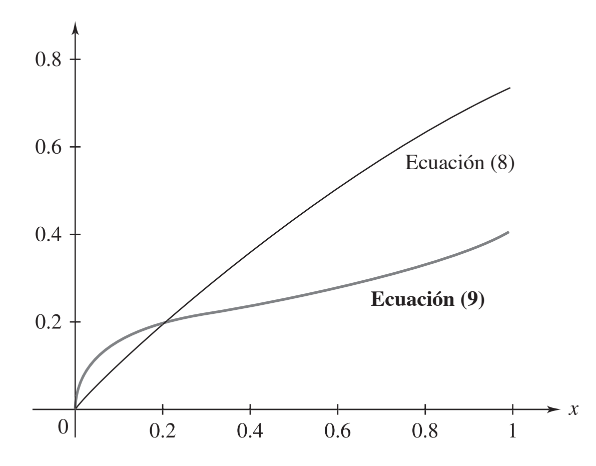


Figura 8.9 Sumas parciales que aproximan las soluciones del ejemplo 1

En el siguiente teorema damos la *forma general* de dos soluciones linealmente independientes para los tres casos en que las raíces de la ecuación indicial (a) no difieren por un entero, (b) son iguales, (c) difieren por un entero distinto de cero.

FORMA DE UNA SEGUNDA SOLUCIÓN LINEALMENTE INDEPENDIENTE

Teorema 7.† Sea x_0 un punto singular regular para $y'' + py' + qy = 0$ y sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación indicial asociada, donde $\text{Re}\, r_1 \geq \text{Re}\, r_2$.

(a) Si $r_1 - r_2$ no es un entero, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

(11) $$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}, \qquad a_0 \neq 0,$$

(12) $$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}, \qquad b_0 \neq 0.$$

(b) Si $r_1 = r_2$, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

(13) $$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}, \qquad a_0 \neq 0,$$

(14) $$y_2(x) = y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_1}.$$

(c) Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

(15) $$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}, \qquad a_0 \neq 0,$$

(16) $$y_2(x) = C y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}, \qquad b_0 \neq 0,$$

donde C es una constante que podría anularse.

† Para una demostración del teorema 7, véase el texto *Ordinary Differential Equations*, 4a. edición, por G. Birkhoff y G.-C. Rota (John Wiley & Sons, Nueva York, 1989).

En cada caso del teorema, $y_1(x)$ es justamente la solución en términos de una serie obtenida mediante el método de Frobenius, con $r = r_1$. Cuando $r_1 - r_2$ no es un entero, el método de Frobenius proporciona una segunda solución linealmente independiente considerando $r = r_2$. Veamos ahora que el hecho de conocer la forma de la segunda solución nos permite obtenerla. De nuevo, para simplificar la exposición, sólo consideramos ecuaciones indiciales con raíces reales.

EJEMPLO 3 Determinar los primeros términos en el desarrollo en serie en torno del punto singular regular $x = 0$ para dos soluciones linealmente independientes de

$$\textbf{(17)} \qquad x^2y''(x) - xy'(x) + (1 - x)y(x) = 0 \ , \qquad x > 0 \ .$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 4 de la sección 8.6 usamos el método de Frobenius para obtener una solución de (17) en términos de una serie. En el proceso vimos que la ecuación indicial es $r^2 - 2r + 1 = 0$, con las raíces $r_1 = r_2 = 1$. Trabajando con $r_1 = 1$ dedujimos la solución en términos de una serie

$$\textbf{(18)} \qquad y_1(x) = x + x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{576}x^5 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}x^{k+1}$$

[Véase la ecuación (44) en la sección 8.6 con $a_0 = 1$].

Para determinar una segunda solución linealmente independiente $y_2(x)$, apelamos al teorema 7, parte (b), lo que afirma (con $x_0 = 0$) que $y_2(x)$ tiene la forma

$$\textbf{(19)} \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} \ .$$

Nuestro objetivo es determinar los coeficientes b_n sustituyendo $y_2(x)$ directamente en la ecuación (17).

Primero derivamos $y_2(x)$ en (19) para obtener

$$y_2'(x) = y_1'(x)\ln x + x^{-1}y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1)b_n x^n \ ,$$

$$y_2''(x) = y_1''(x)\ln x - x^{-2}y_1(x) + 2x^{-1}y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1)b_n x^{n-1} \ .$$

Al sustituir $y_2(x)$ en (17) se llega a

$$\textbf{(20)} \qquad x^2\left\{y_1''(x)\ln x - x^{-2}y_1(x) + 2x^{-1}y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1)b_n x^{n-1}\right\}$$
$$- x\left\{y_1'(x)\ln x + x^{-1}y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1)b_n x^n\right\}$$
$$+ (1 - x)\left\{y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}\right\} = 0 \ ,$$

lo que simplificamos como

$$\textbf{(21)} \qquad \{\boldsymbol{x^2y_1''(x) - xy_1'(x) + (1 - x)y_1(x)}\}\ln x - 2y_1(x) + 2xy_1'(x)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1)b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1)b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0 \ .$$

Observe que el factor frente a ln x es justamente el lado izquierdo de la ecuación (17) con $y = y_1$. Como y_1 es solución de (17), este factor se anula. Con esta observación y un corrimiento en los índices de las sumas, podemos escribir la ecuación (21) como

$$\textbf{(22)} \qquad 2xy_1'(x) - 2y_1(x) + b_1x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (k^2b_k - b_{k-1})x^{k+1} = 0 \ .$$

Para identificar los coeficientes en (22) de modo que podamos igualarlos a cero, debemos sustituir de regreso en los desarrollos en serie para $y_1(x)$ y $y_1'(x)$. De (18), vemos que $y_1'(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}(k + 1)x^k/(k!)^2$. Al insertar esta serie junto con (18) en (22), vemos que

$$\textbf{(23)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1) - 2}{(k!)^2}x^{k+1} + b_1x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (k^2b_k - b_{k-1})x^{k+1} = 0 \ .$$

Separamos los términos $k = 0$ y $k = 1$ y agrupamos los términos semejantes:

$$\textbf{(24)} \qquad (2 + b_1)x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{2k}{(k!)^2} + k^2b_k - b_{k-1}\right]x^{k+1} = 0 \ .$$

Ahora igualamos a cero los coeficientes de (24). Del término x^2 tenemos que $2 + b_1 = 0$, de modo que $b_1 = -2$. Del término x^{k+1}, obtenemos

$$\frac{2k}{(k!)^2} + k^2b_k - b_{k-1} = 0$$

o

$$\textbf{(25)} \qquad b_k = \frac{1}{k^2}\left[b_{k-1} - \frac{2k}{(k!)^2}\right] \qquad (k \geq 2) \ .$$

Al hacer $k = 2$ y 3, calculamos

$$\textbf{(26)} \qquad b_2 = \frac{1}{2^2}[b_1 - 1] = \frac{-3}{4} \ , \qquad b_3 = \frac{1}{9}\left[-\frac{3}{4} - \frac{6}{36}\right] = \frac{-11}{108} \ .$$

Por tanto, una segunda solución linealmente independiente de (17) es

$$\textbf{(27)} \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{108}x^4 + \cdots \ .$$

Ver figura 8.10 en la página 478.

En los dos ejemplos siguientes consideramos el caso en que la diferencia entre las raíces de la ecuación indicial es un entero positivo. En el ejemplo 3 veremos que la constante C de la fórmula (16) debe anularse (es decir, no hay término ln x), mientras que en el ejemplo 4, esta constante es distinta de cero (es decir, hay un término ln x). Como las soluciones de estos ejemplos requieren varios cálculos intermedios, no mostraremos todos los detalles, sino que invitaremos al lector a tomar parte activa rellenando los huecos.

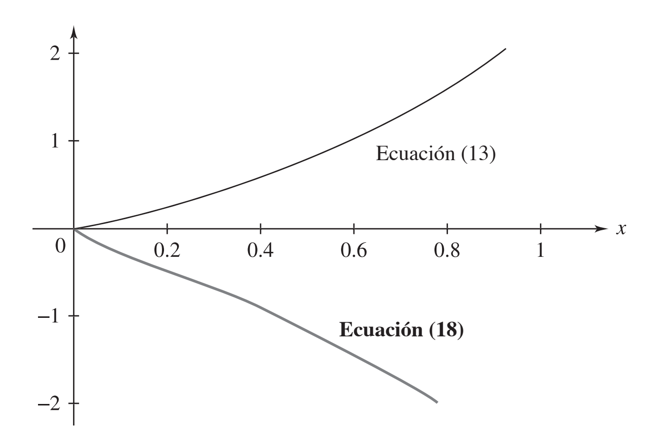


Figura 8.10 Sumas parciales que aproximan las soluciones del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Determinar los primeros términos en el desarrollo en serie en torno del punto singular regular $x = 0$ para una solución general de

(28) $$xy''(x) + 4y'(x) - xy(x) = 0 \,, \qquad x > 0 \,.$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 5 de la sección 8.6 se aplicó el método de Frobenius para determinar un desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución de la ecuación (28). Ahí vimos que la ecuación indicial es $r^2 + 3r = 0$, con raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = -3$. Trabajando con $r_1 = 0$ obtuvimos la solución en términos de una serie

(29) $$y_1(x) = 1 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 + \cdots$$

[véase la ecuación (53) en la sección 8.6, con $a_0 = 1$].

Como $r_1 - r_2 = 3$ es un entero positivo, el teorema 7 implica que la ecuación (28) tiene una segunda solución linealmente independiente de la forma

(30) $$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-3} \,.$$

Al sustituir esta expresión para y_2 en la ecuación (28) obtenemos

(31) $$x\left\{Cy_1''(x)\ln x + 2Cx^{-1}y_1'(x) - Cx^{-2}y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)b_n x^{n-5}\right\}$$
$$+ 4\left\{Cy_1'(x)\ln x + Cx^{-1}y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)b_n x^{n-4}\right\}$$
$$- x\left\{Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-3}\right\} = 0 \,,$$

que se simplifica como

(32) $$\{xy_1''(x) + 4y_1'(x) - xy_1(x)\}C\ln x + 3Cx^{-1}y_1(x) + 2Cy_1'(x)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)b_n x^{n-4} + \sum_{n=0}^{\infty}4(n-3)b_n x^{n-4} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0 \,.$$

El factor entre llaves se anula debido a que $y_1(x)$ satisface la ecuación (28). Después de agrupar las sumas y simplificar, la ecuación (32) se convierte en

(33) $$3Cx^{-1}y_1(x) + 2Cy_1'(x) - 2b_1x^{-3} + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-3)b_k - b_{k-2}]x^{k-4} = 0 .$$

Al sustituir en la serie para $y_1(x)$ y desarrollar los primeros términos de la suma en (33), obtenemos

$$\begin{aligned} -2b_1x^{-3} &+ (-2b_2 - b_0)x^{-2} + (3C - b_1)x^{-1} + (4b_4 - b_2) \\ &+ \left(\frac{7}{10}C + 10b_5 - b_3\right)x + (18b_6 - b_4)x^2 + \left(\frac{11}{280}C + 28b_7 - b_5\right)x^3 \\ &+ \cdots = 0 . \end{aligned}$$

Ahora igualamos a cero los coeficientes:

$$-2b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 , \qquad -2b_2 - b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{1}{2}b_0 ,$$

$$3C - b_1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{C = \frac{1}{3}b_1 = 0} , \qquad 4b_4 - b_2 = 0 \Rightarrow b_4 = \frac{1}{4}b_2 = -\frac{1}{8}b_0 ,$$

$$\frac{7}{10}C + 10b_5 - b_3 = 0 \Rightarrow b_5 = \frac{b_3 - \frac{7}{10}C}{10} = \frac{1}{10}b_3 ,$$

$$18b_6 - b_4 = 0 \Rightarrow b_6 = \frac{1}{18}b_4 = -\frac{1}{144}b_0 ,$$

$$\frac{11}{280}C + 28b_7 - b_5 = 0 \Rightarrow b_7 = \frac{b_5 - \frac{11}{280}C}{28} = \frac{1}{280}b_3 .$$

Observe, en particular, que C debe ser igual a cero. Al sustituir los valores anteriores de las b_n y $C = 0$ de regreso en la ecuación (30), tenemos

(34) $$\begin{aligned} y_2(x) = b_0&\left\{x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{144}x^3 + \cdots\right\} \\ &+ b_3\left\{1 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 + \cdots\right\} , \end{aligned}$$

donde b_0 y b_3 son constantes arbitrarias. Observe que la expresión entre llaves después de b_3 es justamente el desarrollo en serie para $y_1(x)$ dado por la ecuación (29). Por lo tanto, para obtener una segunda solución linealmente independiente, debemos elegir a b_0 distinta de cero. Al hacer $b_0 = 1$ y $b_3 = 0$ tenemos

(35) $$y_2(x) = x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{144}x^3 + \cdots .$$

Por lo tanto, una solución general de la ecuación (28) es

(36) $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) , \qquad x > 0 ,$$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ están dadas en (29) y (35). [Observe que el lado derecho de (34) coincide con (36) si identificamos b_0 con c_2 y b_3 como c_1]. Véase la figura 8.11. ■

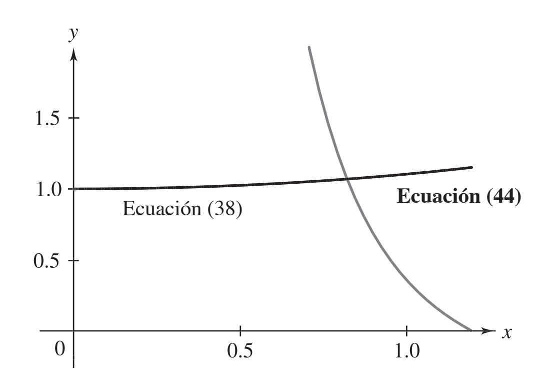


Figura 8.11 Sumas parciales que aproximan las soluciones del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Determinar los primeros términos en el desarrollo en serie en torno del punto singular regular $x = 0$ para dos soluciones linealmente independientes de

$$xy''(x) + 3y'(x) - xy(x) = 0 , \qquad x > 0 . \tag{37}$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 de la sección 8.6 usamos el método de Frobenius para hallar un desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución de la ecuación (37). Ahí vimos que la ecuación indicial es $r^2 + 2r = 0$, con raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$. Usando $r_1 = 0$ obtuvimos la solución en términos de una serie

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{192}x^4 + \frac{1}{9216}x^6 + \cdots \tag{38}$$

[véase la ecuación (62) de la sección 8.6 y haga $a_0 = 1$].

Como $r_1 - r_2 = 2$ es un entero positivo, el teorema 7 implica que la ecuación (37) tiene una segunda solución linealmente independiente de la forma

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} . \tag{39}$$

Al introducir el desarrollo para $y_2(x)$ en la ecuación (37) y simplificar se llega a

$$\begin{aligned}\{xy_1''(x) + 3y_1'(x) - xy_1(x)\}C\ln x + 2Cx^{-1}y_1(x) + 2Cy_1'(x)& \\ + \sum_{n=0}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-3} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{n-1} = 0 &.\end{aligned} \tag{40}$$

De nuevo, el factor entre llaves se anula, pues $y_1(x)$ es una solución de la ecuación (37). Si agrupamos las sumas y simplificamos, la ecuación (40) se convierte en

$$2Cx^{-1}y_1(x) + 2Cy_1'(x) - b_1x^{-2} + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-2)b_k - b_{k-2}]x^{k-3} = 0 . \tag{41}$$

Al sustituir en los desarrollos en serie para $y_1(x)$ y $y_1'(x)$ y desarrollar los primeros términos, la suma en (41) conduce a

$$\begin{aligned}&-b_1x^{-2} + (2C - b_0)x^{-1} + (3b_3 - b_1) + \left(\frac{3}{4}C + 8b_4 - b_2\right)x \\ &+ (15b_5 - b_3)x^2 + \left(\frac{5}{96}C + 24b_6 - b_4\right)x^3 + \cdots = 0 .\end{aligned} \tag{42}$$

Al igualar a cero los coeficientes en (42), se puede ver que podemos elegir a C y b_2 como constantes arbitrarias:

$$-b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \ ,$$

$$2C - b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 2C \qquad (C \text{ arbitraria}),$$

$$3b_3 - b_1 = 0 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{3}b_1 = 0 \ ,$$

$$8b_4 - b_2 + \frac{3}{4}C = 0 \Rightarrow b_4 = \frac{b_2 - \frac{3}{4}C}{8} = \frac{1}{8}b_2 - \frac{3}{32}C \qquad (b_2 \text{ arbitraria}),$$

$$15b_5 - b_3 = 0 \Rightarrow b_5 = \frac{1}{15}b_3 = 0 \ ,$$

$$24b_6 - b_4 + \frac{5}{96}C = 0 \Rightarrow b_6 = \frac{b_4 - \frac{5}{96}C}{24} = \frac{1}{192}b_2 - \frac{7}{1152}C \ .$$

Al sustituir estos valores de b_n de nuevo en (39), obtenemos la solución

(43) $$y_2(x) = C\left\{y_1(x)\ln x + 2x^{-2} - \frac{3}{32}x^2 - \frac{7}{1152}x^4 + \cdots\right\} + b_2\left\{1 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{192}x^4 + \cdots\right\} ,$$

donde C y b_2 son constantes arbitrarias. Como el factor que multiplica a b_2 es la primera solución $y_1(x)$, podemos obtener una segunda solución linealmente independiente eligiendo $C = 1$ y $b_2 = 0$:

(44) $$y_2(x) = y_1(x)\ln x + 2x^{-2} - \frac{3}{32}x^2 - \frac{7}{1152}x^4 + \cdots \ .$$

Véase la figura 8.12. ■

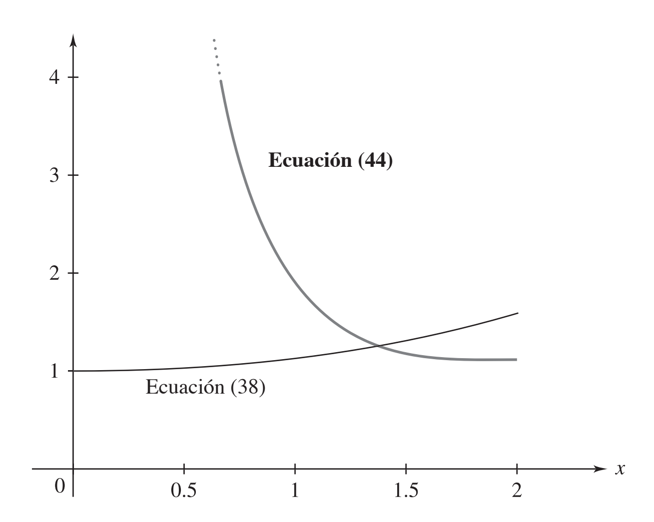


Figura 8.12 Sumas parciales que aproximan las soluciones del ejemplo 5

Para terminar, notemos que si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación indicial asociada a una ecuación diferencial son complejas, entonces son complejos conjugados. Así, la diferencia $r_1 - r_2$ es imaginaria y por tanto, no se trata de un entero, de modo que estamos en el caso (a) del teorema 7. Sin embargo, en vez de utilizar la forma (11)-(12) para las soluciones linealmente independientes, por lo general se consideran las partes real e imaginaria de (11); el problema 26 proporciona un refinamiento de esta situación.

EJERCICIOS 8.7

En los problemas 1 a 14, determine al menos los tres primeros términos no nulos en el desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación dada, con $x > 0$. (Éstas son las mismas ecuaciones que en los problemas 19 a 32 de los ejercicios 8.6).

1. $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$.
2. $2x(x - 1)y'' + 3(x - 1)y' - y = 0$.
3. $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$.
4. $xy'' + y' - 4y = 0$.
5. $x^2z'' + (x^2 + x)z' - z = 0$.
6. $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$.
7. $4x^2y'' + 2x^2y' - (x + 3)y = 0$.
8. $x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$.
9. $xw'' - w' - xw = 0$.
10. $3x^2y'' + 8xy' + (x - 2)y = 0$.
11. $xy'' + (x - 1)y' - 2y = 0$.
12. $x(x + 1)y'' + (x + 5)y' - 4y = 0$.
13. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$.
14. $x^2y'' - x(1 + x)y' + y = 0$.

En los problemas 15 y 16, determine si la ecuación dada tiene una solución acotada cerca del origen, si todas las soluciones están acotadas cerca del origen o ninguna de las soluciones está acotada cerca del origen. (Éstas son las mismas ecuaciones que en los problemas 33 y 34 de los ejercicios 8.6). Observe que sólo necesita analizar la ecuación indicial para responder esta pregunta.

15. $3xy'' + 2(1 - x)y' - 4y = 0$.
16. $xy'' + (x + 2)y' - y = 0$.

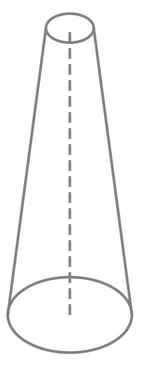
En los problemas 17 a 20, determine al menos los tres primeros términos en el desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación lineal de tercer orden dada, para $x > 0$. (Éstas son las mismas ecuaciones que en los problemas 35 a 38 de los ejercicios 8.6).

17. $6x^3y''' + 13x^2y'' + (x + x^2)y' + xy = 0$.
18. $6x^3y''' + 11x^2y'' - 2xy' - (x - 2)y = 0$.
19. $6x^3y''' + 13x^2y'' - (x^2 + 3x)y' - xy = 0$.
20. $6x^3y''' + (13x^2 - x^3)y'' + xy' - xy = 0$.

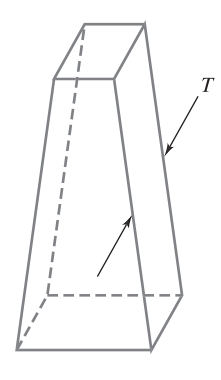
21. **Columnas con flexión lateral.** En el estudio de la flexión lateral de una columna con sección transversal variable aparece la ecuación

$$x^n y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \,, \qquad x > 0 \,, \tag{45}$$

donde x se relaciona con la altura sobre el suelo y y es la flexión con respecto de la vertical. La constante positiva α depende de la rigidez de la columna, su momento de inercia en la parte superior y la carga. El entero positivo n depende del tipo de columna. Por ejemplo, cuando la columna es un cono truncado [véase la figura 8.13(a)], tenemos que $n = 4$.




(a) Cono truncado



(b) Pirámide truncada con espesor fijo T y ancho variable

Figura 8.13 Columnas con flexión lateral

(a) Use la sustitución $x = t^{-1}$ para reducir (45) con $n = 4$ en la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \alpha^2 y = 0 , \qquad t > 0 .$$

(b) Determine al menos los seis primeros términos no nulos en el desarrollo en serie en torno de $t = 0$ para una solución general de la ecuación obtenida en la parte (a).

(c) Use el resultado de la parte (b) para dar un desarrollo en torno de $x = \infty$ para una solución general de (45).

22. En el problema 21, considere una columna con una sección transversal rectangular, con dos lados constantes y los otros dos cambiando en forma lineal [véase la figura 8.13(b)]. En este caso, $n = 1$. Determine al menos los cuatro primeros términos no nulos en el desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación (45) cuando $n = 1$.

23. Use el método de Frobenius y la fórmula para reducción de orden, ecuación (11) para determinar al menos los tres primeros términos no nulos en el desarrollo en serie en torno del punto singular regular $x = 0$ para una solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + y' - 2y = 0 .$$

24. La ecuación

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + ny(x) = 0 ,$$

donde n es un entero no negativo, es llamada **ecuación diferencial de Laguerre**. Muestre que para cada n, esta ecuación tiene una solución polinomial de grado n. Estos polinomios se denotan como $L_n(x)$ y se llaman **polinomios de Laguerre**. Los primeros polinomios de Laguerre son

$$L_0(x) = 1 , \qquad L_1(x) = -x + 1 .$$
$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2 .$$

25. Use los resultados del problema 24 para obtener los primeros términos en el desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución general $x > 0$ de la ecuación diferencial de Laguerre para $n = 0$ y 1.

26. Para obtener dos soluciones linealmente independientes de

$$\textbf{(46)} \qquad x^2y'' + (x + x^2)y' + y = 0 , \qquad x > 0 ,$$

siga estos pasos:

(a) Verifique que (46) tiene un punto singular regular en $x = 0$ y que la ecuación indicial asociada tiene raíces complejas $\pm i$.

(b) Como vimos en la sección 8.5, podemos escribir

$$x^{\alpha + i\beta} = x^\alpha x^{i\beta}$$
$$= x^\alpha\cos(\beta \ln x) + ix^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x) .$$

Deduzca de esta fórmula que $\frac{d}{dx}x^{\alpha+i\beta} = (\alpha + i\beta)x^{\alpha-1+i\beta}$.

(c) Sea $y(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+i}$, donde ahora los coeficientes son constantes *complejas*, y sustituya esta serie en la ecuación (46) usando el resultado de la parte (b).

(d) Haga igual a cero los coeficientes de las potencias semejantes y deduzca la relación de recurrencia

$$a_n = -\frac{n - 1 + i}{(n + i)^2 + 1}a_{n-1} , \qquad \text{para } n \geq 1 .$$

(e) Haga $a_0 = 1$ y calcule los coeficientes a_1 y a_2 para obtener con ello los primeros términos de una solución compleja de (46).

(f) Calcule las partes real e imaginaria de la solución obtenida en la parte (e) y deduzca las siguientes soluciones reales linealmente independientes de (46):

$$y_1(x) = [\cos(\ln x)]\left\{1 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots\right\}$$
$$+ [\operatorname{sen}(\ln x)]\left\{\frac{1}{5}x - \frac{1}{20}x^2 + \cdots\right\} ,$$
$$y_2(x) = [\cos(\ln x)]\left\{-\frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x^2 + \cdots\right\}$$
$$+ [\operatorname{sen}(\ln x)]\left\{1 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots\right\} .$$

8.8 FUNCIONES ESPECIALES

En el trabajo avanzado en matemáticas aplicadas, ingeniería y física surgen con frecuencia unas cuantas ecuaciones particulares de segundo orden. Estas ecuaciones han sido estudiadas en forma extensa y se han escrito varios volúmenes sobre las propiedades de sus soluciones, las que se conocen como **funciones especiales**.

Para servir como referencia incluimos una breve exposición de tres de estas ecuaciones: la ecuación hipergeométrica, la ecuación de Bessel y la ecuación de Legendre. La ecuación de Bessel controla la dependencia radial de las soluciones a las ecuaciones diferenciales parciales clásicas de la física en sistemas coordenados esféricos (véase la sección 10.7, página 638); la ecuación de Legendre controla su dependencia con respecto de la latitud. Gauss formuló la ecuación hipergeométrica como una ecuación genérica cuyas soluciones incluyen las funciones especiales de Legendre, Chebyshev, Gegenbauer y Jacobi. Para un estudio más detallado de las funciones especiales, el lector puede consultar *Basic Hypergeometric Series*, por G. Gasper y M. Rahman (Cambridge University Press, Cambridge, 1990); *Special Functions*, por E. D. Rainville (Macmillan, Nueva York, 1960), y *Higher Transcendental Functions*, por A. Erdelyi, editor (McGraw-Hill, Nueva York, 1953), 3 volúmenes.

Ecuación hipergeométrica

La ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\textbf{(1)} \qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \ ,$$

donde α, β y γ son parámetros fijos, es llamada **ecuación hipergeométrica**. Esta ecuación tiene puntos singulares en $x = 0$ y 1, ambos regulares. Así, un desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución de (1) obtenida mediante el método de Frobenius convergerá al menos para $0 < x < 1$ (véase el teorema 6, página 468). Para hallar este desarrollo, observe que la ecuación indicial asociada con $x = 0$ es

$$r(r-1) + \gamma r = r(r-(1-\gamma)) = 0 \ ,$$

con raíces 0 y $1-\gamma$. Supongamos que γ no es un entero y usemos la raíz $r = 0$ para obtener una solución para (1) de la forma

$$\textbf{(2)} \qquad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Al sustituir $y_1(x)$ dada en (2) dentro de (1), recorrer índices, y simplificar, llegamos a la ecuación

$$\textbf{(3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+\gamma-1)a_n - (n+\alpha-1)(n+\beta-1)a_{n-1}]x^{n-1} = 0 \ .$$

Al igualar a cero los coeficientes de la serie obtenemos la relación de recurrencia

$$\textbf{(4)} \qquad n(n+\gamma-1)a_n - (n+\alpha-1)(n+\beta-1)a_{n-1} = 0 \ , \qquad n \geq 1 \ .$$

Como $n \geq 1$ y γ no es un entero, no hay problema de división entre cero, así que escribimos (4) como

$$\textbf{(5)} \qquad a_n = \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)}{n(n+\gamma-1)} a_{n-1} \ .$$

Hallamos a_n en forma recursiva:

$$\textbf{(6)} \qquad a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} a_0 \ , \qquad n \geq 1 \ .$$

Si usamos la **función factorial** $(t)_n$, definida para enteros no negativos n como

(7) $$(t)_n := t(t+1)(t+2)\cdots(t+n-1)\ , \qquad n \geq 1\ ,$$
$$(t)_0 := 1\ , \qquad t \neq 0\ ,$$

entonces podemos expresar a_n de manera más compacta como

(8) $$a_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}a_0\ , \qquad n \geq 1\ .$$

[Podemos escribir $n!$ como $(1)_n$]. Si $a_0 = 1$ y sustituimos la expresión para a_n en (8) dentro de (2), obtenemos la siguiente solución de la ecuación hipergeométrica:

(9) $$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n\ .$$

La solución dada en (9) se llama **función hipergeométrica de Gauss** y se denota $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$.† Es decir,

(10) $$\boldsymbol{F(\alpha, \beta; \gamma; x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n\ .}$$

Las funciones hipergeométricas son generalizaciones de las series geométricas. Para ver esto, observe que para cualquier constante β que no sea cero ni un entero negativo,

$$F(1, \beta; \beta; x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\ .$$

Es interesante notar que muchas otras funciones familiares se pueden expresar en términos de la función hipergeométrica. Por ejemplo,

(11) $$F(\alpha, \beta; \beta; x) = (1-x)^{-\alpha}\ ,$$

(12) $$F(1, 1; 2; x) = -x^{-1}\ln(1-x)\ ,$$

(13) $$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\right) = \frac{1}{2}x^{-1}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ ,$$

(14) $$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right) = x^{-1}\arctan x\ .$$

Dejaremos al lector que verifique estas fórmulas.

Para obtener una segunda solución linealmente independiente de (1) cuando γ no es un entero, usamos la otra raíz de la ecuación indicial, $1 - \gamma$, y buscamos una solución de la forma

(15) $$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1-\gamma}\ .$$

---

†***Nota histórica:*** Carl Friedrich Gauss hizo un estudio amplio de esta función en 1813. En *Men of Mathematics* (Dover Publications, Inc., Nueva York, 1937), el historiador de las matemáticas E. T. Bell se refiere a Gauss como el príncipe de las matemáticas.

Al sustituir $y_2(x)$ en la ecuación (1) y calcular b_n, tenemos que

(16) $$y_2(x) = x^{1-\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \gamma)_n(\beta + 1 - \gamma)_n}{n!(2 - \gamma)_n} x^{n+1-\gamma} .$$

Al factorizar $x^{1-\gamma}$, vemos que la segunda solución $y_2(x)$ se puede expresar en términos de una función hipergeométrica. Es decir,

(17) $$y_2(x) = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma; 2 - \gamma; x) .$$

Si γ es un entero, una de las fórmulas dadas en (9) o (16) (correspondiente a la raíz mayor, 0 o $1 - \gamma$) sigue proporcionando una solución. Entonces usamos las técnicas de este capítulo para obtener una segunda solución linealmente independiente, que puede o no contener un término logarítmico. Omitiremos el análisis de estas soluciones.

En muchos textos, la función hipergeométrica se expresa en términos de la función gamma $\Gamma(x)$ en vez de la función factorial. Recuerde que en la sección 7.6 definimos

(18) $$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-u}u^{x-1}\,du , \qquad x > 0$$

y mostramos que

(19) $$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) , \qquad x > 0 .$$

Si usamos varias veces la relación (19) tenemos

(20) $$(t)_n = \frac{\Gamma(t + n)}{\Gamma(t)}$$

para $t > 0$ y n cualquier entero no negativo. Usamos la relación (20) para expresar la función hipergeométrica como

(21) $$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)}{n!\Gamma(\gamma + n)} x^n .$$

Ecuación de Bessel

La ecuación diferencial lineal de segundo orden

(22) $$\boldsymbol{x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0} ,$$

donde $\nu \geq 0$ es un parámetro fijo, se llama **ecuación de Bessel de orden $\boldsymbol{\nu}$**. Esta ecuación tiene un punto singular regular en $x = 0$ y no tiene más puntos singulares en el plano complejo. Por lo tanto, una solución en términos de una serie para (22) obtenida mediante el método de Frobenius convergerá para $0 < x < \infty$. La ecuación indicial para (22) es

$$r(r - 1) + r - \nu^2 = (r - \nu)(r + \nu) = 0 ,$$

con raíces $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. Si 2ν no es un entero, entonces el método de Frobenius proporciona dos soluciones linealmente independientes, dadas por

(23) $$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(1 + \nu)_n} x^{2n+\nu} ,$$

$$\textbf{(24)} \qquad y_2(x) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(1-\nu)_n} x^{2n-\nu} .$$

Si en (23) hacemos

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)} ,$$

entonces la relación (20) implica que la función

$$\textbf{(25)} \qquad J_{\nu}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

es una solución de (22). $J_{\nu}(x)$ es la **función de Bessel de primer tipo de orden** $\boldsymbol{\nu}$.† De manera similar, si hacemos

$$b_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$$

en la ecuación (24), tenemos la solución

$$\textbf{(26)} \qquad J_{-\nu}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} ,$$

que es la función de Bessel de primer tipo de orden $-\nu$. Cuando $r_1 - r_2 = 2\nu$ no es un entero, el teorema 7 de la sección 8.7 implica que $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. Además, se puede mostrar que si ν no es un entero, aunque 2ν lo sea, entonces $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ siguen siendo linealmente independientes.

¿Qué ocurre en el caso restante, cuando ν es un entero no negativo, digamos $\nu = m$? Aunque $J_m(x)$ sigue siendo una solución, la función $J_{-m}(x)$ ni siquiera está bien definida, pues la fórmula (26) implica a la función gamma evaluada en un entero no positivo. Con un análisis más detallado de la función gamma, se puede ver que $1/\Gamma(k) = 0$ para $k = 0, -1, -2, \ldots$. Por lo tanto, (26) se convierte en

$$\textbf{(27)} \qquad J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m} .$$

Al comparar (27) con la fórmula (25) para $J_m(x)$ (y después de recorrer el índice), vemos que

$$\textbf{(28)} \qquad J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) ,$$

lo que significa que $J_{-m}(x)$ y $J_m(x)$ son linealmente *dependientes*. Para resolver el problema de hallar una segunda solución linealmente independiente en el caso en que ν sea un entero no negativo, podemos usar el teorema 7 de la sección 8.7. Sin embargo, podemos seguir otro método que describimos a continuación.

Si ν no es un entero, podemos considerar combinaciones lineales de $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ para obtener soluciones de (22). En particular, sea

---

†***Nota histórica:*** Frederic Wilhelm Bessel (1784-1846) comenzó su carrera en la navegación comercial y posteriormente se convirtió en astrónomo. En 1817, Bessel introdujo las funciones $J_{\nu}(x)$ en su estudio de las órbitas planetarias.

(29) $$Y_\nu(x) := \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}\,, \qquad \textbf{donde } \nu \textbf{ no es un entero,}$$

para $x > 0$. La función $Y_\nu(x)$ es la **función de Bessel de segundo tipo de orden ν**, y, como se puede verificar, $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$ son linealmente independiente. Observe que cuando ν es un entero, el denominador en (29) se anula; pero por la fórmula (28), ¡también el numerador! Por lo tanto es razonable esperar que, en un sentido de límite, la fórmula (29) siga teniendo sentido. En efecto, si usamos la regla de L'Hôpital, es posible mostrar que para m un entero no negativo, la función definida por

(30) $$Y_m(x) := \lim_{\nu\to m} \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

para $x > 0$ es una solución de (22) con $\nu = m$. Además, $J_m(x)$ y $Y_m(x)$ son linealmente independientes. De nuevo decimos que $Y_m(x)$ es la función de Bessel de segundo tipo de orden m. En la literatura, a veces se denota la función $Y_m(x)$ como $N_m(x)$; algunas variantes de ella se conocen como **función de Neumann** y **función de Weber**.

La figura 8.14 muestras las gráficas de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ y la figura 8.15 las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$. Observe que las curvas para $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se comportan como ondas sinusoidales amortiguadas y tienen ceros que se intercalan (véase el problema 28). El hecho de que las funciones de Bessel J_n tengan una infinidad de ceros es útil en ciertas aplicaciones (véase el proyecto A del capítulo 10).

Hay varias relaciones de recurrencia útiles que implican a las funciones de Bessel. Por ejemplo,

(31) $$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,,$$

(32) $$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,,$$

(33) $$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)\,,$$

(34) $$J_{\nu+1}(x) = J_{\nu-1}(x) - 2J'_\nu(x)\,.$$

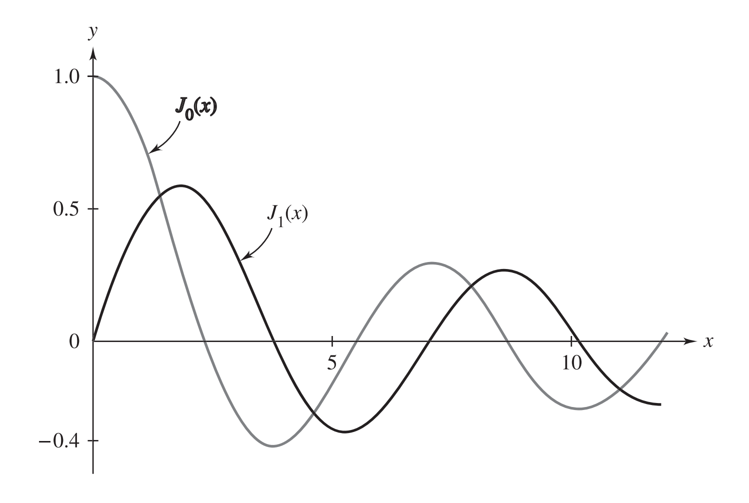


Figura 8.14 Gráficas de las funciones de Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$

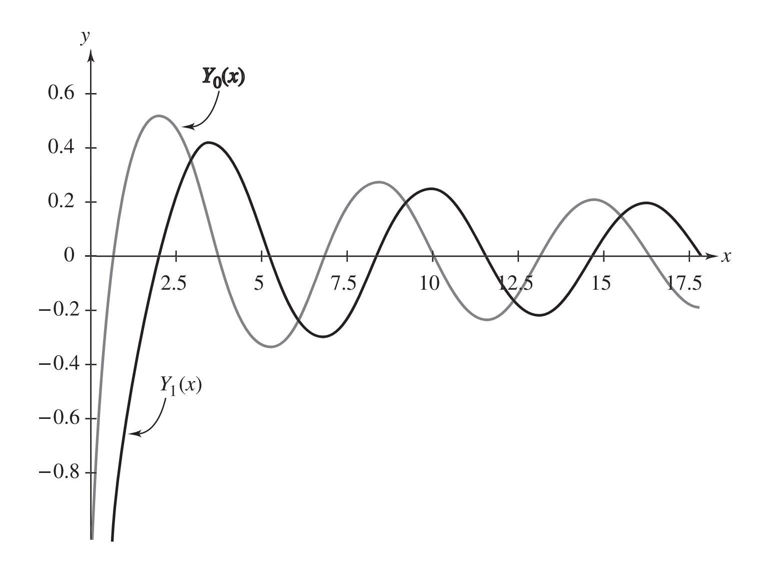


Figura 8.15 Gráficas de las funciones de Bessel $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$

Además, se cumplen relaciones análogas para las funciones de Bessel de segundo tipo.

Para ilustrar las técnicas necesarias para demostrar las relaciones de recurrencia, verificaremos la relación (31). Primero sustituimos la serie (25) para $J_\nu(x)$ en el lado izquierdo de (31) y derivamos para obtener

$$\textbf{(35)}\qquad \frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = \frac{d}{dx}\left\{x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2\nu}}{n!\Gamma(1+\nu+n)2^{2n+\nu}}\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2\nu)x^{2n+2\nu-1}}{n!\Gamma(1+\nu+n)2^{2n+\nu}} .$$

Como $\Gamma(1+\nu+n) = (\nu+n)\Gamma(\nu+n)$, tenemos de (35)

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x^{2n+2\nu-1}}{n!\Gamma(\nu+n)2^{2n+\nu}} .$$

Al factorizar una x^ν, se llega a

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+(\nu-1)+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x) ,$$

como afirma la ecuación (31). Dejaremos la verificación de las demás relaciones como ejercicios (véanse los problemas 22-24).

Las siguientes aproximaciones son útiles al analizar el comportamiento de las funciones de Bessel para argumentos grandes:

(36) $$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \quad Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \quad x \gg 1 \ .$$

Este comportamiento oscilatorio se demuestra en las figuras 8.14 y 8.15. El problema 41 proporciona una cierta justificación de la fórmula (36). Por supuesto, para x pequeña los términos principales del desarrollo en serie de potencias dominan y tenemos

(37) $$J_\nu(x) \approx x^\nu/[2^\nu\Gamma(1 + \nu)] \ , \quad Y_0(x) \approx (2 \ln x)/\pi \ , \quad Y_{\nu>0}(x) \approx -\Gamma(\nu)2^\nu/(\pi x^\nu) \ , \quad 0 < x \ll 1 \ .$$

Ecuación de Legendre

La ecuación diferencial lineal de segundo orden

(38) $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \ ,$$

donde n es un parámetro fijo, es llamada **ecuación de Legendre**.† Esta ecuación tiene un punto singular regular en 1, y por tanto se puede obtener una solución en términos de una serie para (38) en torno de $x = 1$ mediante el método de Frobenius. Haciendo $z = x - 1$, la ecuación (38) se transforma en

(39) $$z(z + 2)\frac{d^2y}{dz^2} + 2(z + 1)\frac{dy}{dz} - n(n + 1)y = 0 \ .$$

La ecuación indicial para (39) en $z = 0$ es

$$r(r - 1) + r = r^2 = 0 \ ,$$

con raíces $r_1 = r_2 = 0$. Al sustituir

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

en (39) y proceder de la manera usual, llegamos a la solución

(40) $$y_1(x) = 1 \div \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)_k(n + 1)_k}{k!(1)_k} \left(\frac{1 - x}{2}\right)^k ,$$

donde hemos expresado y_1 en términos de la variable original x y $a_0 = 1$. Hemos escrito la solución en la forma anterior porque (40) muestra claramente que

(41) $$y_1(x) = F\left(-n, n + 1; 1; \frac{1 - x}{2}\right) ,$$

donde F es la función hipergeométrica de Gauss definida en (10).

---

†***Nota histórica:*** Las soluciones de esta ecuación fueron obtenidas por Adrien Marie Legendre (1752-1833) en 1785 y se conocen como funciones de Legendre.

Para n un entero no negativo, el factor

$$(-n)_k = (-n)(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k-1)$$

se anulará para $k \geq n + 1$. Por lo tanto, la solución dada en (40) y (41) es un *polinomio* de grado n. Además, $y_1(1) = 1$. Estas soluciones polinomiales de la ecuación (38) se llaman **polinomios de Legendre** o **polinomios esféricos** y se denotan tradicionalmente como $P_n(x)$; es decir,

(42) $$P_n(x) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)_k(n+1)_k}{k!(1)_k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k .$$

Si desarrollamos en torno de $x = 0$, entonces $P_n(x)$ asume la forma

(43) $$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m(2n-2m)!}{(n-m)!m!(n-2m)!} x^{n-2m} ,$$

donde $[n/2]$ es el mayor entero menor o igual que $n/2$ (véase el problema 34). Los tres primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1 , \qquad P_1(x) = x , \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} .$$

Los polinomios de Legendre satisfacen la **condición de ortogonalidad**

(44) $$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad \text{para} \quad n \neq m .$$

Para ver esto, primero escribimos la ecuación (38) en la llamada **forma autoadjunta**:

(45) $$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0 .$$

Como $P_n(x)$ y $P_m(x)$ satisfacen (45) con parámetros n y m respectivamente, tenemos

(46) $$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0 ,$$

(47) $$[(1-x^2)P_m'(x)]' + m(m+1)P_m(x) = 0 .$$

Multiplicamos (46) por $P_m(x)$, (47) por $P_n(x)$ y restamos para obtener

$$P_m(x)[(1-x^2)P_n'(x)]' - P_n(x)[(1-x^2)P_m'(x)]' + [n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n(x) = 0 ,$$

que podemos escribir en la forma

(48) $$(n^2 - m^2 + n - m)P_m(x)P_n(x) = P_n(x)[(1-x^2)P_m'(x)]' - P_m(x)[(1-x^2)P_n'(x)]' .$$

Un cálculo directo muestra que el lado derecho de (48) es justamente

$$\{(1-x^2)[P_n(x)P_m'(x) - P_n'(x)P_m(x)]\}' .$$

Usamos este hecho y la identidad $n^2 - m^2 + n - m = (n - m)(n + m + 1)$, para escribir la ecuación (48) como

(49) $$(n - m)(n + m + 1)P_m(x)P_n(x) = \{(1 - x^2)[P_n(x)P'_m(x) - P'_n(x)P_m(x)]\}' .$$

Integramos ambos lados de (49) de $x = -1$ a $x = 1$ para llegar a

(50) $$\begin{aligned}(n - m)(n + m + 1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\{(1 - x^2)[P_n(x)P'_m(x) - P'_n(x)P_m(x)]\}'dx \\ &= \{(1 - x^2)[P_n(x)P'_m(x) - P'_n(x)P_m(x)]\}\Big|_{-1}^{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

pues $1 - x^2 = 0$ para $x = \pm 1$. Como n y m son enteros no negativos con $n \neq m$, entonces $(n - m)(n + m + 1) \neq 0$, de modo que la ecuación (44) es consecuencia de (50).

Los polinomios de Legendre también satisfacen la **fórmula de recurrencia**

(51) $$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

y la **fórmula de Rodrigues**

(52) $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2 - 1)^n\}$$

(véanse los problemas 32 y 33).

Los polinomios de Legendre son generados por la función $(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ en el sentido de que

(53) $$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n , \qquad |z| < 1 , \qquad |x| < 1 .$$

Es decir, si desarrollamos $(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ en una serie de Taylor en torno de $z = 0$, considerando a x como un parámetro fijo, entonces los coeficientes de z^n son los polinomios de Legendre $P_n(x)$. La función $(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ es llamada **función generatriz** de $P_n(x)$ y se puede deducir de la fórmula de recurrencia (51) (véase el problema 35).

Los polinomios de Legendre son un ejemplo de una clase particular de funciones llamada **polinomios ortogonales clásicos**.[†] Esta clase incluye, por ejemplo, a los **polinomios de Jacobi**, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$; los **polinomios de Gegenbauer** o **ultraesféricos**, $C_n^{\lambda}(x)$; los **polinomios de Chebyshev** (Tchebichef), $T_n(x)$ y $U_n(x)$; los **polinomios de Laguerre**, $L_n^{\alpha}(x)$, y los **polinomios de Hermite**, $H_n(x)$. Las propiedades de los polinomios ortogonales clásicos se pueden encontrar en los libros citados anteriormente en esta sección o en *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, por M. Abramowitz e I. A. Stegun (editores) (Dover, Nueva York, 1965), capítulo 22.

[†]En este caso, la ortogonalidad quiere decir que $\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)\,dx = 0$ para $n \neq m$, donde $w(x)$ es una función de ponderación en el intervalo (a, b).

EJERCICIOS 8.8

En los problemas 1 a 4, exprese una solución general de la ecuación dada mediante funciones hipergeométricas de Gauss.

1. $x(1-x)y'' + \left(\frac{1}{2} - 4x\right)y' - 2y = 0$.

2. $3x(1-x)y'' + (1-27x)y' - 45y = 0$.

3. $2x(1-x)y'' + (1-6x)y' - 2y = 0$.

4. $2x(1-x)y'' + (3-10x)y' - 6y = 0$.

En los problemas 5 a 8, verifique las siguientes fórmulas desarrollando cada función en una serie de potencias en torno de $x = 0$.

5. $F(1, 1; 2; x) = -x^{-1}\ln(1-x)$.

6. $F(\alpha, \beta; \beta; x) = (1-x)^{-\alpha}$.

7. $F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\right) = \frac{1}{2}x^{-1}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

8. $F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right) = x^{-1}\arctan x$.

En los problemas 9 y 10, use uno de los métodos analizados en la sección 8.7 para obtener dos soluciones linealmente independientes de la ecuación hipergeométrica dada.

9. $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

10. $x(1-x)y'' + (2-2x)y' - \frac{1}{4}y = 0$.

11. Muestre que la **ecuación hipergeométrica confluente**

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 ,$$

donde α y γ son parámetros fijos y γ no es un entero, tiene dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n} x^n$$

y

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}{}_1F_1(\alpha + 1 - \gamma; 2 - \gamma; x) .$$

12. Use la propiedad de la función gamma dada en (19) para deducir la relación (20).

En los problemas 13 a 18, exprese una solución general de la ecuación dada mediante funciones de Bessel de primer o segundo tipo.

13. $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$.

14. $9x^2y'' + 9xy' + (9x^2 - 16)y = 0$.

15. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

16. $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$.

17. $9t^2x'' + 9tx' + (9t^2 - 4)x = 0$.

18. $x^2z'' + xz' + (x^2 - 16)z = 0$.

En los problemas 19 y 20 se da una ecuación de Bessel. Para la elección adecuada de ν, la función de Bessel $J_\nu(x)$ es una solución. Use el método analizado en la sección 8.7 para obtener una segunda solución linealmente independiente.

19. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

20. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$.

21. Muestre que $x^\nu J_\nu(x)$ satisface la ecuación

$$xy'' + (1 - 2\nu)y' + xy = 0 , \quad x > 0 ,$$

y use este resultado para hallar una solución de la ecuación

$$xy'' - 2y' + xy = 0 , \quad x > 0 .$$

En los problemas 22 a 24, deduzca las fórmulas de recurrencia indicadas.

22. Fórmula (32).

23. Fórmula (33).

24. Fórmula (34).

25. Muestre que

$$J_{1/2}(x) = (2/\pi x)^{1/2}\operatorname{sen} x \quad \text{y}$$

$$J_{-1/2}(x) = (2/\pi x)^{1/2}\cos x .$$

26. Las funciones de Bessel de orden $\nu = n + 1/2$, donde n es cualquier entero, se relacionan con las **funciones de Bessel esféricas**. Use la relación (33) y los resultados del problema 25 para mostrar que tales funciones de Bessel se pueden representar en términos de sen x, cos x y potencias de x. Demuestre esto determinando una forma cerrada para $J_{-3/2}(x)$ y $J_{5/2}(x)$.

27. Use el teorema 7 de la sección 8.7 para determinar una segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden 0 en términos de la función de Bessel $J_0(x)$.

28. Muestre que entre dos raíces positivas consecutivas (ceros) de $J_1(x)$ existe una raíz de $J_0(x)$. Esta propiedad de intercalado de las raíces de las funciones de Bessel se ilustra en la figura 8.14. [*Sugerencia*: Use la relación (31) y el teorema de Rolle del cálculo].

29. Use la fórmula (43) para determinar los cinco primeros polinomios de Legendre.

30. Muestre que los polinomios de Legendre de grado par son funciones pares de x, mientras que los de grado impar son funciones impares.

31. **(a)** Muestre que la condición de ortogonalidad (44) para los polinomios de Legendre implica que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)q(x)dx = 0$$

para *cualquier* polinomio $q(x)$ de grado a lo más $n - 1$. [*Sugerencia*: Los polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ son linealmente independientes y por lo tanto generan el espacio de todos los polinomios de grado a lo más $n - 1$. Así, $q(x) = a_0P_0(x) + \cdots + a_{n-1}P_{n-1}(x)$ para constantes adecuadas a_k].

(b) Demuestre que si $Q_n(x)$ es un polinomio de grado n tal que

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)P_k(x)dx = 0$$

para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$,

entonces $Q_n(x) = cP_n(x)$ para cierta constante c. [*Sugerencia*: Elija c de modo que el coeficiente de x^n para $Q_n(x) - cP_n(x)$ se anule. Entonces, como $P_0, \ldots, P_{n-1}$ es una base,

$$Q_n(x) - cP_n(x) = a_0P_0(x) + \cdots + a_{n-1}P_{n-1}(x) .$$

Multiplique la última ecuación por $P_k(x)$ $(0 \leq k \leq n - 1)$ e integre de $x = -1$ a $x = 1$ para mostrar que cada a_k se anula].

32. Deduzca la fórmula de recurrencia (51) para los polinomios de Legendre mediante los siguientes pasos:

(a) Muestre que la función

$$Q_{n-1}(x) := (n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x)$$

es un polinomio de grado $n - 1$. [*Sugerencia*: Calcule el coeficiente del término x^{n+1} mediante la representación (42). El coeficiente de x^n también se anula porque $P_{n+1}(x)$ y $xP_n(x)$ son ambos funciones pares o impares, como consecuencia del problema 30].

(b) Use el resultado del problema 31(a) y muestre que

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-1}(x)P_k(x)dx = 0$$

para $k = 0, 1, \ldots, n - 2$.

(c) Del problema 31(b), concluya que $Q_{n-1}(x) = cP_{n-1}(x)$ y, haciendo $x = 1$, muestre que $c = -n$. [*Sugerencia*: Recuerde que $P_m(1) = 1$ para toda m]. La definición de $Q_{n-1}(x)$ en la parte (a) implica la fórmula de recurrencia.

33. Para demostrar la fórmula de Rodrigues (52) para los polinomios de Legendre, siga estos pasos:

(a) Sea $v_n := (d^n/dx^n)\{(x^n - 1)^n\}$; muestre que $v_n(x)$ es un polinomio de grado n con el coeficiente de x^n igual a $(2n)!/n!$.

(b) Use integración por partes n veces para mostrar que, para cualquier polinomio $q(x)$ de grado menor que n,

$$\int_{-1}^{1} v_n(x)q(x)dx = 0 .$$

Sugerencia: Por ejemplo, cuando $n = 2$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^2}{dx^2}\{(x^2 - 1)^2\}q(x)dx$$

$$= q(x)\frac{d}{dx}\{(x^2 - 1)^2\}\Big|_{-1}^{1} - \{q'(x)(x^2 - 1)^2\}\Big|_{-1}^{1}$$

$$+ \int_{-1}^{1} q''(x)(x^2 - 1)^2 dx .$$

Como $n = 2$, el grado de $q(x)$ es a lo más 1, de modo que $q''(x) \equiv 0$. Así,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^2}{dx^2}\{(x^2 - 1)^2\}q(x)dx = 0 .$$

(c) Use el resultado del problema 31(b) para concluir que $P_n(x) = cv_n(x)$ y muestre que $c = 1/2^n n!$ comparando el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ y $v_n(x)$.

34. Use la fórmula de Rodrigues (52) para deducir la representación (43) de los polinomios de Legendre $P_n(x)$. *Sugerencia*: Por la fórmula binomial,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2 - 1)^n\}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\sum_{m=0}^{n} \frac{n!(-1)^m}{(n - m)!m!}x^{2n-2m}\right\} .$$

35. La función generatriz en (53) para los polinomios de Legendre se puede deducir de la fórmula de recurrencia (51) como sigue. Sea x fijo y hagamos $f(z) := \Sigma_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$. El objetivo es determinar una fórmula explícita para $f(z)$.

(a) Muestre que al multiplicar cada término en la fórmula de recurrencia (51) por z^n y sumar los términos de $n = 1$ a ∞, llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{df}{dz} = \frac{x - z}{1 - 2xz + z^2} f \ .$$

Sugerencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 1)P_{n+1}(x)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)P_{n+1}(x)z^n - P_1(x) = \frac{df}{dz} - x \ .$$

(b) Resuelva la ecuación diferencial deducida en la parte (a) y use las condiciones iniciales $f(0) = P_0(x) \equiv 1$ para obtener $f(z) = (1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$.

36. Determine una solución general en torno de $x = 0$ para la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

hallando primero una solución polinomial y usando después la fórmula para reducción de orden dada en los ejercicios 6.1, problema 31, para hallar una segunda solución (en serie).

37. Los **polinomios de Hermite** $H_n(x)$ son soluciones polinomiales de la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \ .$$

Dichos polinomios son generados mediante

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ .$$

Use esta ecuación para determinar los cuatro primeros polinomios de Hermite.

38. Los **polinomios de Chebyshev** (Tchebichef) $T_n(x)$ son soluciones polinomiales de la ecuación de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \ .$$

Dichos polinomios satisfacen la relación de recurrencia

$$T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \ ,$$

con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Use esta relación de recurrencia para determinar los tres siguientes polinomios de Chebyshev.

39. Los **polinomios de Laguerre** $L_n(x)$ son soluciones polinomiales de la ecuación de Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0 \ .$$

Dichos polinomios satisfacen la fórmula de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \ .$$

Use esta fórmula para determinar los cuatro primeros polinomios de Laguerre.

40. Reducción a la ecuación de Bessel. La clase de ecuaciones de la forma

$$\textbf{(54)} \qquad y''(x) + cx^n y(x) = 0 \ , \qquad x > 0 \ ,$$

donde c y n son constantes positivas, se puede resolver transformando la ecuación en la ecuación de Bessel.

(a) Use primero la sustitución $y = x^{1/2}z$ para transformar (54) en una ecuación en términos de x y z.

(b) En segundo lugar use la sustitución

$$s = \frac{2\sqrt{c}}{n + 2} x^{n/2+1}$$

para transformar la ecuación obtenida en la parte (a) en la ecuación de Bessel

$$s^2\frac{d^2z}{ds^2} + s\frac{dz}{ds} + \left(s^2 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)z = 0 \ , \ s > 0 \ .$$

(c) Podemos dar una solución general de la ecuación de la parte (b) en términos de funciones de Bessel de primer y segundo tipo. Sustituyendo de regreso en s y z, obtenga una solución general de la ecuación (54).

41. (a) Muestre que la sustitución $z(x) = \sqrt{x}\ y(x)$ transforma la ecuación de Bessel (22) en la forma

$$\textbf{(55)} \qquad z'' + \left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}\right)z = 0 \ .$$

(b) Para $x \gg 1$, parecería que la ecuación (55) pudiera ser aproximada por la ecuación

$$\textbf{(56)} \qquad z'' + z = 0 \ .$$

Escriba la solución general de (56), haga $y(x) = z(x)/\sqrt{x}$, e indique si la aproximación mediante la fórmula (56) es plausible.

(c) Para $\nu = \pm 1/2$, la ecuación (55) se reduce a la ecuación (56) exactamente. Relacione esta observación con el problema 25.

Resumen del capítulo

Los problemas con valores iniciales que han sido estudiados y no caen en la categoría de los que pueden “resolverse” (como las ecuaciones con coeficientes constantes o equidimensionales) se pueden analizar interpretando la ecuación diferencial como una receta para calcular las derivadas de orden superior de la función incógnita. El **método de polinomios de Taylor** usa la ecuación para construir una aproximación polinomial que concuerde con los valores iniciales de un número finito de derivadas de la incógnita. Si la ecuación permite la extrapolación de este procedimiento a polinomios de grado arbitrariamente grande, se pueden construir representaciones en **serie de potencias** de la solución.

Series de potencias

Toda serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tiene un **radio de convergencia** ρ, $0 \leq \rho \leq \infty$, tal que la serie converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$ y diverge cuando $|x - x_0| > \rho$. Por el criterio del cociente,

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} ,$$

siempre que este límite exista como número real extendido. Una función $f(x)$ que sea la suma de una serie de potencias en cierto intervalo abierto en torno de x_0 es **analítica en x_0**. Si f es analítica en x_0, su representación en serie de potencias en torno de x_0 es la **serie de Taylor**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Método de serie de potencias para un punto ordinario

En el caso de una ecuación lineal de la forma

(1) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 ,$$

donde p y q son analíticas en x_0, el punto x_0 es un **punto ordinario** y la ecuación tiene un par de soluciones linealmente independientes que pueden expresarse como series de potencias en torno de x_0. Los radios de convergencia de estas soluciones en serie son al menos tan grandes como la distancia de x_0 a la singularidad más cercana (real o compleja) de la ecuación. Para hallar soluciones en serie de potencias de (1), sustituimos $y(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ en (1), agrupamos términos semejantes e igualamos a cero los coeficientes de la serie de potencias resultante. Esto conduce a una relación de recurrencia para los coeficientes a_n, que, en algunos casos, podría dar hasta una fórmula general para los a_n. El mismo método se aplica a la versión no homogénea de (1), siempre que la función de forzamiento sea también analítica en x_0.

Puntos singulares regulares

En la ecuación (1), si p o q dejan de ser analíticas en x_0, entonces x_0 es un **punto singular** de (1). Si x_0 es un punto singular para el que $(x - x_0)p(x)$ y $(x - x_0)^2q(x)$ son ambas analíticas en x_0, entonces x_0 es un **punto singular regular**. La ecuación de Cauchy-Euler,

(2) $$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 , \qquad x > 0 ,$$

tiene un punto singular regular en $x = 0$ y podemos obtener una solución general de (2) sustituyendo $y = x^r$ y examinando las raíces de la ecuación indicial resultante $ar^2 + (b - a)r + c = 0$.

Método de Frobenius

Para una ecuación de la forma (1) con un punto singular regular en x_0, es posible determinar una solución en términos de una serie mediante el **método de Frobenius**. Esto se logra sustituyendo

$$w(r, x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

en (1), hallando una relación de recurrencia para los coeficientes y eligiendo $r = r_1$, la mayor de las raíces de la **ecuación indicial**

(3) $$r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0 \ ,$$

donde $p_0 := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)p(x)$, $q_0 := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x)$.

Determinación de una segunda solución linealmente independiente

Si las dos raíces r_1, r_2 de la ecuación indicial (3) no difieren por un entero, entonces podemos hallar una segunda solución linealmente independiente de (1) haciendo $r = r_2$ en el método de Frobenius. Sin embargo, si $r_1 = r_2$ o $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces el descubrimiento de una segunda solución requiere de un método distinto, que puede ser un procedimiento de reducción de orden o el uso del teorema 7, que da las *formas* de las soluciones.

Funciones especiales

Algunas funciones especiales de la física y la ingeniería que surgen de soluciones en términos de series para ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes polinomiales son las funciones hipergeométricas de Gauss, $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$; las funciones de Bessel $J_\nu(x)$, y polinomios ortogonales como los de Legendre, Chebyshev, Laguerre y Hermite.

PROBLEMAS DE REPASO

1. Determine los cuatro primeros términos no nulos en la aproximación polinomial de Taylor para el problema con valores iniciales dado.

(a) $y' = xy - y^2 \ ; \qquad y(0) = 1 \ .$

(b) $z'' - x^3 z' + xz^2 = 0 \ ; \qquad z(0) = -1 \ ,$
$z'(0) = 1 \ .$

2. Determine todos los puntos singulares de la ecuación dada y clasifíquelos como regulares o irregulares.

(a) $(x^2 - 4)^2 y'' + (x - 4)y' + xy = 0 \ .$

(b) $(\operatorname{sen} x)y'' + y = 0 \ .$

3. Determine al menos los cuatro primeros términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación dada.

(a) $y'' + x^2 y' - 2y = 0 \ .$

(b) $y'' + e^{-x} y' - y = 0 \ .$

4. Encuentre una fórmula general para el coeficiente a_n en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación dada.

(a) $(1 - x^2)y'' + xy' + 3y = 0 \ .$

(b) $(x^2 - 2)y'' + 3y = 0 \ .$

5. Determine al menos los cuatro primeros términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 2$ para una solución general de

$$w'' + (x - 2)w' - w = 0 \ .$$

6. Use la sustitución $y = x^r$ para hallar una solución general de la ecuación dada para $x > 0$.

(a) $2x^2y''(x) + 5xy'(x) - 12y(x) = 0$.

(b) $x^3y'''(x) + 3x^2y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$.

7. Use el método de Frobenius para determinar al menos los cuatro primeros términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación dada, para $x > 0$.

(a) $x^2y'' - 5xy' + (9 - x)y = 0$.

(b) $x^2y'' + (x^2 + 2x)y' - 2y = 0$.

8. Halle la ecuación indicial y sus raíces, y enuncie (pero no calcule) la forma del desarrollo en términos de una serie en torno de $x = 0$ (como en el teorema 7 de la página 475) para dos soluciones linealmente independientes de la ecuación dada para $x > 0$.

(a) $x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y' - 4y = 0$.

(b) $2xy'' + 5y' + xy = 0$.

(c) $(x \operatorname{sen} x)y'' + xy' + (\tan x)y = 0$.

9. Determine al menos los tres primeros términos no nulos en un desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación dada para $x > 0$.

(a) $x^2y'' - x(1 + x)y' + y = 0$.

(b) $xy'' + y' - 2y = 0$.

(c) $2xy'' + 6y' + y = 0$.

(d) $x^2y'' + (x - 2)y = 0$.

10. Exprese una solución general de la ecuación dada mediante funciones hipergeométricas de Gauss o funciones de Bessel.

(a) $x(1 - x)y'' + \left(\frac{1}{2} - 6x\right)y' - 6y = 0$.

(b) $9\theta^2y'' + 9\theta y' + (9\theta^2 - 1)y = 0$.

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. Sabiendo que una solución general de una ecuación lineal de segundo orden no homogénea se puede expresar como una solución particular más que una solución general de la ecuación homogénea correspondiente, ¿qué se puede decir acerca de la forma de una solución general en términos de una serie de potencias para la ecuación no homogénea en torno de un punto ordinario?

2. Analice las ventajas y desventajas de las soluciones en serie de potencias sobre las soluciones numéricas generadas mediante los métodos de Euler o Runge-Kutta.

3. Los factores $x^{0.3}$, $x^{0.3}$, ln x, $x^{-0.3}$ y $x^{0.3+12i}$ surgen en soluciones generadas mediante el método de Frobenius para resolver una ecuación diferencial con 0 como punto singular regular. Analice los problemas que pueden surgir al intentar aproximar tales soluciones mediante los métodos de Euler o Runge-Kutta.

4. Analice los aspectos implicados al intentar usar los polinomios de Taylor (desarrollados en torno de $x_0 = 0$) para estudiar el comportamiento *asintótico* (cuando $t \to \pm\infty$) de las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

PROYECTOS DE GRUPO PARA EL CAPÍTULO 8

A. Soluciones con simetría esférica de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno

En mecánica cuántica, uno está interesado en determinar la función de onda y los estados de energía de un átomo, lo que se logra mediante la ecuación de Schrödinger. En el caso del átomo de hidrógeno, es posible hallar funciones de onda ψ que sólo dependan de r, la distancia del protón al electrón. Tales funciones se llaman funciones con **simetría esférica** y satisfacen la sencilla ecuación

(1) $$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) = \frac{-8m\pi^2}{h^2}\left(E + \frac{e_0^2}{r}\right)\psi \ ,$$

donde e_0^2, m y h son constantes y E, que también es constante, representa la energía del átomo, que aquí suponemos negativa.

(a) Muestre que con las sustituciones

$$r = \frac{h^2}{4\pi^2 m e_0^2}\rho \ , \qquad E = \frac{2\pi^2 m e_0^4}{h^2}\varepsilon \ ,$$

donde ε es una constante negativa, la ecuación (1) se reduce a

$$\frac{d^2(\rho\psi)}{d\rho^2} = -\left(\varepsilon + \frac{2}{\rho}\right)\rho\psi \ .$$

(b) Si $f := \rho\psi$, entonces la ecuación anterior se convierte en

(2) $$\frac{d^2 f}{d\rho^2} = -\left(\varepsilon + \frac{2}{\rho}\right)f \ .$$

Muestre que la sustitución $f(\rho) = e^{-\alpha\rho}g(\rho)$, donde α es una constante positiva, transforma (2) en

(3) $$\frac{d^2 g}{d\rho^2} - 2\alpha\frac{dg}{d\rho} + \left(\frac{2}{\rho} + \varepsilon + \alpha^2\right)g = 0 \ .$$

(c) Si elegimos $\alpha^2 = -\varepsilon$ (ε negativo), entonces (3) queda

(4) $$\frac{d^2 g}{d\rho^2} - 2\alpha\frac{dg}{d\rho} + \frac{2}{\rho}g = 0 \ .$$

Muestre que una solución en serie de potencias $g(\rho) = \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k\rho^k$ (que comienza en $k = 1$) para (4) debe tener coeficientes a_k que satisfagan la relación de recurrencia

(5) $$a_{k+1} = \frac{2(\alpha k - 1)}{k(k+1)}a_k \ , \qquad k \geq 1 \ .$$

(d) Para $a_1 = 1$ y k muy grande, $a_{k+1} \approx (2\alpha/k)a_k$ de modo que $a_{k+1} \approx (2\alpha)^k/k!$, que son los coeficientes de $\rho e^{2\alpha\rho}$. Por lo tanto, g actúa como $\rho e^{2\alpha\rho}$, de modo que $f(\rho) = e^{-\alpha\rho}g(\rho)$ es como $\rho e^{\alpha\rho}$. Regresando aún más, vemos que $\psi \approx e^{\alpha\rho}$. Por lo tanto, cuando $r = h^2\rho/4\pi^2 m e_0^2$ es grande, también lo es ψ. A grandes rasgos, $\psi^2(r)$ es proporcional a la probabilidad de hallar un electrón a distancia r del protón. Así, ¡el argumento anterior implicaría que es más probable que el electrón en un átomo de

hidrógeno se encuentre a una distancia muy grande del protón! Como esto no tiene sentido físico, nos preguntamos: ¿existen valores positivos de α para los que ψ se mantenga acotada cuando r crece?

Muestre que si $\alpha = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $g(\rho)$ es un polinomio de grado n y argumente que entonces ψ se mantiene acotada.

(e) Sean E_n y $\psi_n(\rho)$ el estado de energía y la función de onda, respectivamente, correspondientes a $\alpha = 1/n$. Determine E_n (en términos de las constantes e_0^2, m y h) y $\psi_n(\rho)$ para $n = 1, 2$ y 3.

B. *Ecuación de Airy*

En aerodinámica se encuentra el problema con valores iniciales siguiente para la **ecuación de Airy**:

$$y'' + xy = 0\ , \qquad y(0) = 1\ , \qquad y'(0) = 0\ .$$

(a) Determine los cinco primeros términos no nulos en un desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para la solución y grafique este polinomio para $-10 \leq x \leq 10$.

(b) Use la subrutina Runge-Kutta (véase la sección 5.3) con $h = 0.05$ y aproxime la solución en el intervalo $[0, 10]$, es decir, en los puntos 0.05, 0.1, 0.15, etcétera.

(c) Use la subrutina Runge-Kutta con $h = 0.05$ y aproxime la solución en el intervalo $[-10, 0]$. [*Sugerencia*: Con el cambio de variables $z = -x$, basta aproximar la solución de $y'' - zy = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, en el intervalo $[0, 10]$].

(d) Use su conocimiento de las ecuaciones con coeficientes constantes como base para predecir el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Airy y decida si la aproximación mediante una serie de potencias obtenida en la parte (a) o la aproximación numérica obtenida en las partes (b) y (c) describe mejor el comportamiento real de la solución en el intervalo $[-10, 10]$.

C. *Flexión de una torre*

Una torre se construye con cuatro vigas angulares unidas por las diagonales (véase la figura 8.16). La curva de flexión $y(x)$ para la torre queda descrita mediante la ecuación

(6)
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Pa^2}{EI}y = 0\ , \qquad a < x < a + L\ ,$$

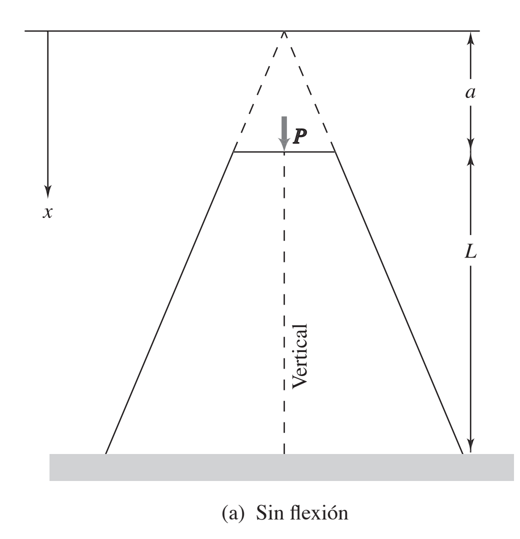
donde x es la coordenada vertical medida hacia abajo desde la parte superior de la torre, y es la flexión con respecto de la vertical que pasa por el centro de la torre sin flexión, L es la altura de la torre, a es la longitud del truncamiento, P es la carga, E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia. Las condiciones de frontera adecuadas para este diseño son

(7) $y(a) = 0\ ,$

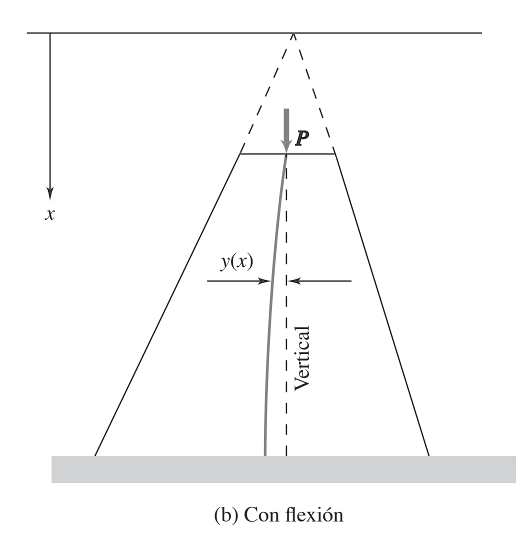
(8) $y'(a + L) = 0\ .$

Es claro que la solución $y(x) \equiv 0$ siempre está a la mano. Sin embargo, cuando la carga P es lo bastante pesada, la torre puede *pandearse* y puede surgir una solución no trivial $y(x)$. Queremos predecir este fenómeno.

(a) Resuelva la ecuación (6). [*Sugerencia*: La ecuación (6) es una ecuación de Cauchy-Euler].



(a) Sin flexión



(b) Con flexión

Figura 8.16 Torre con flexión

(b) Muestre que la primera condición en la frontera (7) implica

$$y = Ax^{1/2}\operatorname{sen}[\beta \ln(x/a)] ,$$

donde A es una constante arbitraria y $\beta := \sqrt{Pa/EI - 1/4}$.

(c) Muestre que la segunda condición en la frontera (8) implica

$$A\left\{\tan\left[\beta \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right] + 2\beta\right\} = 0 .$$

(d) Use el resultado de la parte (c) para justificar que *no hay flexión* (es decir, la única posibilidad es $A = 0$) si $0 < \beta < \beta_c$, donde β_c es el menor número real positivo que anula la expresión entre llaves.

(e) El valor de la carga correspondiente a β_c es la **carga crítica** P_c. Determine P_c en términos de β_c, a, E e I.

(f) Halle la carga crítica P_c si $a = 10$, $L = 40$ y $EI = 1{,}000$.

D. *Resortes vencidos y funciones de Bessel*

En los problemas 30 y 31 de los ejercicios 8.4, página 457, analizamos un modelo para un sistema masa-resorte con un resorte vencido. Si no hay amortiguamiento, el desplazamiento $x(t)$ al instante t queda descrito mediante la ecuación

(9) $$mx''(t) + ke^{-\eta t}x(t) = 0 ,$$

donde m, k y η son constantes positivas. La solución general de esta ecuación se puede expresar mediante funciones de Bessel.

(a) El coeficiente de x sugiere un cambio de variable de la forma $s = \alpha e^{\beta t}$. Muestre que (9) se transforma en

(10)
$$\beta^2 s^2 \frac{d^2x}{ds^2} + \beta^2 s \frac{dx}{ds} + \frac{k}{m}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{-\eta/\beta} x = 0 \; .$$

(b) Muestre que al elegir α y β de modo que

$$\frac{-\eta}{\beta} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{k}{m\beta^2\alpha^{-\eta/\beta}} = 1$$

la ecuación (10) se transforma en la ecuación de Bessel de orden 0 en términos de s y x.

(c) Use el resultado de la parte (b) para mostrar que una solución general de (9) está dada por

$$x(t) = c_1 J_0\left(\frac{2}{\eta}\sqrt{k/m}\,e^{-\eta t/2}\right) + c_2 Y_0\left(\frac{2}{\eta}\sqrt{k/m}\,e^{-\eta t/2}\right) ,$$

donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de orden 0 del primer y segundo tipo, respectivamente.

(d) Analice el comportamiento del desplazamiento $x(t)$ para c_2 positivo, negativo y cero.

(e) Compare el comportamiento del desplazamiento $x(t)$ para η un número positivo pequeño y η un número positivo grande.

CAPÍTULO 9

Métodos matriciales para sistemas lineales

9.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo regresamos al análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales. Cuando las ecuaciones del sistema son *lineales*, el álgebra de matrices proporciona una notación compacta para expresar el sistema. La misma notación sugiere nuevas y elegantes formas de caracterizar las propiedades de la solución, así como novedosas y eficaces técnicas para obtener soluciones explícitas.

En el capítulo 5 analizamos situaciones físicas donde dos tanques con soluciones salinas estaban conectados entre sí y se bombeaba de modo que en última instancia se vaciara el contenido de sal en cada tanque. Tomando en cuenta los flujos hacia y desde cada tanque, dedujimos un sistema de ecuaciones diferenciales para los contenidos de $(x(t)$ y $y(t))$ de cada tanque; un modelo típico es

(1)
$$\begin{aligned} dx/dt &= -4x + 2y \ , \\ dy/dt &= 4x - 4y \ . \end{aligned}$$

Exprese este sistema en notación matricial como una única ecuación.

El lado derecho del primer miembro (1) posee una estructura matemática familiar por el cálculo vectorial; a saber, es el **producto punto**† de dos vectores:

(2)
$$-4x + 2y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \ .$$

†Recuerde que el producto punto de dos vectores **u** y **v** es igual a la longitud de **u** por la longitud de **v** por el coseno del ángulo entre **u** y **v**. Sin embargo, es más fácil calcularlo a partir de los *componentes* de **u** y **v** mediante el "producto interior" indicado en la ecuación (2).

De manera análoga, el segundo lado derecho de (1) es el producto punto

$$4x - 4y = \begin{bmatrix} 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} .$$

La frecuente aparición en matemáticas de arreglos de productos punto, como el que aparece en el sistema (1), condujo al desarrollo del **álgebra de matrices**, una disciplina matemática cuya operación básica (el producto de matrices) es un arreglo de un conjunto de productos punto de acuerdo con el siguiente plan:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + 2y \\ 4x - 4y \end{bmatrix} .$$

En general, el producto de una **matriz** (es decir, un arreglo rectangular de m por n números) y un *vector columna* se define como la colección de productos punto de los *renglones* de la matriz con el vector, ordenados como un vector columna:

$$\begin{bmatrix} \textbf{renglón \# 1} \\ \textbf{renglón \# 2} \\ \vdots \\ \textbf{renglón \# m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{v} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \textbf{renglón \# 1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} \\ \begin{bmatrix} \textbf{renglón \# 2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \textbf{renglón \# m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} ,$$

donde el vector **v** tiene n componentes; el producto punto de dos vectores de dimensión n se calcula de manera evidente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n .$$

Podemos usar la notación para el producto de matrices para escribir el sistema (1) para los tanques interconectados como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

El siguiente ejemplo demuestra una implantación de esta notación para dimensión 4. Observe que los coeficientes en el sistema lineal no tienen que ser constantes.

EJEMPLO 1 Expresar el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + t^2x_2 + (4t + e^t)x_4 , \\ x_2' &= (\text{sen}\, t)x_2 + (\cos t)x_3 , \\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 , \\ x_4' &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

como una ecuación matricial.

SOLUCIÓN Expresamos el lado derecho del primer miembro de (3) como el producto punto

$$2x_1 + t^2x_2 + (4t + e^t)x_4 = \begin{bmatrix} 2 & t^2 & 0 & (4t + e^t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} .$$

Los otros productos punto se definen de manera análoga y la forma matricial está dada por

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & t^2 & 0 & (4t + e^t) \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} . \blacksquare$$

En general, si un sistema de ecuaciones diferenciales se expresa como

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \ , \end{aligned}$$

se dice que es un sistema lineal homogéneo en **forma normal**.[†] La formulación matricial de tal sistema es entonces

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \, ,$$

donde **A** es la **matriz de coeficientes**

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

y **x** es el vector solución

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Observe que usamos $\mathbf{x}'$ para denotar el vector de derivadas

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} .$$

[†]En la sección 5.6, página 284 se definió la forma normal para sistemas generales.

EJEMPLO 2 Expresar la ecuación diferencial para el oscilador masa-resorte no amortiguado sin forzamiento (recuerde la sección 4.1, página 152)

(4) $my'' + ky = 0$

como un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden en forma normal expresado en notación matricial.

SOLUCIÓN Debemos expresar la *segunda* derivada, y'', como una *primera* derivada para formular (4) como un sistema de primer orden. Esto es fácil: la aceleración y'' es la derivada de la *velocidad* $v = y'$, de modo que (4) se convierte en

(5) $mv' + ky = 0$.

Ahora podemos formar el sistema de primer orden identificando v con y' y agregando esto a (5):

$$\begin{aligned} y' &= v \\ mv' &= -ky . \end{aligned}$$

Para escribir este sistema en forma normal y expresarlo como una ecuación matricial, se tiene que dividir la segunda ecuación entre la masa m:

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} . \quad \blacksquare$$

En general, se acostumbra escribir una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

como un sistema equivalente en forma normal definiendo las primeras $(n - 1)$ derivadas de y (incluyendo a la propia y, la derivada 0-ésima) como nuevas incógnitas:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) , \\ x_2(t) &= y'(t) , \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) . \end{aligned}$$

Entonces el sistema consta de la identificación de $x_j(t)$ como la derivada de $x_{j-1}(t)$, junto con la ecuación diferencial original expresada en estas variables (y dividida entre $a_n(t)$):

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 , \\ x_2' &= x_3 , \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n , \\ x_n' &= -\frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n . \end{aligned}$$

Para sistemas de dos o más ecuaciones diferenciales de orden superior, se aplica el mismo procedimiento a cada función incógnita en orden; un ejemplo aclarará este punto.

EJEMPLO 3 Ya hemos mostrado que el oscilador masa-resorte que se muestra en la figura 5.18 de la página 287 queda descrito mediante el sistema

$$\textbf{(6)}\qquad \begin{aligned} &2\frac{d^2x}{dt^2} + 6x - 2y = 0\ , \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2y - 2x = 0\ . \end{aligned}$$

Escribir (6) en notación matricial.

SOLUCIÓN Introducimos una notación para las derivadas de orden bajo:

$$\textbf{(7)}\qquad x_1 = x\ , \qquad x_2 = x'\ , \qquad x_3 = y\ , \qquad x_4 = y'\ .$$

Con estas variables, el sistema (6) establece que

$$\textbf{(8)}\qquad \begin{aligned} &2x_2' + 6x_1 - 2x_3 = 0\ , \\ &x_4' + 2x_3 - 2x_1 = 0\ . \end{aligned}$$

Así, la forma normal es

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2\ , \\ x_2' &= -3x_1 + x_3\ , \\ x_3' &= x_4\ , \\ x_4' &= 2x_1 - 2x_3 \end{aligned}$$

o, en notación matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\ . \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS 9.1

En los problemas 1 a 6, exprese el sistema de ecuaciones diferenciales dado en notación matricial.

1. $x' = 7x + 2y\ ,$
$y' = 3x - 2y\ .$

2. $x' = y\ ,$
$y' = -x\ .$

3. $x' = x + y + z\ ,$
$y' = 2z - x\ ,$
$z' = 4y\ .$

4. $x_1' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4\ ,$
$x_2' = x_1 + x_4\ ,$
$x_3' = \sqrt{\pi}x_1 - x_3\ ,$
$x_4' = 0\ .$

5. $x' = (\operatorname{sen} t)x + e^t y\ ,$
$y' = (\cos t)x + (a + bt^3)y\ .$

6. $x_1' = (\cos 2t)x_1\ ,$
$x_2' = (\operatorname{sen} 2t)x_2\ ,$
$x_3' = x_1 - x_2\ .$

En los problemas 7 a 10, exprese la ecuación diferencial de orden superior dada como un sistema matricial en forma normal.

7. La ecuación para el oscilador masa-resorte amortiguado $my'' + by' + ky = 0$.

8. La ecuación de Legendre $(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$.

9. La ecuación de Airy $y'' - ty = 0$.

10. La ecuación de Bessel $y'' + \dfrac{1}{t}y' + \left(1 - \dfrac{n^2}{t^2}\right)y = 0$.

En los problemas 11 a 13, exprese el sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior dado como un sistema matricial en forma normal.

11. $x'' + 3x + 2y = 0$,
$y'' - 2x = 0$.

12. $x'' + 3x' - y' + 2y = 0$,
$y'' + x' + 3y' + y = 0$.

13. $x'' - 3x' + t^2y - (\cos t)x = 0$,
$y''' + y'' - tx' + y' + e^tx = 0$.

9.2 REPASO 1: ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

En ésta y la siguiente sección revisaremos algunos hechos básicos relativos a los sistemas algebraicos lineales y el álgebra de matrices que serán de utilidad al resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales en forma normal. Los lectores con experiencia en estas áreas pueden pasar directamente a la sección 9.4.

Un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

(donde los a_{ij} y b_i son constantes) es un *sistema lineal de n ecuaciones algebraicas* en las n incógnitas $x_1, x_2,\ldots, x_n$. Es bien conocido el procedimiento para resolver el sistema mediante métodos de eliminación. Aquí describiremos una implantación particularmente conveniente del método, llamada *algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan*.[†] La idea básica de esta formulación consiste en usar la primera ecuación para eliminar x_1 en las demás ecuaciones; luego usamos la segunda ecuación para eliminar x_2 en las demás, y así sucesivamente. Si todo va bien, el sistema resultante quedará "desacoplado" y los valores de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serán evidentes. Un breve ejemplo aclarará esto.

EJEMPLO 1 Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 16 , \\ 4x_1 + 15x_2 + 19x_3 &= 38 , \\ 2x_1 \qquad\quad + 3x_3 &= 6 . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Restamos 2 veces la primera ecuación de la segunda para eliminar x_1 de esta última. De manera similar, eliminamos x_1 de la tercera ecuación restando 1 por la primera ecuación de ella:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 16 , \\ 3x_2 + 3x_3 &= 6 , \\ -6x_2 - 5x_3 &= -10 . \end{aligned}$$

[†]El algoritmo de Gauss-Jordan no es el más rápido ni el más preciso de los algoritmos para resolver un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, pero para las soluciones realizadas a mano tiene muchas ventajas pedagógicas. Por lo general, la *regla de Cramer*, descrita en el apéndice C, es mucho más rápida.

Ahora restamos múltiplos de la segunda ecuación de la primera y tercera para eliminar x_2 en ellas, los múltiplos adecuados son 2 y -2, respectivamente:

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 4 \ , \\ 3x_2 + 3x_3 &= 6 \ , \\ x_3 &= 2 \ . \end{aligned}$$

Por último eliminamos x_3 de las dos primeras ecuaciones restando múltiplos (2 y 3, respectivamente) de la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad &= 0 \ , \\ 3x_2 \quad &= 0 \ , \\ x_3 &= 2 \ . \end{aligned}$$

Ahora el sistema ha quedado desacoplado; es decir, podemos resolver cada ecuación por separado:

$$x_1 = 0 \ , \qquad x_2 = 0 \ , \qquad x_3 = 2 \ . \ \blacksquare$$

Hay dos complicaciones que pueden perturbar la ejecución directa del algoritmo de Gauss-Jordan. La primera ocurre cuando la variable que debe eliminarse, digamos x_j, no aparece en la ecuación j. Por lo general, la solución es obvia: utilizamos una de las ecuaciones posteriores para eliminar x_j. El ejemplo 2 ilustra esta maniobra.

EJEMPLO 2 Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \ , \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \qquad &= 1 \ , \\ -2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 &= 4 \ , \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad &= -3 \ . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Eliminamos la primera incógnita x_1 de las tres últimas ecuaciones restando múltiplos de la primera:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \ , \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \ , \\ 4x_4 &= 4 \ , \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3 \ . \end{aligned}$$

En este caso no podemos usar la segunda ecuación para eliminar la segunda incógnita, pues x_2 no está presente. La siguiente ecuación que *sí* contiene a x_2 es la cuarta, de modo que intercambiamos la segunda y la cuarta ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \ , \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3 \ , \\ 4x_4 &= 4 \ , \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \ , \end{aligned}$$

y procedemos para eliminar x_2:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\;\; + 6x_3 + 2x_4 &= 3 \ , \\ 2x_2 - 2x_3 - \;\; x_4 &= -3 \ , \\ 4x_4 &= 4 \ , \\ 2x_3 + \;\; x_4 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Para eliminar x_3, debemos hacer un nuevo intercambio,

$$\begin{aligned} x_1 \quad\;\; + 6x_3 + 2x_4 &= 3 \ , \\ 2x_2 - 2x_3 - \;\; x_4 &= -3 \ , \\ 2x_3 + \;\; x_4 &= 1 \ , \\ 4x_4 &= 4 \ , \end{aligned}$$

y eliminamos, en orden, x_3 y x_4. Esto da

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad - x_4 &= 0 \ , \\ 2x_2 \quad\quad\quad\; &= -2 \ , \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \ , \\ 4x_4 &= 4 \ , \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &= 1 \ , \\ 2x_2 \quad\quad &= -2 \ , \\ 2x_3 \quad &= 0 \ , \\ 4x_4 &= 4 \ . \end{aligned}$$

La solución de las ecuaciones desacopladas es

$$x_1 = 1 \ , \qquad x_2 = -1 \ , \qquad x_3 = 0 \ , \qquad x_4 = 1 \ . \quad ■$$

La otra complicación que puede surgir para aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan es más profunda. ¿Qué ocurre si cuando tenemos planeado eliminar la incógnita x_j, ella no está en *todas* las ecuaciones posteriores? Lo primero que debemos hacer es eliminar la *siguiente* incógnita x_{j+1}, como muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan al sistema

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \ , \\ 2x_1 + 4x_2 \quad\quad &= 6 \ , \\ -4x_1 - 8x_2 + x_3 &= -10 \ . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Eliminamos x_1 de la manera usual:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \ , \\ -x_3 &= -2 \ , \\ 3x_3 &= 6 \ . \end{aligned}$$

Como x_2 no aparece en la segunda y la tercera ecuaciones, usamos la segunda ecuación para eliminar x_3:

$$\textbf{(2)} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 \quad\quad &= 6 \ , \\ -x_3 &= -2 \ , \\ 0 &= 0 \ . \end{aligned}$$

¿Cómo debemos interpretar el sistema (2)? La última ecuación no contiene información, por supuesto, de modo que la ignoramos.[†] La segunda ecuación implica que $x_3 = 2$.

La primera ecuación implica que $x_1 = 3 - 2x_2$; pero no tenemos una ecuación para x_2. Es claro que x_2 es una variable "libre", y que podemos asignarle *cualquier* valor, mientras x_1 sea igual a $3 - 2x_2$. Así, (1) tiene una infinidad de soluciones y una forma conveniente de caracterizarlas es

$$x_1 = 3 - 2s\ , \qquad x_2 = s\ , \qquad x_3 = 2\ ; \quad -\infty < s < \infty\ .$$

Debemos resaltar que podemos obtener una solución equivalente considerando a x_1 como la variable libre, digamos $x_1 = s$, y haciendo $x_2 = (3 - s)/2$, $x_3 = 2$. ■

El último ejemplo sólo demuestra todas las características que hemos hallado.

EJEMPLO 4 Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0\ , \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 1\ , \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 &= -3\ , \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 0\ . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Usamos la primera ecuación para eliminar x_1:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0\ , \\ - x_4 &= 1\ , \\ 3x_4 &= -3\ , \\ 0 &= 0\ . \end{aligned}$$

Como x_2 *y* x_3 no aparecen en las ecuaciones posteriores, usamos la segunda ecuación para eliminar x_4.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &= 2\ , \\ -x_4 &= 1\ , \\ 0 &= 0\ , \\ 0 &= 0\ . \end{aligned}$$

No tenemos restricciones sobre x_2 ni sobre x_3; así, las consideramos como variables libres y caracterizamos las soluciones como

$$x_1 = 2 + s - 2t\ , \qquad x_2 = s\ , \qquad x_3 = t\ , \qquad x_4 = -1, \quad -\infty < s, t < \infty\ . \ ■$$

Para concluir, observemos que si la ejecución del algoritmo de Gauss-Jordan produce resultados como $0 = 1$ (o $0 = k$, donde $k \neq 0$), el sistema original no tiene soluciones; es inconsistente. Esto se analiza con detalle en el problema 12.

[†]La aparición de la identidad $0 = 0$ en el algoritmo de Gauss-Jordan implica que una de las ecuaciones originales era *redundante*. En este caso, el lector puede observar que la última ecuación de (1) se podría deducir restando 3 veces la segunda ecuación de la primera.

EJERCICIOS 9.2

En los problemas 1 a 11, determine todas las soluciones del sistema usando el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan.

1. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \ , \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \ , \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \ . \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \ , \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 0 \ , \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \ , \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \ . \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -3 \ , \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \ , \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \ . \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 0 \ , \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \ , \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \ , \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \ . \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \ , \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \ , \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \ , \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 0 \ , \\ -3x_1 + 9x_2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \ , \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \ , \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} (1-i)x_1 + 2x_2 &= 0 \ , \\ -x_1 - (1+i)x_2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &- i \ , \\ 2x_1 + 3x_2 - ix_3 &= 0 \ , \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= i \ . \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad + x_3 &= -1 \ , \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \ , \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

12. Use el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan para mostrar que los siguientes sistemas de ecuaciones son inconsistentes. Es decir, demuestre que la existencia de una solución implicará una contradicción matemática.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \ , \\ -6x_1 + 3x_2 &= 4 \ . \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad + x_3 &= -1 \ , \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \ , \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 1 \ . \end{aligned}$$

13. Use el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan para mostrar que el siguiente sistema de ecuaciones tiene una única solución para $r = 2$, pero una infinidad de soluciones para $r = 1$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= rx_1 \ , \\ x_1 - 2x_2 &= rx_2 \ . \end{aligned}$$

14. Use el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan para mostrar que el siguiente sistema de ecuaciones tiene una única solución para $r = -1$, pero una infinidad de soluciones para $r = 2$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= rx_1 \ , \\ x_1 \qquad + x_3 &= rx_2 \ , \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= rx_3 \ . \end{aligned}$$

9.3 REPASO 2: MATRICES Y VECTORES

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números, ordenados en renglones y columnas. Una matriz $m \times n$ (es decir, una matriz con m renglones y n columnas) se denota por lo general como

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} ,$$

donde el elemento en el renglón i y la columna j es a_{ij}. También se usa la notación $[a_{ij}]$ para designar a **A**. Las matrices con las que trabajaremos constan por lo general de números reales, pero en ciertos casos también permitiremos el uso de entradas complejas.

Ciertas matrices tienen un interés particular: las **matrices cuadradas**, que tienen el mismo número de renglones que de columnas; las **matrices diagonales**, que son matrices cuadradas que sólo tienen entradas nulas fuera de la diagonal principal (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$), y los **vectores** (columna), que son matrices $n \times 1$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

entonces **A** es una matriz cuadrada, **B** es una matriz diagonal y **x** es un vector. Una matriz $m \times n$ cuyas entradas son todas nulas es llamada **matriz nula** y se denota **0**. Por razones de consistencia, denotaremos las matrices con letras mayúsculas en negritas, como **A**, **B**, **C**, **I**, **X** y **Y**, y reservaremos las minúsculas en negritas para los vectores, como **c**, **x**, **y** y **z**.

Álgebra de matrices

Suma y multiplicación escalar de matrices. Las operaciones de suma y multiplicación escalar de matrices son muy directas. La suma se realiza sumando los elementos correspondientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Formalmente, la *suma* de dos matrices $m \times n$ está dada por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] .$$

(La única novedad es que la suma no está definida para dos matrices cuyas dimensiones m, n no coincidan.)

Para multiplicar una matriz por un escalar (un número), simplemente multiplicamos cada elemento de la matriz por el número:

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, $r\mathbf{A} = r[a_{ij}] = [ra_{ij}]$. La notación $-\mathbf{A}$ representa $(-1)\mathbf{A}$.

Propiedades de la suma y multiplicación escalar de matrices. La suma y multiplicación escalar de matrices no son más que disposiciones de orden que cumplen las propiedades algebraicas usuales. Si **A**, **B** y **C** son matrices $m \times n$ y r, s son escalares, entonces

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, && \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \\ &\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, && \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \\ &r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}, && (r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}, \\ &r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A} = s(r\mathbf{A}). && \end{aligned}$$

Multiplicación de matrices. El producto de matrices es lo que hace del álgebra de matrices algo interesante y útil. En la sección 9.1 indicamos que el producto de una matriz **A** y un vector columna **x** es el vector columna formado por los productos punto de los renglones de **A** con **x**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 0 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix} .$$

Más en general, el producto de dos matrices **A** y **B** se forma mediante el arreglo de productos punto de los *renglones* del primer "factor" **A** con las *columnas* del segundo factor **B**; el producto punto del i-ésimo renglón de **A** con la j-ésima columna de **B** se escribe como la entrada ij-ésima del producto **AB**:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{2} & x \\ -1 & \mathbf{-1} & y \\ 4 & \mathbf{1} & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+4 & \mathbf{2+0+1} & x+0+z \\ 3+1+8 & 6+1+2 & 3x-y+2z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & \mathbf{3} & x+z \\ 12 & 9 & 3x-y+2z \end{bmatrix} .$$

Observe que **AB** sólo está definido cuando el número de columnas de **A** coincide con el número de renglones de **B**. Una fórmula útil para el producto de una matriz $m \times n$ **A** y una matriz $n \times p$ **B** es

$$\mathbf{AB} := [c_{ij}] , \qquad \text{donde} \quad c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} .$$

El producto punto del i-ésimo renglón de **A** y la j-ésima columna de **B** aparece en la expresión de "suma de productos" para c_{ij}.

Como **AB** se calcula en términos de los *renglones* del primer factor y las *columnas* del segundo factor, no debe sorprendernos que, en general, **AB** no es igual a **BA** (la multiplicación de matrices no *conmuta*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} , \qquad \text{pero} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

De hecho, las dimensiones de **A** y **B** pueden hacer que uno u otro de estos productos quede indefinido:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} ; \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ no está definido } .$$

En este mismo sentido, no sería de esperar que (**AB**)**C** fuese igual a **A**(**BC**), pues en (**AB**)**C** calculamos los productos punto con las *columnas* de **B**, mientras que en **A**(**BC**) utilizamos los *renglones* de **B**. Así, una agradable sorpresa es que *esta complicación no surge*, y las reglas de "agrupación de paréntesis" son las acostumbradas:

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$	(Asociatividad)
$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$	(Distributividad)
$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$	(Distributividad)
$(r\mathbf{A})\mathbf{B} = r(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(r\mathbf{B})$	(Asociatividad)

En resumen, el álgebra de matrices es muy similar al álgebra común de los números, *excepto que nunca podemos suponer que podemos cambiar el orden de los factores matriciales*.

Matrices como operadores lineales. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$, y sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ vectores $n \times 1$. Entonces $\mathbf{Ax}$ es un vector $m \times 1$, y podemos pensar la multiplicación por $\mathbf{A}$ como una definición de un operador, que asocia vectores $n \times 1$ con vectores $m \times 1$. Una consecuencia de las propiedades de distributividad y asociatividad es que la multiplicación por $\mathbf{A}$ define un **operador lineal**, pues $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$ y $\mathbf{A}(r\mathbf{x}) = r(\mathbf{Ax})$. Además, si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{B}$ es una matriz $n \times p$, entonces la matriz $m \times p$ $\mathbf{AB}$ define un operador lineal que es la composición del operador lineal definido por $\mathbf{B}$ con el operador lineal definido por $\mathbf{A}$. Es decir, $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$, donde $\mathbf{x}$ es un vector $p \times 1$.

Algunos ejemplos de operaciones lineales son:

(i) alargar o contraer los componentes de un vector por factores constantes;
(ii) girar un vector con cierto ángulo en torno de un eje fijo;
(iii) reflejar un vector en un espejo plano.

La formulación matricial de los sistemas algebraicos lineales. El álgebra de matrices fue desarrollada como una herramienta conveniente para expresar y analizar los sistemas algebraicos lineales. Observe que el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1\ , \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1\ , \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

se puede escribir como el producto de matrices

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

En general, expresamos el sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\ , \\ &\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

en notación matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}$ es la *matriz de coeficientes*, $\mathbf{x}$ es el vector de incógnitas y $\mathbf{b}$ es el vector de constantes que aparece del lado derecho:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, decimos que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es *homogéneo* (de manera similar a la nomenclatura de la sección 4.2).

Identidad para las matrices. Existe una "identidad multiplicativa" en el álgebra de matrices, a saber, una matriz diagonal cuadrada $\mathbf{I}$ con unos en la diagonal principal. Al multiplicar $\mathbf{I}$ por la derecha o la izquierda por cualquier otra matriz (con dimensiones compatibles), se reproduce esta última matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Usaremos la notación $\mathbf{I}_n$ si es conveniente especificar la dimensión $n \times n$ de la matriz identidad.)

Inversa de matrices. Algunas matrices *cuadradas* $\mathbf{A}$ se pueden asociar con otras matrices (cuadradas) $\mathbf{B}$ con la propiedad de que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$:

$$\textbf{(2)} \qquad \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando esto ocurre, se puede mostrar que

(i) $\mathbf{B}$ es la *única* matriz tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, y
(ii) $\mathbf{B}$ satisface además $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

En ese caso, decimos que $\mathbf{B}$ es la inversa de $\mathbf{A}$ y escribimos $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

No toda matriz tiene una inversa, la matriz nula $\mathbf{0}$, por ejemplo, nunca puede satisfacer la ecuación $\mathbf{0B} = \mathbf{I}$. Una matriz que no tiene inversa es **singular**.

Si conocemos la inversa de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, podemos calcular directamente la solución mediante $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, como muestra la siguiente deducción:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ implica que } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \text{ lo que a su vez implica } \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Por ejemplo, podemos usar (2) para resolver (1) de manera bastante eficiente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Si conocemos $\mathbf{A}^{-1}$, es claro que este cálculo es más sencillo que aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan de la sección anterior. Así, parece que es ventajoso hallar inversas de matrices. Algunas inversas se pueden obtener directamente a partir de la interpretación de la matriz como un operador lineal. Por ejemplo, la inversa de una matriz que gira un vector es la matriz que gira en la dirección opuesta. Una matriz que realiza una reflexión es su propia inversa (¿qué pasa si reflejamos dos veces?). Pero en general hay que utilizar un algoritmo para calcular la inversa de una matriz. La estrategia subyacente en este algoritmo se basa en la observación de que si $\mathbf{X}$ denota la inversa de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{X}$ debe satisfacer la ecuación $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, así, la determinación de $\mathbf{X}$ equivale a resolver n sistemas lineales de ecuaciones para las columnas $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{Ax}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{Ax}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La implantación de esta operación es eficaz mediante la siguiente variante del algoritmo de Gauss-Jordan.

Determinación de la inversa de una matriz. Por una **operación por renglón** entendemos una de las siguientes:

(a) Intercambiar dos renglones de la matriz

(b) Multiplicar un renglón de la matriz por un escalar distinto de cero

(c) Sumar un múltiplo escalar de un renglón de la matriz a otro renglón.

Si la matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ tiene una inversa, entonces podemos determinar $\mathbf{A}^{-1}$ realizando operación por renglón sobre la matriz $n \times 2n$ $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ obtenida al escribir juntas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$. En particular, realizamos operaciones por renglón sobre la matriz $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ hasta que los primeros n renglones y columnas formen la matriz identidad; es decir, hasta que la nueva matriz sea $[\mathbf{I} \mid \mathbf{B}]$. Entonces, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. Debemos notar que si este procedimiento no puede producir una matriz de la forma $[\mathbf{I} \mid \mathbf{B}]$, entonces $\mathbf{A}$ no tiene inversa.

EJEMPLO 1 Determinar la inversa de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Primero se forma la matriz $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}]$ y se *reduce por renglones* a $[\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1}]$. Hacemos lo siguiente:

Formamos la matriz $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}]$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Restamos el primer renglón del segundo y el tercero para obtener
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Sumamos 2 veces el segundo renglón al tercero para obtener
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Restamos 2 veces el segundo renglón del primero para obtener
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicamos el tercer renglón por 1/2 para obtener
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Sumamos el tercer renglón al primero y luego restamos el tercer renglón al segundo para obtener
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

La matriz que aparece en color es $\mathbf{A}^{-1}$. (Compare con la ecuación (2).) ■

Determinantes. Para una matriz 2×2 $\mathbf{A}$, el **determinante de A**, que se denota det **A** o $|\mathbf{A}|$, se define como

$$\det \mathbf{A} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Podemos definir el determinante de una matriz 3×3 $\mathbf{A}$ en términos de su desarrollo por cofactores con respecto de su primera columna; es decir,

$$\det \mathbf{A} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3-5) - 2(0-10) + 1(0-6) = 6 \ .$$

El determinante de una matriz $n \times n$ se puede definir de manera similar mediante un desarrollo por cofactores que implica determinantes de orden $(n-1)$. Sin embargo, una forma más práctica de evaluar los determinantes cuando n es grande implica la reducción por renglones de la matriz a su forma triangular superior. Como aquí trabajaremos principalmente con matrices 2×2 y 3×3, referimos al lector a un texto de álgebra lineal elemental para un análisis más detallado de la evaluación de los determinantes.[†]

Es laborioso evaluar directamente los determinantes (en particular los de orden superior). Tienen una interpretación geométrica: det **A** es el volumen (en el espacio de dimensión n) del paralelepípedo cuyas aristas están dadas por los vectores columna de **A**. Pero su principal valor reside en el papel que juegan en el siguiente teorema, que resume muchos de los resultados de álgebra lineal que necesitaremos, y en la regla de Cramer, que describimos en el apéndice C.

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Teorema 1. Sea **A** una matriz $n \times n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) **A** es singular (no tiene inversa).
(b) El determinante de **A** es igual a cero.
(c) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$).
(d) Las columnas (renglones) de A forman un conjunto linealmente dependiente.

En la parte (d), la afirmación de que las n columnas de **A** son linealmente dependientes significa que existen escalares, $c_1, \ldots, c_n$ *no todos iguales a cero,* tales que

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \ ,$$

donde $\mathbf{a}_j$ es el vector que forma la j-ésima columna de **A**.

Si **A** es una matriz cuadrada singular (de modo que det $\mathbf{A} = 0$), entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene una infinidad de soluciones. En efecto, el teorema 1 afirma que existe un vector $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax}_0 = 0$, y podemos obtener una infinidad de soluciones distintas de ésta multiplicando $\mathbf{x}_0$ por cualquier escalar, es decir, haciendo $\mathbf{x} = c\mathbf{x}_0$. Además, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ no tiene soluciones o tiene una infinidad de soluciones de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h \ ,$$

donde $\mathbf{x}_p$ es una solución *particular* de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x}_h$ es cualquiera de la infinidad de soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ (véase el problema 15). El parecido entre esta situación y la de resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas debe ser claro.

[†]Véase *Linear Algebra and Its Applications*, 2a. edición, por David C. Lay (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997).

A manera de ilustración, en el ejemplo 3 de la sección 9.2 (página 534) vimos que el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

tiene soluciones

$$x_1 = 3 - 2s \ , \qquad x_2 = s \ , \qquad x_3 = 2 \ ; \quad -\infty < s < \infty \ .$$

Si escribimos esto en notación matricial, podemos identificar los vectores $\mathbf{x}_p$ y $\mathbf{x}_h$ mencionados anteriormente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 - 2s \\ s \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h \ .$$

Observe además que el determinante de **A** realmente se anula,

$$\det \mathbf{A} = 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 4\cdot 2 + 1\cdot 0 = 0 \ ,$$

y que la dependencia lineal de las columnas de **A** queda exhibida por la identidad

$$-2\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Si **A** es una matriz cuadrada no singular (es decir, **A** tiene una inversa y $\det \mathbf{A} \neq 0$), entonces el sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como su única solución. Más en general, cuando $\det \mathbf{A} \neq 0$, el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene una única solución (a saber, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$).

Cálculo de matrices

Si permitimos que las entradas $a_{ij}(t)$ de una matriz $\mathbf{A}(t)$ sean funciones de la variable t, entonces $\mathbf{A}(t)$ es una **función matricial** de t. De manera análoga, si las entradas $x_i(t)$ de un vector $\mathbf{x}(t)$ son funciones de t, entonces $\mathbf{x}(t)$ es una **función vectorial** de t.

Estas funciones matriciales y vectoriales tienen un cálculo similar al de las funciones con valores reales. Una matriz $\mathbf{A}(t)$ es **continua en** t_0 si cada entrada $a_{ij}(t)$ es continua en t_0. Además, $\mathbf{A}(t)$ es **diferenciable en** t_0 si cada entrada $a_{ij}(t)$ es diferenciable en t_0, y escribimos

$$\textbf{(3)} \qquad \frac{d\mathbf{A}}{dt}(t_0) = \mathbf{A}'(t_0) := [a'_{ij}(t_0)] \ .$$

De manera similar, definimos

$$\textbf{(4)} \qquad \int_a^b \mathbf{A}(t)dt := \left[\int_a^b a_{ij}(t)dt\right] .$$

EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} t^2+1 & \cos t \\ e^t & 1 \end{bmatrix}$.

Calcular: **(a)** $\mathbf{A}'(t)$. **(b)** $\int_0^1 \mathbf{A}(t)\,dt$.

SOLUCIÓN Usamos las fórmulas (3) y (4) para calcular

$$\textbf{(a)}\ \mathbf{A}'(t) = \begin{bmatrix} 2t & -\operatorname{sen} t \\ e^t & 0 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(b)}\ \int_0^1 \mathbf{A}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \operatorname{sen} 1 \\ e-1 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Mostrar que $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \operatorname{sen} \omega t \end{bmatrix}$ es una solución de la ecuación diferencial matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN Basta verificar que $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ son la misma función vectorial:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -\omega \operatorname{sen} \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \operatorname{sen} \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \operatorname{sen} \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Las propiedades básicas de la derivación son válidas para las funciones matriciales.

FÓMULAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES MATRICIALES

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{C}\mathbf{A}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \mathbf{C} \text{ una matriz constante.}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}.$$

En la última fórmula, el orden en que escribimos las matrices es muy importante, pues como hemos enfatizado, la multiplicación de matrices no siempre conmuta.

EJERCICIOS 9.3

1. Sean $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Determinar: **(a)** $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. **(b)** $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

2. Sean $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Determinar: **(a)** $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. **(b)** $7\mathbf{A}-4\mathbf{B}$.

3. Sean $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Determinar: **(a)** $\mathbf{AB}$. **(b)** $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$. **(c)** $\mathbf{B}^2 = \mathbf{BB}$.

4. Sean $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Determinar: **(a)** $\mathbf{AB}$. **(b)** $\mathbf{BA}$.

5. Sean $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y

$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinar: **(a)** $\mathbf{AB}$. **(b)** $\mathbf{AC}$. **(c)** $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

6. Sean $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y

$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinar: **(a)** $\mathbf{AB}$. **(b)** $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$. **(c)** $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$.

7. La matriz obtenida de **A** al intercambiar sus renglones y columnas se llama la **transpuesta** de **A** y se denota por $\mathbf{A}^T$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

En general, tenemos $[a_{ij}]^T = [b_{ij}]$, donde $b_{ij} = a_{ji}$.

(a) Muestre que si **u** y **v** son vectores columna $n \times 1$, entonces el producto matricial $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ es igual al producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

(b) Sea **v** un vector columna 3×1 con $\mathbf{v}^T = [2\ 3\ 5]$. Muestre que, para la matriz **A** dada arriba, $(\mathbf{Av})^T = \mathbf{v}^T\mathbf{A}^T$.

(c) ¿Se cumple la relación $(\mathbf{Av})^T = \mathbf{v}^T\mathbf{A}^T$ para cualquier matriz **A** $m \times n$ y cualquier vector **v** $n \times 1$?

(d) ¿Se cumple la relación $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ para cualquier pareja de matrices **A**, **B** tales que ambos productos matriciales estén definidos?

8. Sean $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Verifique que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

En los problemas 9 a 14, calcule la inversa de la matriz dada, si ésta existe.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

15. Demuestre que si $\mathbf{x}_p$ satisface $\mathbf{Ax}_p = \mathbf{b}$, entonces toda solución del sistema no homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo correspondiente $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

16. Sean $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Muestre que **A** es singular.

(b) Muestre que $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ no tiene soluciones.

(c) Muestre que $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ tiene una infinidad de soluciones.

En los problemas 17 a 20, determine la función matricial $\mathbf{X}^{-1}(t)$ *cuyo valor en t es la inversa de la matriz dada* $\mathbf{X}(t)$.

17. $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{4t} \\ e^t & 4e^{4t} \end{bmatrix}$.

18. $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \\ 2\cos 2t & -2\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$.

19. $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & -e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 4e^{2t} \end{bmatrix}$.

20. $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 1 & t \\ 3e^{3t} & 0 & 1 \\ 9e^{3t} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En los problemas 21 a 26, evalúe el determinante dado.

21. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. **22.** $\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. **26.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

En los problemas 27 a 29, determine los valores de r para los que det$(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$.

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. **28.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30. Ilustre la equivalencia de las afirmaciones (a)-(d) en el teorema 1 (página 519) para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

como sigue.

(a) Muestre que el procedimiento de reducción por renglones aplicado a $[\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{I}]$ no produce una inversa para **A**.

(b) Calcule det **A**.

(c) Determine una solución no trivial **x** de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

(d) Halle escalares c_1, c_2 y c_3, *no todos iguales a cero*, tales que $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = 0$, donde $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ son las columnas de **A**.

*En los problemas 31 y 32, determine d***x***/dt para las funciones vectoriales dadas.*

31. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$ **32.** $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\,\text{sen}\,3t \\ 0 \\ -e^{-t}\,\text{sen}\,3t \end{bmatrix}$.

*En los problemas 33 y 34, determine d***X***/dt para las funciones matriciales dadas.*

33. $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} & 3e^{2t} \\ -2e^{5t} & -e^{2t} \end{bmatrix}$.

34. $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \text{sen}\,2t & \cos 2t & e^{-2t} \\ -\text{sen}\,2t & 2\cos 2t & 3e^{-2t} \\ 3\,\text{sen}\,2t & \cos 2t & e^{-2t} \end{bmatrix}$.

En los problemas 35 y 36, verifique que la función vectorial dada satisface el sistema indicado.

35. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$.

36. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t} \\ -3e^{t} \end{bmatrix}$.

En los problemas 37 y 38, verifique que la función matricial dada satisface el sistema indicado.

37. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -2e^{3t} \end{bmatrix}$.

38. $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & e^{5t} \\ 0 & e^{t} & -e^{5t} \end{bmatrix}.$$

En los problemas 39 y 40 se dan las matrices $\mathbf{A}(t)$ *y* $\mathbf{B}(t)$. *Determine*

(a) $\int \mathbf{A}(t)\,dt$. **(b)** $\int_0^1 \mathbf{B}(t)\,dt$. **(c)** $\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)]$.

39. $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} t & e^{t} \\ 1 & e^{t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\text{sen}\,t \\ \text{sen}\,t & \cos t \end{bmatrix}$.

40. $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 3 & e^{-2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-t} & 3e^{-t} \end{bmatrix}$.

En los problemas 41 a 43, $\mathbf{A}^T$ se refiere a la matriz transpuesta analizada en el problema 7.

41. Una matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ es **simétrica** si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$; es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$, para toda $i, j = 1, \ldots, n$. Muestre que si $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ es una matriz simétrica.

42. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Muestre que $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es una matriz simétrica $n \times n$ y $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ es una matriz simétrica $m \times m$ (véase el problema 41).

43. El **producto interior** de dos vectores es una generalización del producto punto, para vectores con entradas complejas. Se define como

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \ , \qquad \text{donde}$$

$\mathbf{x} = \text{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = \text{col}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son vectores complejos y la barra denota la conjugación compleja.

(a) Muestre que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\bar{\mathbf{y}}$, donde $\bar{\mathbf{y}} = \text{col}\,(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$.

(b) Demuestre que para cualesquiera vectores $n \times 1$ **x, y, z** y cualquier número complejo l, se cumple

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})} \ ,$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \ ,$$
$$(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ , \quad (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ .$$

9.4 SISTEMAS LINEALES EN FORMA NORMAL

Como continuación de la introducción de la sección 9.1, decimos que un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales está en **forma normal** si se expresa como

$$\textbf{(1)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \ ,$$

donde $\mathbf{x}(t) = \text{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $\mathbf{f}(t) = \text{col}\,(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ y $\mathbf{A}(t) = [a_{ji}(t)]$ es una matriz $n \times n$. Como en el caso de una ecuación diferencial lineal escalar, un sistema es **homogéneo** si $\mathbf{f}(t) \equiv 0$; en caso contrario, es **no homogéneo**. Cuando los elementos de $\mathbf{A}$ son todos constantes, se dice que el sistema tiene **coeficientes constantes**. Recuerde que una ecuación diferencial lineal de orden n

$$\textbf{(2)} \qquad y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_0(t)y(t) = g(t)$$

se puede escribir como un sistema de primer orden en forma normal usando la sustitución $x_1(t) := y(t), x_2(t) := y'(t), \ldots, x_n(t) := y^{(n-1)}(t)$; en efecto, la ecuación (2) es equivalente a $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, donde $\mathbf{x}(t) = \text{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $\mathbf{f}(t) := \text{col}(0, \ldots, 0, g(t))$ y

$$\mathbf{A}(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \cdots & -p_{n-2}(t) & -p_{n-1}(t) \end{bmatrix} .$$

La teoría para sistemas en forma normal sigue muy de cerca la teoría de ecuaciones diferenciales lineales presentada en los capítulos 4 y 6. En muchos casos, las demostraciones para ecuaciones diferenciales lineales escalares se pueden extender a sistemas normales con las modificaciones adecuadas. Recíprocamente, los resultados para sistemas normales se aplican a las ecuaciones lineales escalares, pues, como hemos mostrado, cualquier ecuación lineal escalar se puede expresar como un sistema normal. Éste es el caso con los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales.

El **problema con valores iniciales** para el sistema normal (1) es el problema de determinar una función vectorial diferenciable $\mathbf{x}(t)$ que satisfaga el sistema en un intervalo I y que además satisfaga la **condición inicial** $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, donde t_0 es un punto dado de I y $\mathbf{x}_0 = \text{col}(x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$ es un vector dado.

EXISTENCIA Y UNICIDAD

Teorema 2. Suponga que $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas en un intervalo abierto I que contiene al punto t_0. Entonces, para cualquier elección del vector $\mathbf{x}_0 = \text{col}(x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$, existe una única solución $\mathbf{x}(t)$ en todo el intervalo I del problema con valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)\ , \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\ .$$

Si escribimos el sistema (1) como $\mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ y definimos el operador $L[\mathbf{x}] \coloneqq \mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces podemos expresar el sistema (1) en la forma de operador $L[\mathbf{x}] = \mathbf{f}$. En este caso, el operador L asocia a cada función vectorial una función vectorial. Además, L es un operador *lineal* en el sentido de que para cualesquiera escalares a, b y cualesquiera funciones vectoriales diferenciables $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, tenemos

$$L[a\mathbf{x} + b\mathbf{y}] = aL[\mathbf{x}] + bL[\mathbf{y}]\ .$$

La demostración de esta linealidad es consecuencia de las propiedades de la multiplicación de matrices (véase el problema 25).

Como consecuencia de la linealidad de L, si $\mathbf{x}_1, \ldots, x_n$ son soluciones del sistema *homogéneo* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, o $L[\mathbf{x}] = 0$ con notación de operadores, entonces cualquier combinación lineal de estos vectores, $c_1x_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ será también una solución. Además, veremos que si las soluciones $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes, entonces *toda* solución de $L[\mathbf{x}] = \mathbf{0}$ se puede expresar como $c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ para una elección adecuada de las constantes $c_1, \ldots, c_n$.

DEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES VECTORIALES

Definición 1. Las m funciones vectoriales $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ son **linealmente dependientes** en un intervalo I si existen constantes $c_1, \ldots, c_m$, no todas iguales a cero, tales que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_m\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{0}$$

para toda t en I. Si los vectores no son linealmente dependientes, entonces son **linealmente independientes en** I.

EJEMPLO 1 Mostrar que las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1(t) = \text{col}(e^t, 0, e^t)$, $\mathbf{x}_2(t) = \text{col}(3e^t, 0, 3e^t)$ y $\mathbf{x}_3(t) = \text{col}(t, 1, 0)$ son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Observe que $\mathbf{x}_2$ es justamente el triple de $\mathbf{x}_1$ y por tanto, $3\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) + 0 \cdot \mathbf{x}_3(t) = \mathbf{0}$ para toda t. Por lo tanto, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$. ■

EJEMPLO 2 Mostrar que las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1(t) = \text{col}(e^{2t}, 0\ e^{2t})$, $\mathbf{x}_2(t) = \text{col}(e^{2t}, e^{2t}, -e^{2t})$ y $\mathbf{x}_3(t) = \text{col}(e^{t}, 2^{et}, e^{t})$, son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Para demostrar la independencia, *suponemos* que c_1, c_2 y c_3 son constantes para las cuales

$$\textbf{(3)} \qquad c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) = \mathbf{0}$$

se cumple para toda t en $(-\infty, \infty)$ y mostraremos que esto obliga a que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Veamos qué ocurre con $t = 0$ en (3):

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} ,$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\textbf{(4)} \qquad \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 , \\ c_2 + 2c_3 &= 0 , \\ c_1 - c_2 + c_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Podemos resolver (4) o verificar que el determinante de sus coeficientes es distinto de cero (recuerde el teorema 1 de la página 519) para concluir que (4) sólo tiene la solución trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Por lo tanto, las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ (de hecho, en cualquier intervalo que contenga a $t = 0$). ■

Como muestra el ejemplo anterior, si $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son n funciones vectoriales, cada una con n componentes, entonces estos vectores serán linealmente independientes en un intervalo I si el determinante

$$\det[\mathbf{x}_1(t) \ \ldots \ \mathbf{x}_n(t)]$$

es distinto de cero en algún punto t en I. Debido a la analogía con las ecuaciones escalares, llamamos a este determinante el **wronskiano**.

WRONSKIANO

Definición 2. El **wronskiano** de n funciones vectoriales $\mathbf{x}_1(t) = \text{col}(x_{1,\,1}, \ldots, x_{n,\,1}), \ldots, \mathbf{x}_n(t) = \text{col}(x_{1,\,n}, \ldots, x_{n,n})$ se define como la función con valores reales

$$W[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n](t) := \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \cdots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \cdots & x_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \cdots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} .$$

Ahora mostraremos que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son *soluciones* linealmente independientes en I para el sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ de funciones continuas, entonces el wronskiano $W(t) := \det[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$ nunca se anula en I. Supongamos lo contrario, que $W(t_0) = 0$ en algún punto t_0. Entonces, por el teorema 1 de la página 543, el hecho de que el determinante se anule implica que los vectores columna $\mathbf{x}_1(t_0)$, $\mathbf{x}_2(t_0), \ldots, \mathbf{x}_n(t_0)$ son linealmente dependientes. Así, existen escalares $c_1, \ldots, c_n$, *no todos nulos*, tales que

$$c_1\mathbf{x}_1(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{0} .$$

Sin embargo, $c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$ y la función vectorial $\mathbf{z}(t) \equiv 0$ son ambas soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en I; además, coinciden en el punto t_0. Así, estas soluciones deben coincidir en I de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad (teorema 2); es decir,

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}$$

para *toda* t en I. Pero esto contradice la información dada en el sentido que $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en I. Hemos mostrado que $W(t_0) \neq 0$, y como t_0 es un punto arbitrario, tenemos que $W(t) \neq 0$ para toda $t \in I$.

El argumento anterior tiene dos implicaciones importantes que se asemejan a lo ocurrido en el caso escalar. En primer lugar, *el wronskiano de soluciones de* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *es idénticamente nulo o nunca se anula en I* (véase también el problema 31). En segundo lugar, *un conjunto de n soluciones* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *de* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *en I es linealmente independiente en I si y sólo si su wronskiano nunca se anula en I.* Con estos hechos a la mano, podemos imitar la demostración dada para el caso escalar en la sección 6.1 (teorema 2) para obtener el siguiente teorema de representación para las soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

REPRESENTACIÓN DE SOLUCIONES (CASO HOMOGÉNEO)

Teorema 3. Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo

(5) $$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

en el intervalo I, donde $\mathbf{A}(t)$ es una función matricial $n \times n$, continua en I. Entonces toda solución de (5) en I se puede expresar en la forma

(6) $$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) ,$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes.

Un conjunto de soluciones $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ que es linealmente independiente en I o, en forma equivalente, cuyo wronskiano no se anula en I, es un **conjunto fundamental de soluciones** para (5) en I. La combinación lineal en (6), escrita con constantes arbitrarias, se conoce como una **solución general** de (5).

Si consideramos los vectores de un conjunto fundamental de soluciones y formamos las columnas de una matriz $\mathbf{X}(t)$ de la manera siguiente,

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \ldots\ \mathbf{x}_n(t)] = \begin{bmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \cdots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \cdots & x_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \cdots & x_{n,n}(t) \end{bmatrix} ,$$

entonces la matriz $\mathbf{X}(t)$ es una **matriz fundamental** para (5). Podemos usarla para expresar la solución general (6) como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} \,,$$

donde $\mathbf{c} = \text{col}(c_1, \ldots, c_n)$ es un vector constante arbitrario. Como $\det \mathbf{X} = W[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ nunca se anula en I, el teorema 1 de la sección 9.3 implica que $\mathbf{X}(t)$ es invertible para cada t en I.

EJEMPLO 3 Verificar que el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones para el sistema

$$\textbf{(7)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y hallar una matriz fundamental para (7). Determinar además una solución general para (7).

SOLUCIÓN Al sustituir el primer vector del conjunto S en el lado derecho de (7), tenemos

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \mathbf{x}'(t) \,.$$

Por lo tanto, este vector satisface el sistema (7) para toda t. Podemos usar cálculos similares para verificar que los otros vectores en S también son soluciones de (7) en $(-\infty, \infty)$. Para mostrar que S es un conjunto fundamental de soluciones, basta observar que el wronskiano

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{2t} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} + e^{-t} \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -3$$

nunca se anula.

Una matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$ para (7) es justamente la matriz que usamos para calcular el wronskiano; es decir,

$$\textbf{(8)} \qquad \mathbf{X}(t) := \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & -e^{-t} \end{bmatrix} .$$

Ahora podemos expresar una solución general de (7) como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} = c_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} . \quad \blacksquare$$

Es fácil verificar que la matriz fundamental en (8) satisface la ecuación

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) \ ;$$

esto es equivalente a verificar que $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para cada columna $\mathbf{x}$ en S. En general, una matriz fundamental para un sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ satisface la ecuación diferencial matricial correspondiente $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Otra consecuencia de la linealidad del operador L definido por $L[\mathbf{x}] \coloneqq \mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x}$ es el **principio de superposición** para sistemas lineales, el cual establece que si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones de los sistemas no homogéneos

$$L[\mathbf{x}] = \mathbf{g}_1 \quad \text{y} \quad L[\mathbf{x}] = \mathbf{g}_2 \ ,$$

respectivamente, entonces $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ es una solución de

$$L[\mathbf{x}] = c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 \ .$$

Usamos el principio de superposición y el teorema de representación para sistemas homogéneos para demostrar el siguiente teorema.

REPRESENTACIÓN DE SOLUCIONES (CASO NO HOMOGÉNEO)

Teorema 4. Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular del sistema no homogéneo

(9) $$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

en el intervalo I y sea $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones en I para el sistema homogéneo correspondiente $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$. Entonces toda solución de (9) en I se puede expresar en la forma

(10) $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \ ,$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes.

La demostración de este teorema es casi idéntica a las demostraciones del teorema 6 de la sección 4.7 y el teorema 4 de la sección 6.1. Dejaremos la demostración como ejercicio.

La combinación lineal de $\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ en (10) escrita con constantes arbitrarias $c_1, \ldots, c_n$ es una **solución general** de (9). Esta solución general se puede expresar también como $\mathbf{x} = \mathbf{x}p + \mathbf{X}\mathbf{c}$, donde $\mathbf{X}$ es una matriz fundamental para el sistema homogéneo y $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario.

Ahora resumimos los resultados de esta sección aplicados al problema de determinar una solución general de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en forma normal.

MÉTODO PARA RESOLVER SISTEMAS NORMALES

1. Para determinar una solución general del sistema homogéneo $n \times n$ $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

(a) Determine un conjunto fundamental de soluciones $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ que consta de n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo.

(b) Forme la combinación lineal

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{c} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n ,$$

donde $\mathbf{c} = \text{col}(c_1, \ldots, c_n)$ es cualquier vector constante y $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$ es la matriz fundamental, para obtener una solución general.

2. Para determinar una solución general del sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$:

(a) Determine una solución particular $\mathbf{x}_p$ del sistema no homogéneo.

(b) Forme la suma de la solución particular y la solución general $\mathbf{X}\mathbf{c} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ del sistema homogéneo correspondiente en la parte 1,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{x}_p + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n ,$$

para obtener una solución general del sistema dado.

Dedicaremos el resto de este capítulo a analizar varios métodos para determinar conjuntos fundamental de soluciones para sistemas homogéneos y soluciones particulares para sistemas no homogéneos.

EJERCICIOS 9.4

En los problemas 1 a 4, escriba el sistema dado en la forma matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$.

1. $x'(t) = 3x(t) - y(t) + t^2 ,$
$y'(t) = -x(t) + 2y(t) + e^t .$

2. $r'(t) = 2r(t) + \text{sen}\, t ,$
$\theta'(t) = r(t) - \theta(t) + 1 .$

3. $\dfrac{dx}{dt} = t^2x - y - z + t ,$
$\dfrac{dy}{dt} = e^tz + 5 ,$
$\dfrac{dz}{dt} = tx - y + 3z - e^t .$

4. $\dfrac{dx}{dt} = x + y + z ,$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 3z ,$
$\dfrac{dz}{dt} = x + 5z .$

En los problemas 5 a 8, escriba la ecuación escalar dada como un sistema de primer orden en forma normal. Exprese el sistema en la forma matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$.

5. $y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = \text{sen}\, t .$

6. $x''(t) + x(t) = t^2 .$

7. $\dfrac{d^4w}{dt^4} + w = t^2 .$

8. $\dfrac{d^3y}{dt^3} - \dfrac{dy}{dt} + y = \cos t .$

En los problemas 9 a 12, escriba el sistema dado como un conjunto de ecuaciones escalares.

9. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} .$

10. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + e^t \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En los problemas 13 a 18, determine si las funciones vectoriales dadas son linealmente dependientes o linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

13. $\begin{bmatrix} t \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

14. $\begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$.

16. $e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $e^t \begin{bmatrix} -3 \\ -15 \end{bmatrix}$

17. $e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ t^2 \end{bmatrix}$.

En los problemas 19 a 22, las funciones vectoriales dadas son soluciones del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Determine si forman un conjunto fundamental de soluciones. En caso afirmativo, determine una matriz fundamental para el sistema y dé una solución general.

19. $\mathbf{x}_1 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

20. $\mathbf{x}_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

21. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \\ e^{t} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$.

22. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}$.

23. Verifique que las funciones vectoriales

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

son soluciones del sistema homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \ ,$$

en $(-\infty, \infty)$, y que

$$\mathbf{x}_p = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} te^{t} \\ te^{t} \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{t} \\ 3e^{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, donde $\mathbf{f}(t) = \operatorname{col}(e^t, t)$. Determine una solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$.

24. Verifique que las funciones vectoriales

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -e^{-3t} \\ -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

son soluciones del sistema homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \ ,$$

en $(-\infty, \infty)$ y que

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 5t + 1 \\ 2t \\ 4t + 2 \end{bmatrix}$$

es una solución particular de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, donde $\mathbf{f}(t) = \operatorname{col}(-9t, 0, -18t)$. Determine una solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$.

25. Demuestre que el operador definido por $L[\mathbf{x}] := \mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{A}$ es una función matricial $n \times n$ y $\mathbf{x}$ es una función vectorial diferenciable $n \times 1$, es un operador lineal.

26. Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Muestre que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$ es la solución del problema con valores iniciales $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

En los problemas 27 y 28, verifique que $\mathbf{X}(t)$ es una matriz fundamental para el sistema dado y calcule $\mathbf{X}^{-1}(t)$. Use el resultado del problema 26 para hallar la solución del problema con valores iniciales dado.

27. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 6e^{-t} & -3e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ -5e^{-t} & e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

28. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix};$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

29. Muestre que

$$\begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} \equiv 0$$

en $(-\infty, \infty)$, pero que las dos funciones vectoriales

$$\begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} t|t| \\ 2|t| \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

30. Fórmula de Abel. Si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son cualesquiera n soluciones del sistema $n \times n$ $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, entonces la fórmula de Abel proporciona una representación para el wronskiano $W(t) := W[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n](t)$, a saber,

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \{a_{11}(s) + \cdots + a_{nn}(s)\}ds\right),$$

donde $a_{11}(s), \ldots, a_{nn}(s)$ son los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}(s)$. Demuestre esta fórmula para el caso particular $n = 3$. [*Sugerencia*: Siga la idea delineada en el problema 36 de los ejercicios 6.1.]

31. Use la fórmula de Abel para demostrar que el wronskiano de n soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en el intervalo I es idénticamente nulo en I o nunca se anula en I.

32. Demuestre que siempre existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ en un intervalo I, siempre que $\mathbf{A}(t)$ sea continua en I. [*Sugerencia*: Use el teorema de existencia y unicidad, teorema 2, y haga varias elecciones adecuadas para $\mathbf{x}_0$.]

33. Demuestre el teorema 3 relativo a la representación de soluciones del sistema homogéneo.

34. Demuestre el teorema 4 relativo a la representación de soluciones del sistema no homogéneo.

35. Para ilustrar la relación entre una ecuación de orden superior y el sistema equivalente de primer orden, considere la ecuación

$$\textbf{(11)} \qquad y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t) = 0.$$

(a) Muestre que $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para (11).

(b) Use la definición de la sección 6.1 para calcular el wronskiano de $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$.

(c) Haga $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$ y muestre que la ecuación (11) es equivalente al sistema de primer orden

$$\textbf{(12)} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}.$$

(d) La sustitución utilizada en la parte (c) sugiere que

$$S := \left\{ \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \\ 9e^{3t} \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones para el sistema (12). Verifique esta afirmación.

(e) Calcule el wronskiano de S. ¿Cuál es su relación con el wronskiano calculado en la parte (b)?

9.5 SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

En esta sección analizamos un procedimiento para obtener una solución general del sistema homogéneo

(1) $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$,

donde **A** es una matriz *constante* (real) $n \times n$. La solución general que estamos buscando estará definida para toda t, pues los elementos de **A** no son más que funciones constantes, que son continuas en $(-\infty, \infty)$ (recuerde el teorema 2 de la página 525). En la sección 9.4 mostramos que podemos construir una solución general de (1) a partir de un conjunto fundamental de soluciones que consta de n soluciones linealmente independientes de (1). Nuestro objetivo es hallar tales n soluciones vectoriales.

En el capítulo 4 logramos resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes estimando que la ecuación tendría una solución de la forma e^{rt}. Como cualquier ecuación lineal escalar se puede expresar como un sistema, es razonable esperar que el sistema (1) tenga soluciones de la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u} ,$$

donde r es una constante y **u** es un vector constante, los cuales debemos determinar. Al sustituir $e^{rt}\mathbf{u}$ en vez de $\mathbf{x}(t)$ en (1) tenemos

$$re^{rt}\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{rt}\mathbf{u} = e^{rt}\mathbf{A}\mathbf{u} .$$

Cancelamos el factor e^{rt} y reagrupamos términos para obtener

(2) $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$,

donde $r\mathbf{I}$ denota la matriz diagonal con r a lo largo de su diagonal principal.

El cálculo anterior muestra que $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u}$ es una solución de (1) si y sólo si r y **u** satisfacen la ecuación (2). Como el caso trivial, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, no nos sirve para hallar soluciones linealmente independientes de (1), necesitamos que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Tales vectores tienen un nombre especial, como sigue.

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Definición 3. Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ una matriz constante $n \times n$. Los **valores propios** de **A** son aquellos números (reales o complejos) r para los que $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ tiene al menos una solución no trivial **u**.† Las soluciones no triviales correspondientes **u** son los **vectores propios** de **A** asociados a r.

Como se establece en el teorema 1 de la sección 9.3, un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones *algebraicas* en n incógnitas tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de sus coeficientes se anula. Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que (2) tenga una solución no trivial es que

(3) $|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \mathbf{0}$.

†**u** puede tener entradas con números complejos.

Al desarrollar el determinante de $\mathbf{A} - r\mathbf{I}$ en términos de sus cofactores, veremos que es un polinomio de grado n en r; es decir,

$$\textbf{(4)} \qquad |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = p(r) .$$

Por lo tanto, *determinar los valores propios de una matriz* **A** *es equivalente a determinar los ceros del polinomio* $p(r)$. La ecuación (3) se llama la **ecuación característica** de **A**, y $p(r)$ en (4) es el **polinomio característico** de **A**. La ecuación característica para sistemas juega un papel similar al jugado por la ecuación auxiliar para ecuaciones escalares.

Existen muchos paquetes de software comercial que sirven para calcular los valores y vectores propios de una matriz dada. Cuatro de ellos son DERIVE de Soft Warehouse, Inc.; MATLAB de The MathWorks, Inc.; MATHEMATICA de Wolfram Reasearch; y MAPLE, de la Universidad de Waterloo. Aunque animamos al lector a usar estos paquetes, los ejemplos y los ejercicios de este texto pueden resolverse fácilmente sin ellos. Los ejercicios para los que sería recomendable un paquete están indicados con el icono .

EJEMPLO 1 Determinar los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

SOLUCIÓN La ecuación característica para **A** es

$$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-r & -3 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = (2-r)(-2-r) + 3 = r^2 - 1 = 0 .$$

Por lo tanto, los valores propios de **A** son $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. Para determinar los vectores propios correspondientes a $r_1 = 1$, debemos resolver $(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Al sustituir **A** y r_1 tenemos

$$\textbf{(5)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Observe que esta ecuación matricial es equivalente a la ecuación escalar $u_1 - 3u_2 = 0$. Por lo tanto, las soluciones de (5) se obtienen asignando un valor arbitrario a u_2, digamos, $u_2 = s$, y haciendo $u_1 = 3u_2 = 3s$. En consecuencia, los vectores propios asociados a $r_1 = 1$ se pueden expresar como

$$\textbf{(6)} \qquad \mathbf{u}_1 = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Para $r_2 = -1$, la ecuación $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ se convierte en

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Al resolverla, obtenemos que $u_1 = s$ y $u_2 = s$, con s arbitrario. Por lo tanto, los vectores propios asociados a $r_2 = -1$ son

$$\textbf{(7)} \qquad \mathbf{u}_2 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad \blacksquare$$

Observemos que en el ejemplo anterior, la colección (6) de todos los vectores propios asociados a $r_1 = 1$ forman un subespacio de dimensión 1 al agregarle el vector cero. Lo mismo es cierto para $r_2 = -1$. Estos subespacios se llaman **subespacios** propios.

EJEMPLO 2 Hallar los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} .$$

SOLUCIÓN La ecuación característica de **A** es

$$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-r & 2 & -1 \\ 1 & -r & 1 \\ 4 & -4 & 5-r \end{vmatrix} = 0 ,$$

que se simplifica como $(r-1)(r-2)(r-3) = 0$. Por lo tanto, los valores propios de **A** son $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ y $r_3 = 3$. Para hallar los vectores propios asociados a $r_1 = 1$, hacemos $r = 1$ en $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y obtenemos

$$\textbf{(8)} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Podemos usar operaciones elementales por renglón (eliminación gaussiana) para ver que (8) es equivalente a las dos ecuaciones

$$u_1 - u_2 + u_3 = 0 ,$$
$$2u_2 - u_3 = 0 .$$

Así, podemos obtener las soluciones de (8) asignando un valor arbitrario a u_2, digamos $u_2 = s$, despejando u_3 en $2u_2 - u_3 = 0$ para obtener $u_3 = 2s$, y luego despejando u_1 en $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ para obtener $u_1 = -s$. Por lo tanto, los vectores propios asociados a $r_1 = 1$ son

$$\textbf{(9)} \qquad \mathbf{u}_1 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Para $r_2 = 2$, resolvemos

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de manera similar (véase la sección 9.2) para obtener los vectores propios

$$\textbf{(10)} \qquad \mathbf{u}_2 = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Por último, para $r_3 = 3$ resolvemos

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y obtenemos los vectores propios

$$\textbf{(11)} \qquad \mathbf{u}_3 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} . \quad \blacksquare$$

Regresemos al problema de determinar una solución general de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales. Ya hemos mostrado que $e^{rt}\mathbf{u}$ es una solución de (1) si r es un valor propio y $\mathbf{u}$ un vector propio correspondiente. La cuestión es: ¿podemos obtener n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo hallando todos los valores y vectores propios de $\mathbf{A}$?

n VECTORES PROPIOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Teorema 5. Suponga que la matriz constante $n \times n$ $\mathbf{A}$ tiene n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Sea r_i el valor propio† correspondiente a $\mathbf{u}_i$. Entonces

$$\textbf{(12)} \qquad \{e^{r_1t}\mathbf{u}_1, e^{r_2t}\mathbf{u}_2, \ldots, e^{r_nt}\mathbf{u}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$ para el sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. En consecuencia, una solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es

$$\textbf{(13)} \qquad \mathbf{x}(t) = c_1e^{r_1t}\mathbf{u}_1 + c_2e^{r_2t}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_ne^{r_nt}\mathbf{u}_n ,$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Demostración. Como hemos visto, las funciones vectoriales enumeradas en (12) son soluciones del sistema homogéneo. Además, su wronskiano es

$$W(t) = \det[e^{r_1t}\mathbf{u}_1, \ldots, e^{r_nt}\mathbf{u}_n] = e^{(r_1+\cdots+r_n)t}\det[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] .$$

Como hemos supuesto que los vectores propios son linealmente independientes, el teorema 1 de la sección 9.3 implica que $\det[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ no se anula. Por lo tanto, el wronskiano $W(t)$ nunca se anula. Esto muestra que (12) es un conjunto fundamental de soluciones, y en consecuencia, una solución general está dada por (13). ■

En el siguiente ejemplo damos una aplicación del teorema 5.

---

†Los valores propios $r_1, \ldots, r_n$ pueden ser reales o complejos y no tienen que ser distintos. En esta sección analizamos los casos de valores propios reales. Consideraremos los valores propios complejos en la sección 9.6.

EJEMPLO 3 Determinar una solución general de

$$\textbf{(14)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ , \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 mostramos que la matriz **A** tiene valores propios $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$. Si hacemos, digamos, $s = 1$ en las ecuaciones (6) y (7), obtenemos los vectores propios correspondientes

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Como $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes, el teorema 5 implica que una solución general de (14) es

$$\textbf{(15)} \qquad \mathbf{x}(t) = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad \blacksquare$$

Si sumamos los vectores del lado derecho de la ecuación (15) y luego escribimos las expresiones para los componentes de $\mathbf{x}(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t))$, obtenemos

$$x_1(t) = 3c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \ ,$$
$$x_2(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \ .$$

Ésta es la forma ya familiar para una solución general de un sistema, según vimos en la sección 5.3.

El ejemplo 3 ilustra muy bien el papel geométrico que juegan los vectores propios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Si el vector inicial $\mathbf{x}(0)$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{u}_1$ (es decir, $\mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{u}_1$), entonces la solución vectorial del sistema, $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{t}\mathbf{u}_1$, siempre tendrá la misma dirección o la dirección opuesta a $\mathbf{u}_1$. Es decir, estará a lo largo de la línea recta determinada por $\mathbf{u}_1$ (véase la figura

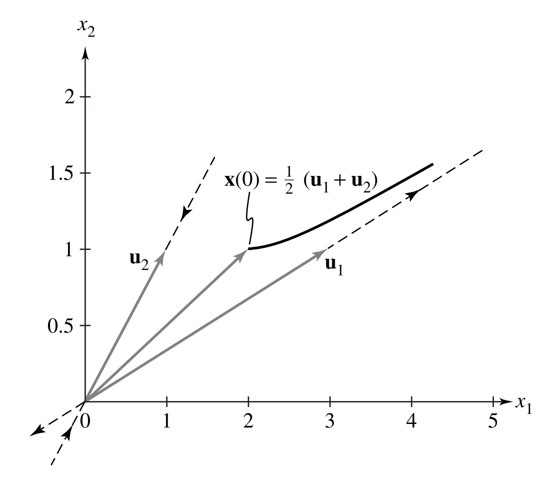


Figura 9.1 Trayectorias de las soluciones del ejemplo 3

9.1). Además, cuando t crece, la trayectoria de esta solución tiende a infinito, pues el valor correspondiente $r_1 = 1$ es positivo (note el término e^t). Algo similar ocurre si el vector inicial es un múltiplo escalar de $\mathbf{u}_2$, excepto que como $r_2 = -1$ es negativo, la trayectoria $\mathbf{x}(t) = c_2 e^{-t}\mathbf{u}_2$ tenderá al origen al crecer t (debido al término e^{-t}). Para un vector inicial que implique a $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, como $\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$, la trayectoria resultante es la mezcla de los movimientos anteriores, donde la contribución debida al mayor de los valores propios, $r_1 = 1$, domina cuando t crece; véase la figura 9.1.

Las trayectorias rectas en el plano x_1x_2 (el plano fase) apuntan entonces a lo largo de las direcciones de los vectores propios de la matriz **A**. (Véase la figura 5.6 de la sección 5.2, por ejemplo.)

Una útil propiedad de los vectores propios en relación con su independencia lineal viene dada por el siguiente teorema.

INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES PROPIOS

Teorema 6. Si $r_1, \ldots, r$ son valores propios *distintos* para la matriz **A** y $\mathbf{u}_i$ es un vector propio asociado a r_i, entonces $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ son linealmente independientes.

Demostración. Consideremos primero el caso $m = 2$. Supongamos, por el contrario, que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente dependientes, de modo que

$$\mathbf{u}_1 = c\mathbf{u}_2 \tag{16}$$

para cierta constante c. Multiplicamos ambos lados de (16) por **A** y usamos el hecho de que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son vectores propios con valores propios correspondientes r_1 y r_2 para obtener

$$r_1\mathbf{u}_1 = cr_2\mathbf{u}_2 \ . \tag{17}$$

A continuación multiplicamos (16) por r_2 y restamos de (17) para obtener

$$(r_1 - r_2)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \ .$$

Como $\mathbf{u}_1$ no es el vector cero, debemos tener $r_1 = r_2$. ¡Pero esto viola la hipótesis de que los valores propios son distintos! Por lo tanto, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes.

Los casos $m > 2$ se siguen por inducción. Los detalles de la demostración se dejan como ejercicio. ■

Al combinar los teoremas 5 y 6 tenemos el siguiente corolario.

***n* VALORES PROPIOS DISTINTOS**

Corolario 1. Si la matriz constante **A** $n \times n$ tiene n valores propios distintos $r_1, \ldots, r_n$, y $\mathbf{u}_i$ es un vector propio asociado a r_i, entonces

$$\{e^{r_1 t}\mathbf{u}_1, \ldots, e^{r_n t}\mathbf{u}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

EJEMPLO 4 Resolver el problema con valores iniciales

$$\textbf{(18)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) , \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 mostramos que la matriz de coeficientes 3×3 **A** tiene tres valores propios distintos $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ y $r_3 = 3$. Si hacemos $s = 1$ en las ecuaciones (9), (10) y (11) obtenemos los vectores propios correspondientes

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} ,$$

cuya independencia lineal queda garantizada por el teorema 6. Por lo tanto, una solución general de (18) es

$$\textbf{(19)} \qquad \mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^t & -2e^{2t} & -e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^t & 4e^{2t} & 4e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} .$$

Para satisfacer la condición inicial en (18), resolvemos

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vemos que $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ y $c_3 = -1$. Al insertar estos valores en (19) obtenemos la solución deseada. ■

Hay una clase particular de matrices $n \times n$ que *siempre* tienen valores propios reales y *siempre* tienen n vectores propios linealmente independientes: las matrices reales simétricas.

MATRICES REALES SIMÉTRICAS

Definición 4. Una **matriz real simétrica A** es una matriz con entradas reales que satisface $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Recuerde que la transpuesta se obtiene intercambiando los renglones por las columnas, lo que es equivalente a "voltear" la matriz con respecto de su diagonal principal. En consecuencia, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ si y sólo si **A** es simétrica con respecto de su diagonal principal.

Si **A** es una matriz real simétrica $n \times n$, se sabe que siempre[†] existen n vectores propios linealmente independientes. Así, podemos aplicar el teorema 5 y una solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ está dada por (13).

EJEMPLO 5 Hallar una solución general de

$$\textbf{(20)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)\ , \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

SOLUCIÓN **A** es simétrica, de modo que sabemos que **A** tiene tres vectores propios linealmente independientes. Para hallarlos, calculamos primero la ecuación característica para **A**:

$$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-r & -2 & 2 \\ -2 & 1-r & 2 \\ 2 & 2 & 1-r \end{vmatrix} = -(r-3)^2(r+3) = 0\ .$$

Así, los valores propios de **A** son $r_1 = r_2 = 3$ y $r_3 = -3$.

Observe que el valor propio $r = 3$ tiene multiplicidad 2 como raíz de la ecuación característica. Por lo tanto, debemos hallar *dos* vectores propios linealmente independientes asociados con $r = 3$. Al sustituir $r = 3$ en $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ tenemos

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Este sistema es equivalente a la ecuación $-u_1 - u_2 + u_3 = 0$, de modo que podemos obtener sus soluciones asignando un valor arbitrario a u_2, digamos $u_2 = v$ y un valor arbitrario a u_3, digamos $u_3 = s$. Despejamos u_1 para obtener $u_1 = u_3 - u_2 = s - v$. Por lo tanto, los vectores propios asociados con $r_1 = r_2 = 3$ se pueden expresar como

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} s - v \\ v \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Primero hacemos $s = 1, v = 0$ y luego $s = 0, v = 1$ para obtener los dos vectores propios linealmente independientes

$$\textbf{(21)} \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Para $r_3 = -3$, resolvemos

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[†]Véase *Linear Algebra and Its Applications,* 2a. edición, por David C. Lay (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997).

para obtener los vectores propios col$(-s, -s, s)$. Al hacer $s = 1$ obtenemos

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Como los vectores propios $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son linealmente independientes, una solución general de (20) es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad \blacksquare$$

Si una matriz **A** *no es simétrica, es posible que* **A** *tenga un valor propio repetido pero que no tenga dos vectores propios correspondientes linealmente independientes*. En particular, la matriz

$$\textbf{(22)} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

tiene el valor propio repetido $r_1 = r_2 = -1$, pero el problema 35 muestra que todos los vectores propios asociados con $r = -1$ son de la forma $\mathbf{u} = s$ col(1, 2). En consecuencia, no existen dos vectores propios linealmente independientes.

En los problemas 35-40 se ilustra un procedimiento para hallar una solución general en tal caso, pero la teoría subyacente se difiere a la sección 9.8, donde analizaremos la exponencial de una matriz.

EJERCICIOS 9.5

En los problemas 1 a 8 determine los valores y vectores propios de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$.

En los problemas 9 y 10, algunos de los valores propios de la matriz dada son complejos. Determine todos los valores y vectores propios.

9. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

En los problemas 11 a 16, determine una solución general del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ *para la matriz dada* **A**.

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{4} \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$.

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. **16.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

17. Considere el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Muestre que la matriz **A** tiene valores propios $r_1 = 2$ y $r_2 = -2$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1 = \text{col}(\sqrt{3}, 1)$ y $\mathbf{u}_2 = \text{col}(1, -\sqrt{3})$.
(b) Bosqueje la trayectoria de la solución con vector inicial $\mathbf{x}(0) = -\mathbf{u}_1$.
(c) Bosqueje la trayectoria de la solución con vector inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_2$.
(d) Bosqueje la trayectoria de la solución con vector inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$.

18. Considere el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Muestre que la matriz **A** tiene valores propios $r_1 = -1$ y $r_2 = -3$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1 = \text{col}(1, 1)$ y $\mathbf{u}_2 = \text{col}(1, -1)$.
(b) Bosqueje la trayectoria de la solución con vector inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_1$.
(c) Bosqueje la trayectoria de la solución con vector inicial $\mathbf{x}(0) = -\mathbf{u}_2$.
(d) Bosqueje la trayectoria de la solución con vector inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

En los problemas 19 a 24, determine una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, *para la matriz dada* **A**.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$. **20.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 7 \end{bmatrix}$. **22.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

24. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

25. Use técnicas del álgebra de matrices para hallar una solución general del sistema

$$x' = x + 2y - z\ ,$$
$$y' = x + z\ ,$$
$$z' = 4x - 4y + 5z\ .$$

26. Use técnicas del álgebra de matrices para hallar una solución general del sistema

$$x' = 3x - 4y\ ,$$
$$y' = 4x - 7y\ .$$

En los problemas 27 a 30, use un paquete de software de álgebra lineal, como DERIVE, MATLAB, MAPLE o MATHEMATICA para calcular los valores y vectores propios pedidos y luego dar una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ *para la matriz dada* **A**.

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \\ 0.9 & 1.1 & -6.9 \end{bmatrix}$.

28. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

30. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

En los problemas 31 a 34, resuelva el problema con valores iniciales dado.

31. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

32. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix}$.

33. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$,

$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

34. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

35. **(a)** Muestre que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

tiene el valor propio repetido $r = -1$ y que todos los vectores propios son de la forma $\mathbf{u} = s$ col(1, 2).

(b) Use el resultado de la parte (a) para obtener una solución no trivial $\mathbf{x}_1(t)$ del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(c) Para obtener una segunda solución linealmente independiente de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, intente con $\mathbf{x}_2(t) = te^{-t}\mathbf{u}_1 + e^{-t}\mathbf{u}_2$. [*Sugerencia*: Sustituya $\mathbf{x}_2$ en el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y deduzca las relaciones

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \ , \qquad (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \ .$$

Como $\mathbf{u}_1$ debe ser un vector propio, haga $\mathbf{u}_1 =$ col(1, 2) y halle $\mathbf{u}_2$.]

(d) ¿A qué es igual $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2\mathbf{u}_2$? (En la sección 9.8, $\mathbf{u}_2$ se identificará como un vector propio generalizado.)

36. Use el método analizado en el problema 35 para hallar una solución general del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \ .$$

37. **(a)** Muestre que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene el valor propio repetido $r = 2$ con multiplicidad 3 y que todos los vectores propios de $\mathbf{A}$ son de la forma $\mathbf{u} = s$ col(1, 0, 0).

(b) Use el resultado de la parte (a) para obtener una solución del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ de la forma $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\mathbf{u}_1$.

(c) Para obtener una segunda solución linealmente independiente de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, intente con $\mathbf{x}_2(t) = te^{2t}\mathbf{u}_1 + te^{2t}\mathbf{u}_2$. [*Sugerencia*: Muestre que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ deben satisfacer

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \ , \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1.]$$

(d) Para obtener una tercera solución linealmente independiente de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, intente con

$$\mathbf{x}_3(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t}\mathbf{u}_1 + te^{2t}\mathbf{u}_2 + e^{2t}\mathbf{u}_3 \ .$$

[*Sugerencia*: Muestre que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ deben satisfacer

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \ , \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \ ,$$
$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2.]$$

(e) Muestre que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2\mathbf{u}_2 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$.

38. Use el método analizado en el problema 37 para hallar una solución general del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

39. **(a)** Muestre que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

tiene el valor propio repetido $r = 1$ con multiplicidad 3 y que todos los vectores propios de $\mathbf{A}$ son de la forma $\mathbf{u} = s$ col$(-1, 1, 0) + v$ col$(-1, 0, 1)$.

(b) Use el resultado de la parte (a) para obtener dos soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ de la forma

$$\mathbf{x}_1(t) = e^t\mathbf{u}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^t\mathbf{u}_2.$$

(c) Para obtener una tercera solución linealmente independiente de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, intente con $\mathbf{x}_3(t) = te^t\mathbf{u}_3 + e^t\mathbf{u}_4$. [*Sugerencia*: Muestre que $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{u}_4$ deben satisfacer

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} , \qquad (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_3 .$$

Elija $\mathbf{u}_3$, un vector propio de $\mathbf{A}$, de modo que pueda determinar $\mathbf{u}_4$.]

(d) ¿A qué es igual $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\mathbf{u}_4$?

40. Use el método analizado en el problema 39 para hallar una solución general del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) .$$

41. Use la sustitución $x_1 = y$, $x_2 = y'$ para convertir la ecuación lineal $ay'' + by' + cy = 0$, donde a, b y c son constantes, en un sistema normal. Muestre que la ecuación característica de este sistema es igual a la ecuación auxiliar para la ecuación original.

42. Muestre que el **sistema de Cauchy-Euler**

$$t\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) ,$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante, tiene soluciones no triviales de la forma $\mathbf{x}(t) = t^r\mathbf{u}$ si y sólo si r es un valor propio de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{u}$ es un vector propio correspondiente.

En los problemas 43 y 44, use el resultado del problema 42 para hallar una solución general del sistema dado.

43. $t\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) , \quad t > 0 .$

44. $t\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) , \quad t > 0 .$

45. Mezcla entre tanques interconectados. Dos tanques, cada uno con 50 litros de líquido, están conectados entre sí mediante tubos, de modo que el líquido pasa del tanque A al tanque B a razón de 4 litros/minuto, y del tanque B al tanque A a 1 litro/minuto (véase la figura 9.2). El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Por otro lado, entra agua pura al tanque A a razón de 3 litros/minuto, y la solución sale del tanque B a 3 litros/minuto. Si en un principio el tanque A contiene 25 kg de sal y el tanque B no contiene sal (sólo agua), determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$. Grafique en el mismo plano las dos cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$, donde $x_1(t)$ es la masa de sal en el tanque A y $x_2(t)$ es la masa de sal en el tanque B.

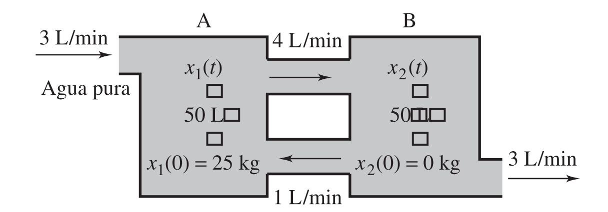


Figura 9.2 Problema de mezcla para tanques interconectados

46. Mezcla con drenado común. Dos tanques, cada uno con 1 litro de líquido, están conectados mediante un tubo a través del cual fluye líquido del tanque A al tanque B a razón de $3 - \alpha$ litros/minuto $(0 < \alpha < 3)$. El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Al tanque A entra agua pura a razón de 3 litros/minuto. La solución sale del tanque A a α litros/minuto y del tanque B a $3 - \alpha$ litros/minuto. Si en un principio el tanque B no tiene sal (sólo agua) y el tanque A contiene 1 kg de sal, determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$. ¿Cómo depende la masa de sal en el tanque A de la elección de α? ¿Cuál es la masa máxima de sal en el tanque B? Véase la figura 9.3.

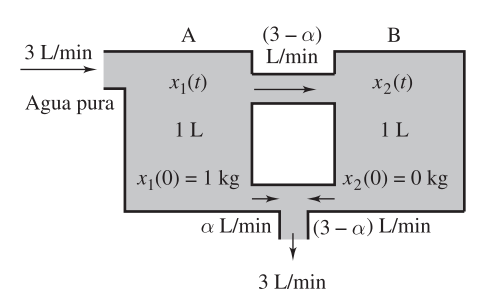


Figura 9.3 Problema de mezcla con un drenado común $0 < \alpha < 3$

47. Para determinar una solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} ,$$

proceda como sigue:

(a) Use un procedimiento numérico para determinar raíces con el fin de aproximar los valores propios.

(b) Si r es un valor propio, sea $\mathbf{u} = \text{col}(u_1, u_2, u_3)$ un vector propio asociado a r. Para determinar $\mathbf{u}$, su-

ponga que $u_1 = 1$. (Si no es u_1, puede elegir a u_2 o u_3 como 1. ¿Por qué?) Ahora resuelva el sistema

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en términos de u_2 y u_3. Use este procedimiento para hallar aproximaciones de tres vectores propios linealmente independientes para **A**.

(c) Use estas aproximaciones para dar una solución general del sistema.

48. Para concluir la demostración del teorema 6, suponga como hipótesis de inducción que $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, $2 \leq k$, son linealmente independientes.

(a) Muestre que si

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k + c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0} ,$$

entonces

$$c_1(r_1 - r_{k+1})\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k(r_k - r_{k+1})\mathbf{u}_k = \mathbf{0} .$$

(b) Use el resultado de la parte (a) y la hipótesis de inducción para concluir que $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}$ son linealmente independientes. El teorema se sigue por inducción.

49. Estabilidad. Un sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con coeficientes constantes es **estable** si tiene una matriz fundamental cuyas entradas permanecen acotadas cuando $t \to +\infty$. (El lema 1 de la sección 9.8 implica que si una matriz fundamental del sistema tiene esta propiedad, entonces todas las matrices fundamentales para el sistema la tienen.) En caso contrario, el sistema es **inestable**. Un sistema estable es **asintóticamente estable** si todas las soluciones tienden a la solución nula cuando $t \to +\infty$.

(a) Muestre que si **A** tiene todos sus valores propios reales y distintos, entonces $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ es estable si y sólo si todos los valores propios son no positivos.

(b) Muestre que **A** tiene todos sus valores propios reales y distintos, entonces $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios son negativos.

(c) Argumente por qué en las partes (a) y (b) podemos reemplazar "tiene todos sus valores propios reales y distintos" por "es simétrica" y que las afirmaciones siguen siendo válidas.

50. En una charola de hielo, el nivel de agua en cualquier cubo de hielo cambiará a una razón proporcional a la *diferencia entre* el nivel de agua de ese cubo y el nivel en los cubos adyacentes.

(a) Justifique que un modelo razonable con una ecuación diferencial para los niveles de agua x, y, z en la charola simplificada con tres cubos que aparece en la figura 9.4 está dado por

$$x' = y - x \ , \quad y' = x + z - 2y \ , \quad z' = y - z \ .$$

(b) Use vectores propios para resolver este sistema con las condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = z(0) = 0$.

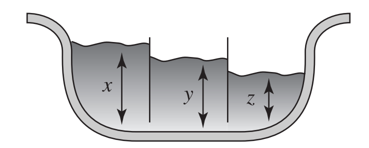


Figura 9.4 Charola de hielo

9.6 VALORES PROPIOS COMPLEJOS

En la sección anterior mostramos que el sistema homogéneo

$$\textbf{(1)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) ,$$

donde **A** es una matriz constante $n \times n$, tiene una solución de la forma $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u}$ si y sólo si r es un valor propio de **A** y **u** es un vector propio correspondiente. En esta sección mostraremos cómo obtener dos soluciones vectoriales reales del sistema (1) cuando **A** es real y tiene una pareja† de valores propios complejos conjugados $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$.

†Recuerde que las raíces complejas de una ecuación polinomial con coeficientes reales deben aparecer por pares de complejos conjugados.

Suponga que $r_1 = \alpha + i\beta$ (α y β reales) es un valor propio de $\mathbf{A}$ con vector propio correspondiente $\mathbf{z} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores reales constantes. Primero observamos que el conjugado complejo de $\bar{\mathbf{z}} := \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ es un vector propio asociado al valor propio $r_2 = \alpha = i\beta$. Para ver esto, observe que al calcular el conjugado de $(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\mathbf{z} = \mathbf{0}$ tenemos $(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, pues el conjugado del producto es el producto de los conjugados y $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ tienen entradas reales ($\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I}$). Como $r_2 = \bar{r}_1$, vemos que $\bar{\mathbf{z}}$ es un vector propio asociado a r_2. Por lo tanto, dos soluciones vectoriales complejas linealmente independientes de (1) son

(2) $$\mathbf{w}_1(t) = e^{r_1 t}\mathbf{z} = e^{(\alpha + i\beta)t}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \ ,$$

(3) $$\mathbf{w}_2(t) = e^{r_2 t}\bar{\mathbf{z}} = e^{(\alpha - i\beta)t}(\mathbf{a} - i\mathbf{b}) \ .$$

Como en la sección 4.6, cuando trabajamos con raíces complejas de la ecuación auxiliar, usemos una de estas soluciones complejas y la fórmula de Euler para obtener dos soluciones vectoriales reales. Con la ayuda de la fórmula de Euler, escribimos $\mathbf{w}_1(t)$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(t) &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ &= e^{\alpha t}\{(\cos \beta t\,\mathbf{a} - \operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{b}) + i(\operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{a} + \cos \beta t\,\mathbf{b})\} \ . \end{aligned}$$

Así, expresamos a $\mathbf{w}_1(t)$ en la forma $\mathbf{w}_1(t) = \mathbf{x}_1(t) + i\mathbf{x}_2(t)$, donde $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ son las dos funciones vectoriales *reales*

(4) $$\mathbf{x}_1(t) := e^{\alpha t}\cos \beta t\,\mathbf{a} - e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{b} \ ,$$

(5) $$\mathbf{x}_2(t) := e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{a} + e^{\alpha t}\cos \beta t\,\mathbf{b} \ .$$

Como $\mathbf{w}_1(t)$ es una solución de (1), entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{w}_1(t) \ , \\ \mathbf{x}_1' + i\mathbf{x}_2' &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + i\mathbf{A}\mathbf{x}_2 \ . \end{aligned}$$

Al igualar las partes real e imaginaria tenemos

$$\mathbf{x}_1'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) \ .$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ son soluciones vectoriales reales de (1) asociadas a los valores propios complejos conjugados $\alpha \pm i\beta$. Como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no son ambos nulos, se puede mostrar que $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ son funciones vectoriales linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ (véase el problema 15).

Resumamos nuestros hallazgos.

VALORES PROPIOS COMPLEJOS

Si la matriz real $\mathbf{A}$ tiene valores propios complejos conjugados $\alpha \pm i\beta$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$, entonces dos soluciones vectoriales reales linealmente independientes de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ son

(6) $$e^{\alpha t}\cos \beta t\,\mathbf{a} - e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{b} \ ,$$

(7) $$e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{a} + e^{\alpha t}\cos \beta t\,\mathbf{b} \ .$$

EJEMPLO 1 Hallar una solución general de

$$\textbf{(8)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad .$$

SOLUCIÓN La ecuación característica de **A** es

$$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -1 - r & 2 \\ -1 & -3 - r \end{vmatrix} = r^2 + 4r + 5 = 0 \ .$$

Por lo tanto, **A** tiene valores propios $r = -2 \pm i$.

Para determinar una solución general, sólo debemos hallar un vector propio asociado al valor propio $r = -2 + i$. Al sustituir $r = -2 + i$ en $(\mathrm{A} - r\mathbf{I})\mathbf{z} = \mathbf{0}$ tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 - i & 2 \\ -1 & -1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Las soluciones se pueden expresar como $z_1 = 2s$ y $z_2 = (-1 + i)s$, con s arbitrario. Por lo tanto, los vectores propios asociados a $r = -2 + i$ son $\mathbf{z} = s \operatorname{col}(2, -1 + i)$. Al hacer $s = 1$ tenemos el vector propio

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ .$$

Hemos visto que $\alpha = -2$, $\beta = 1$ y $\mathbf{z} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ con $\mathbf{a} = \operatorname{col}(2, -1)$ y $\mathbf{b} = \operatorname{col}(0, 1)$, de modo que una solución general de (8) es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 \left\{ e^{-2t} \cos t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - e^{-2t} \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad + c_2 \left\{ e^{-2t} \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \cos t \\ -e^{-2t}(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \operatorname{sen} t \\ e^{-2t}(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{bmatrix} \ . \ \blacksquare \end{aligned}$$

Los valores propios complejos aparecen al modelar sistemas masa-resorte acoplados. Por ejemplo, el movimiento del sistema masa-resorte que se ilustra en la figura 9.5 de la página 548 se describe mediante el sistema de segundo orden

$$\textbf{(9)} \qquad \begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \ , \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 \ , \end{aligned}$$

donde x_1 y x_2 representan los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 a la derecha de sus posiciones de equilibrio y k_1, k_2, k_3 son las constantes de resorte de los tres resortes (véase el aná-

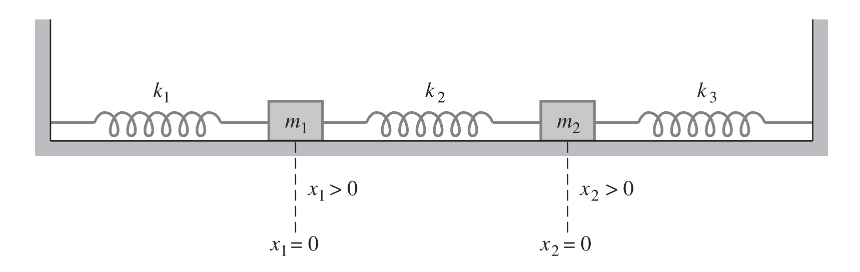


Figura 9.5 Sistema acoplado masa-resorte con extremos fijos

lisis en la sección 5.4). Si introducimos las nuevas variables $y_1 := x_1$, $y_2 := x'_1$, $y_3 := x_2$, $y_4 := x'_2$, entonces podemos escribir el sistema en la forma normal

$$\textbf{(10)} \qquad \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & 0 & k_2/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2/m_2 & 0 & -(k_2 + k_3)/m_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) .$$

Para tal sistema, se puede ver que **A** sólo tiene valores propios imaginarios y que aparecen por parejas conjugadas: $\pm i\beta_1$, $\pm i\beta_2$. Por lo tanto, cualquier solución constará de sumas de funciones seno y coseno. Las frecuencias de estas funciones

$$f_1 := \frac{\beta_1}{2\pi} \quad \text{y} \quad f_2 := \frac{\beta_2}{2\pi}$$

son las **frecuencias normales** o **naturales** del sistema (β_1 y β_2 son las **frecuencias angulares** del sistema).

En ciertas aplicaciones a la ingeniería, la única información que se requiere acerca de un producto particular es conocer sus frecuencias normales; uno debe garantizar que éstas queden lejos de las frecuencias que aparecen de manera natural en el ambiente de operación del producto (de modo que no aparezcan resonancias).

EJEMPLO 2 Determinar las frecuencias normales para el sistema acoplado masa-resorte descrito por el sistema (10) cuando $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k_1 = 1$ N/m, $k_2 = 2$ N/m y $k_3 = 3$ N/m.

SOLUCIÓN Para hallar los valores propios de **A**, debemos resolver la ecuación característica

$$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -r & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -r \end{vmatrix} = r^4 + 8r^2 + 11 = 0 .$$

De la fórmula cuadrática tenemos que $r^2 = -4 \pm \sqrt{5}$, de modo que los cuatro valores propios de **A** son $\pm i\sqrt{4 - \sqrt{5}}$ y $\pm i\sqrt{4 + \sqrt{5}}$. Por lo tanto, las dos frecuencias normales para este sistema son

$$\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2\pi} \approx 0.211 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2\pi} \approx 0.397 \text{ ciclos/segundo.} \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS 9.6

En los problemas 1 a 4, determine una solución general del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ *para la matriz dada* $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$.

En los problemas 5 a 8, determine una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ *para la matriz dada* $\mathbf{A}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 4 \end{bmatrix}$.

En los problemas 9 a 12, use un paquete de software de álgebra lineal para calcular los valores y vectores propios solicitados para la matriz dada $\mathbf{A}$ *y luego dé una matriz fundamental para el sistema* $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$.

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13 & -4 & -12 & 4 \end{bmatrix}$.

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -29 & -4 \end{bmatrix}$.

En los problemas 13 y 14, determine la solución del sistema dado que satisfaga la condición inicial dada.

13. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$,

(a) $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(b)** $\mathbf{x}(\pi) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{x}(-2\pi) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(d)** $\mathbf{x}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

14. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$,

(a) $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. **(b)** $\mathbf{x}(-\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. Muestre que $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ que están determinadas por las ecuaciones (4) y (5) son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$, siempre que $\beta \neq 0$ y $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no sean ambos nulos.

16. Muestre que $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ dados por las ecuaciones (4) y (5) se pueden obtener como combinaciones lineales de $\mathbf{w}_1(t)$ y $\mathbf{w}_2(t)$ dadas por las ecuaciones (2) y (3). [*Sugerencia*: Muestre que

$$\mathbf{x}_1(t) = \frac{\mathbf{w}_1(t) + \mathbf{w}_2(t)}{2}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \frac{\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)}{2i}.$$

En los problemas 17 y 18, use los resultados del problema 42 en los ejercicios 9.5 para hallar una solución general del sistema dado de Cauchy-Euler para $t > 0$.

17. $$t\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \ .$$

18. $$t\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \ .$$

19. Para el sistema acoplado masa-resorte descrito por el sistema (9), suponga que $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k_1 = k_2 = 2$ N/m y $k_3 = 3$ N/m. Determine las frecuencias normales para este sistema acoplado masa-resorte.

20. Para el sistema acoplado masa-resorte descrito por el sistema (9), suponga que $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ N/m y suponga que inicialmente $x_1(0) = 0$ m, $x_1'(0) = 0$ m/s, $x_2(0) = 2$ m y $x'_2(0) = 0$ m/s. Use técnicas del álgebra de matrices para resolver este problema con valores iniciales.

21. Red *RLC*. Las corrientes en la red *RLC* que se muestra en el diagrama esquemático de la figura 9.6 quedan descritas por las siguientes ecuaciones:

$$4I_2'(t) + 52q_1(t) = 10 \ ,$$
$$13I_3(t) + 52q_1(t) = 10 \ ,$$
$$I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) \ ,$$

donde $q_1(t)$ es la carga sobre el capacitor, $I_1(t) = q_1'(t)$ e inicialmente $q_1(0) = 0$ coulombs e $I_1(0) = 0$ amperes. Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3. [*Sugerencia*: Derive las dos primeras ecuaciones, elimine I_1 y forme un sistema normal con $x_1 = I_2$, $x_2 = I_2'$ y $x_3 = I_3$.]

22. Red *RLC*. Las corrientes en la red *RLC* del diagrama esquemático de la figura 9.7 están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$50I_1'(t) + 80I_2(t) = 160 \ ,$$
$$50I_1'(t) + 800q_3(t) = 160 \ ,$$
$$I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) \ ,$$

donde $q_3(t)$ es la carga sobre el capacitor, $I_3(t) = q_3'(t)$ e inicialmente $q_3(0) = 0.5$ coulombs e $I_3(0) = 0$ amperes. Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3. [*Sugerencia*: Derive las dos primeras ecuaciones, use la tercera ecuación para eliminar I_3 y forme un sistema normal con $x_1 = I_1$, $x_2 = I_1'$ y $x_3 = I_2$.]

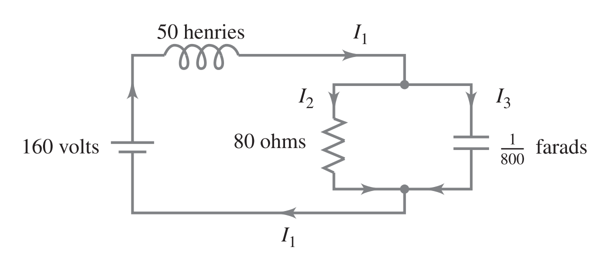


Figura 9.7 Red *RLC* para el problema 22

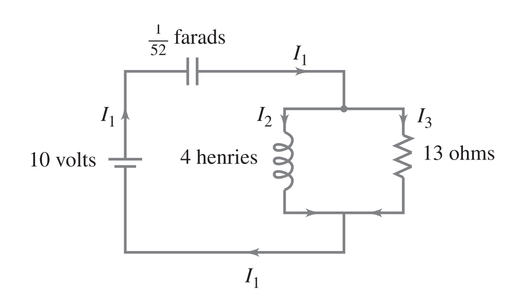


Figura 9.6 Red *RLC* para el problema 21

23. Estabilidad. En el problema 49 de los ejercicios 9.5 analizamos el concepto de estabilidad y estabilidad asintótica para un sistema norma de la forma $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Suponga que $\mathbf{A}$ tiene todos sus valores propios distintos (reales o complejos).

(a) Muestre que el sistema es estable si y sólo si todos los valores propios de $\mathbf{A}$ tienen parte real no positiva.

(b) Muestre que el sistema es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa.

9.7 SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

Las técnicas analizadas en el capítulo 4 para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ tienen extensiones naturales para los sistemas lineales no homogéneos.

Coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados se puede usar para hallar una solución particular de sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

cuando **A** es una matriz *constante* $n \times n$ y las entradas de $\mathbf{f}(t)$ son polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos, o sumas y productos finitos de estas funciones. Podemos usar la tabla 4.1 (analizada en la sección 4.8 y reproducida en el forro del libro) como una *guía* para elegir la forma de una solución particular $\mathbf{x}_p(t)$. Algunas excepciones se analizan en los ejercicios (véanse los problemas 25-28).

EJEMPLO 1 Hallar una solución general de

$$\textbf{(1)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + t\mathbf{g}\,, \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 5 de la sección 9.5 vimos que una solución general del sistema homogéneo correspondiente $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es

$$\textbf{(2)} \qquad \mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como las entradas en $\mathbf{f}(t) := t\mathbf{g}$ son justamente funciones lineales de t, nos inclinamos por buscar una solución particular de la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} = t \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

donde debemos determinar los vectores constantes **a** y **b**. Al sustituir esta expresión de $\mathbf{x}_p(t)$ en el sistema (1) tenemos

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}(t\mathbf{a} + \mathbf{b})\, t\mathbf{g}\,,$$

que podemos escribir como

$$t(\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{g}) + (\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}\,.$$

Al igualar a cero los "coeficientes" de este polinomio vectorial obtenemos los dos sistemas

(3) $\mathbf{Aa} = -\mathbf{g}$,

(4) $\mathbf{Ab} = \mathbf{a}$.

Podemos usar eliminación gaussiana o un paquete de software de álgebra lineal para determinar **a** en (3); vemos que $\mathbf{a} = \text{col}(5, 2, 4)$. A continuación sustituimos este valor de **a** en (4) y determinamos **b** como $\mathbf{b} = \text{col}(1, 0, 2)$. Por lo tanto, una solución particular de (1) es

(5) $$\mathbf{x}_p(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} = t\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t + 1 \\ 2t \\ 4t + 2 \end{bmatrix} .$$

Una solución general para (1) es $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t)$, donde $\mathbf{x}_h(t)$ está dada en (2) y $\mathbf{x}_p(t)$ en (5). ■

En el ejemplo anterior, el término no homogéneo $\mathbf{f}(t)$ era un polinomio vectorial. Si en vez de esto, $\mathbf{f}(t)$ tiene la forma

$$\mathbf{f}(t) = \text{col}(1, t, \text{sen } t) ,$$

entonces podemos usar el principio de superposición para buscar una solución particular de la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} + (\text{sen } t)\mathbf{c} + (\cos t)\mathbf{d} .$$

De manera análoga, si

$$\mathbf{f}(t) = \text{col}(t, e^t, t^2) ,$$

haríamos

$$\mathbf{x}_p(t) = t^2\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c} + e^t\mathbf{d} .$$

Por supuesto, debemos modificar nuestra propuesta si queremos que uno de los términos sea solución del sistema homogéneo correspondiente. Los problemas 25-28 ilustran las estrategias para este problema.

Variación de parámetros

En la sección 4.9 analizamos el método de variación de parámetros para una ecuación lineal general de segundo orden (no necesariamente con coeficientes constantes). Dicho de manera simple, la idea es que si una solución general de la ecuación homogénea tiene la forma $x_h(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, entonces una solución particular de la ecuación no homogénea tendrá la forma $x_p(t) = v_1(t)x_1(t) + v_2(t)x_2(t)$, donde $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son ciertas funciones de t. Podemos usar una idea similar para sistemas.

Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental para el sistema homogéneo

(6) $$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) ,$$

donde ahora, *las entradas de* **A** *pueden ser cualesquiera funciones continuas de t*. Como una solución general de (6) está dada por $\mathbf{X}(t)\mathbf{c}$, donde **c** es un vector constante $n \times 1$, buscamos una solución particular del sistema no homogéneo

(7) $$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

de la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{v}(t) , \tag{8}$$

donde $\boldsymbol{v}(t) = \text{col}(v_1(t), \ldots, v_n(t))$ es una función vectorial de t, por determinar.

Para deducir una fórmula para $\boldsymbol{v}(t)$, primero derivamos (8) usando la versión matricial de la regla del producto para obtener

$$\mathbf{x}_p'(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{v}'(t) + \mathbf{X}'(t)\boldsymbol{v}(t) .$$

Al sustituir las expresiones para $\mathbf{x}_p(t)$ y $\mathbf{x}_p'(t)$ en (7) llegamos a

$$\mathbf{X}(t)\boldsymbol{v}'(t) + \mathbf{X}'(t)\boldsymbol{v}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)\boldsymbol{v}(t) + \mathbf{f}(t) . \tag{9}$$

Como $\mathbf{X}(t)$ satisface la ecuación matricial $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$, la ecuación (9) se convierte en

$$\mathbf{X}\boldsymbol{v}' + \mathbf{A}\mathbf{X}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\mathbf{X}\boldsymbol{v} + \mathbf{f} ,$$

$$\mathbf{X}\boldsymbol{v}' = \mathbf{f} .$$

Multiplicamos ambos lados de la última ecuación por $\mathbf{X}^{-1}(t)$ (que existe pues las columnas de $\mathbf{X}(t)$ son linealmente independientes) para obtener

$$\boldsymbol{v}'(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t) .$$

Al integrar, tenemos

$$\boldsymbol{v}(t) = \int \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt .$$

Por lo tanto, una solución particular de (7) es

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{v}(t) = \mathbf{X}(t)\int \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt . \tag{10}$$

Combinamos (10) con la solución $\mathbf{X}(t)\mathbf{c}$ del sistema homogéneo para tener la siguiente solución general de (7):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} + \mathbf{X}(t)\int \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt . \tag{11}$$

La elegancia de la deducción de la fórmula de variación de parámetros (10) para sistemas es evidente al compararla con las deducciones más largas para el caso escalar, en las secciones 4.9 y 6.4.

Dado un problema con valores iniciales de la forma

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) , \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 , \tag{12}$$

podemos usar la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para determinar $\mathbf{c}$ en (11). Al expresar $\mathbf{x}(t)$ mediante una integral definida, tenemos

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} + \mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds .$$

Usamos la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para ver que

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}(t_0)\mathbf{c} + \mathbf{X}(t_0)\int_{t_0}^{t_0} \mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds = \mathbf{X}(t_0)\mathbf{c}\ .$$

Determinamos a $\mathbf{c}$ como $\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$. Así, la solución de (12) está dada por la fórmula

$$\textbf{(13)} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds\ .$$

Para aplicar las fórmulas de variación de parámetros, primero debemos determinar una matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$ para el sistema homogéneo. Cuando la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es constante, ya hemos analizado métodos para determinar $\mathbf{X}(t)$. Sin embargo, si las entradas de $\mathbf{A}$ dependen de t, la determinación de $\mathbf{X}(t)$ puede ser muy difícil (implicando, posiblemente, ¡una serie de potencias matricial!).

EJEMPLO 2 Determinar la solución del problema con valores iniciales

$$\textbf{(14)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 de la sección 9.5 hallamos dos soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo correspondiente, a saber,

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 3e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, una matriz fundamental para el sistema homogéneo es

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Aunque podemos encontrar la solución de (14) con el método de coeficientes indeterminados, la encontraremos directamente de la fórmula (13). Para esto, necesitamos $\mathbf{X}^{-1}(t)$. Una forma† de obtener $\mathbf{X}^{-1}(t)$ consiste en formar la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3e^{t} & e^{-t} & 1 & 0 \\ e^{t} & e^{-t} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y reducimos por renglones esta matriz a la matriz $[\mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{X}^{-1}(t)]$, lo que da

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{t} & \frac{3}{2}e^{t} \end{bmatrix}.$$

†Este procedimiento funciona para una matriz invertible de cualquier dimensión. Para una matriz invertible 2×2 $\mathbf{U}(t)$, en el problema 32 damos una fórmula para $\mathbf{U}^{-1}(t)$.

Al sustituir en la fórmula (13), obtenemos la solución

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-s} & -\frac{1}{2}e^{-s} \\ -\frac{1}{2}e^{s} & \frac{3}{2}e^{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2s} \\ 1 \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{s} - \frac{1}{2}e^{-s} \\ -\frac{1}{2}e^{3s} + \frac{3}{2}e^{s} \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 1 \\ \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{9}{2}e^t - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} + 3 \\ -\frac{3}{2}e^t - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 2 \end{bmatrix} . \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS 9.7

En los problemas 1 a 4, use el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución general del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, *donde* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{f}(t)$ *están dados.*

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -11 \\ -5 \end{bmatrix}.$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -t - 1 \\ -4t - 2 \end{bmatrix}.$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 4e^t \\ -2e^t \end{bmatrix}.$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -4\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}.$

En los problemas 5 a 10, use el método de coeficientes indeterminados (tabla 4.1 o en los forros del libro) para determinar únicamente la forma de una solución particular del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, *donde* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{f}(t)$ *están dados.*

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} t \\ 3 \end{bmatrix}.$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 3t \\ t \end{bmatrix}.$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t+1 \end{bmatrix}.$

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}.$

En los problemas 11 a 16, use la fórmula de variación de parámetros (11) para hallar una solución general del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, *donde* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{f}(t)$ *están dados.*

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 4e^t \end{bmatrix}.$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t^{-1} \\ 4 + 2t^{-1} \end{bmatrix}.$

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 8 \operatorname{sen} t \\ 0 \end{bmatrix}.$

En los problemas 17 a 20, use las fórmulas de variación de parámetros (11) y tal vez un paquete de software de álgebra lineal para hallar una solución general del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, *donde* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{f}(t)$ *están dados.*

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ -e^t \\ -e^t \end{bmatrix}.$

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ e^{-t} \\ t \end{bmatrix}.$

20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

En los problemas 21 y 22, determine la solución del sistema dado que satisface la condición inicial indicada.

21. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix},$

(a) $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$ **(b)** $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(c) $\mathbf{x}(5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$ **(d)** $\mathbf{x}(-1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$

22. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 4t \\ -4t-2 \end{bmatrix},$

(a) $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$ **(b)** $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

23. Use técnicas del álgebra de matrices y el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución general de

$$x''(t) + y'(t) - x(t) + y(t) = -1\ ,$$
$$x'(t) + y'(t) - x(t) = t^2\ .$$

Compare su solución con la del ejemplo 3 en la sección 5.3.

24. Use técnicas del álgebra de matrices y el método de coeficientes indeterminados para resolver el problema con valores iniciales

$$x'(t) - 2y(t) = 4t\ , \qquad x(0) = 4\ ;$$
$$y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2\ , \qquad y(0) = -5\ .$$

Compare su solución con la del ejemplo 1 en la sección 7.9.

25. Para determinar un solución general del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \ , \quad \textbf{donde} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix},$$

proceda como sigue:

(a) Halle un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo correspondiente.

(b) La elección obvia para una solución particular sería una función vectorial de la forma $\mathbf{x}_p(t) = e^t\mathbf{a}$; sin embargo, el sistema homogéneo tiene una solución de esta forma. La siguiente elección sería $\mathbf{x}_p(t) = te^t\mathbf{a}$. Muestre que esta elección no funciona.

(c) Para sistemas, la multiplicación por t no siempre es suficiente. La estimación adecuada es

$$\mathbf{x}_p(t) = te^t\mathbf{a} + e^t\mathbf{b} \ .$$

Use esta estimación para hallar una solución particular del sistema dado.

(d) Use los resultados de las partes (a) y (c) para hallar una solución general del sistema dado.

26. Para el sistema del problema 25, vimos que una estimación adecuada de una solución particular es $\mathbf{x}_p(t) = te^t\mathbf{a} + e^t\mathbf{b}$. En algunos casos, **a** o **b** pueden anularse.

(a) Determine una solución particular para el sistema del problema 25 si $\mathbf{f}(t) = \text{col}(3e^t, 6e^t)$.

(b) Determine una solución particular para el sistema del problema 25 si $\mathbf{f}(t) = \text{col}(e^t, e^t)$.

27. Halle una solución general del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 - e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} .$$

[*Sugerencia:* Use el principio de superposición para determinar la solución particular.]

28. Encuentre una solución particular del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

[*Sugerencia:* Intente con $\mathbf{x}_p(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}$.]

En los problemas 29 y 30, halle una solución general del sistema de Cauchy-Euler dado para $t > 0$. Recuerde expresar el sistema en la forma $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ antes de usar la fórmula de variación de parámetros:

29. $t\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} t^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$.

30. $t\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$.

31. Use la fórmula de variación de parámetros (10) para deducir una fórmula para una solución particular y_p de la ecuación escalar $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ en términos de dos soluciones linealmente independientes $y_1(t)$, $y_2(t)$ de la ecuación homogénea correspondiente. Muestre que su respuesta coincide con las fórmulas deducidas en la sección 4.9. [*Sugerencia*: Escriba primero la ecuación escalar en forma de sistema.]

32. Sea $\mathbf{U}(t)$ la matriz invertible 2×2

$$\mathbf{U}(t) := \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} .$$

Muestre que

$$\mathbf{U}^{-1}(t) = \frac{1}{[a(t)d(t) - b(t)c(t)]} \begin{bmatrix} d(t) & -b(t) \\ -c(t) & a(t) \end{bmatrix} .$$

33. Red *RL*. Las corrientes en la red *RL* del diagrama esquemático de la figura 9.8 están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$2I_1'(t) + 90I_2(t) = 9 \ ,$$
$$I_3'(t) + 30I_4(t) - 90I_2(t) = 0 \ ,$$
$$60I_5(t) - 30I_4(t) = 0 \ ,$$
$$I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) \ ,$$
$$I_3(t) = I_4(t) + I_5(t) \ .$$

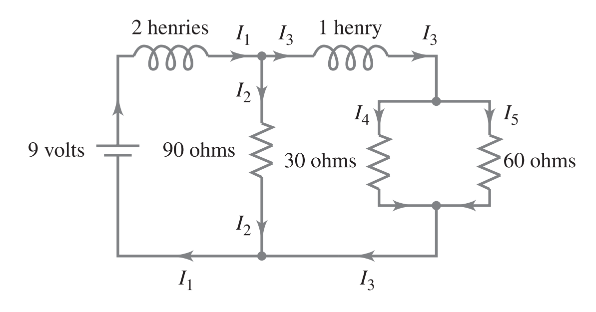


Figura 9.8 Red *RL* para el problema 33

Suponga que en un principio las corrientes se anulan. Determine las cinco corrientes $I_1, \ldots, I_5$. [*Sugerencia:* Elimine todas las incógnitas excepto I_2 e I_5, y forme un sistema normal con $x_1 = I_2$ y $x_2 = I_5$.]

34. Modelo de combate convencional. Un modelo muy simplista de un par de fuerzas convencionales en combate proporciona el siguiente sistema:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} ,$$

donde $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2)$. Las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan la fuerza de los ejércitos enemigos en el instante t. Los términos $-ax_1$ y $-dx_2$ representan las tasas de pérdidas operativas, y los términos $-bx_2$ y $-cx_1$ representan las tasas de pérdida en combate para las tropas x_1 y x_2, respectivamente. Las constantes p y q representan las tasas respectivas de refuerzo. Sean $a = 1$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 2$ y $p = q = 5$. Resuelva el problema con valores iniciales adecuado para determinar cuál de los ejércitos ganará si

(a) $x_1(0) = 20, \quad x_2(0) = 20$.
(b) $x_1(0) = 21, \quad x_2(0) = 20$.
(c) $x_1(0) = 20, \quad x_2(0) = 21$.

35. Problema de mezclas. Dos tanques A y B, cada uno de los cuales contiene 50 litros de líquido, están

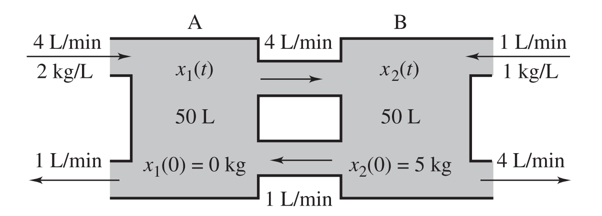


Figura 9.9 Problema de mezclas para tanques interconectados

conectados entre sí mediante tubos. El líquido pasa del tanque A al tanque B a razón de 4 litros/minuto y del B al A a razón de 1 litro/minuto (véase la figura 9.9). El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Una solución salina con una concentración de 3 kg/litro de sal entra al tanque A a razón de 4 litros/minuto. Una solución salina con una concentración de 1 kg/litro de sal entra al tanque B a razón de 1 litro/minuto. Las soluciones salen del sistema por ambos tanques, del tanque A a 1 litro/minuto y del tanque B a 4 litros/minuto. Si en un principio, el tanque A contiene agua pura y el tanque B contiene 5 kg de sal, determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$. Después de transcurrir varios minutos, ¿cuál tanque tiene la mayor concentración de sal? ¿Cuál es su concentración límite?

9.8 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL MATRICIAL

En este capítulo hemos desarrollado varias formas de extender técnicas de ecuaciones diferenciales escalares a sistemas. En esta sección daremos otro paso adelante mostrando que con la notación correcta, las fórmulas para resolver sistemas normales con coeficientes constantes son idénticas a las fórmulas para resolver ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes. Por ejemplo, sabemos que una solución general de la ecuación $x'(t) = ax(t)$, donde a es una constante, es $x(t) = ce^{at}$. De manera análoga, mostraremos que una solución general del sistema normal

$$\textbf{(1)} \qquad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) ,$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante $n \times n$, es $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$. Nuestra primera tarea consiste en definir la exponencial matricial $e^{\mathbf{A}}t$.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz constante $n \times n$, definimos $e^{\mathbf{A}t}$ considerando el desarrollo en serie para e^{at} y reemplazando a por $\mathbf{A}$; es decir,

$$\textbf{(2)} \qquad e^{\mathbf{A}t} := \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \cdots .$$

(Observe que también hemos reemplazado 1 por **I**.) Entendemos el lado derecho de (2) como la matriz $n \times n$ cuyos elementos son series de potencias con coeficientes dados por las entradas correspondientes en las matrices $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2/2!, \ldots$.

Si **A** es una matriz diagonal, entonces el cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ es directo. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix};$$

y así

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{t^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Más en general, si **A** es una matriz *diagonal* $n \times n$ con $r_1, r_2, \ldots, r_n$ a lo largo de su diagonal principal, entonces $e^{\mathbf{A}t}$ es la matriz diagonal con $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_n t}$ a lo largo de su diagonal principal (véase el problema 26). Si **A** no es una matriz diagonal, el cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ es más complicado. Trabajaremos con este importante problema más adelante en esta sección.

Se puede mostrar que la serie (2) converge para toda t y que tiene las mismas propiedades† que la exponencial escalar e^{at}.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL MATRICIAL

Teorema 7. Sean **A** y **B** matrices constantes $n \times n$ y r, s y t números reales (o complejos). Entonces,

(a) $e^{\mathbf{A}0} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$.

(b) $e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$.

(c) $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$.

(d) $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$, siempre que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(e) $e^{r\mathbf{I}t} = e^{rt}\mathbf{I}$.

La propiedad (c) tiene profundas implicaciones. La primera es que afirma que para cualquier matriz **A**, la matriz $e^{\mathbf{A}t}$ *tiene* una inversa para toda t. Además, esta inversa se obtiene

†Para la demostración de ésta y otras propiedades de la función exponencial matricial, véase *Matrix Computations,* 3a. edición, por Gene H. Golub y Charles F. van Loan (Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996), capítulo 11. Véase también el divertido artículo "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponencial of a Matrix", por Cleve Moler y Charles van Loan, *SIAM Review*, vol. 20, núm. 4 (octubre de 1978).

simplemente reemplazando t por $-t$. Al aplicar la propiedad (d) (la ley de los exponentes), hay que tener cuidado, debido a la condición de que las matrices **A** y **B** deben conmutar (véase el problema 25).

Otra importante propiedad de la exponencial matricial surge del hecho de que podemos derivar la serie en (2) término a término. Esto da como resultado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \cdots\right)\\ &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \mathbf{A}^3\frac{t^2}{2} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\\ &= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2} + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t},$$

de modo que $e^{\mathbf{A}t}$ *es una solución de la ecuación diferencial matricial* $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Como $e^{\mathbf{A}t}$ es invertible (propiedad (c)), tenemos que las columnas de $e^{\mathbf{A}t}$ son soluciones linealmente independientes del sistema (1). Al combinar estos hechos tenemos lo siguiente.

$e^{\mathbf{A}t}$ ES UNA MATRIZ FUNDAMENTAL

Teorema 8. Si **A** es una matriz constante $n \times n$, entonces las columnas de la exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$ forman un conjunto fundamental de soluciones para el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Por lo tanto, $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental para el sistema, y una solución general es $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$.

El hecho de saber que $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental tiene un uso práctico siempre que podamos calcular $e^{\mathbf{A}t}$. Como hemos observado, si **A** es una matriz diagonal, entonces basta exponenciar los elementos de la diagonal (por t) para obtener $e^{\mathbf{A}t}$. Además, si **B** es una matriz **nilpotente**, es decir, $\mathbf{B}^k = \mathbf{0}$ para algún entero positivo k, entonces la serie para $e^{\mathbf{B}t}$ sólo tiene un número finito de términos, pues $\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^{k+1} = \cdots = \mathbf{0}$. En tales casos, $e^{\mathbf{B}t}$ se reduce a

$$e^{\mathbf{B}t} = \mathbf{I} + \mathbf{B}t + \cdots + \mathbf{B}^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Usamos la ley de los exponentes y este hecho acerca de las matrices nilpotentes para determinar e^{At} para una clase particular de matrices. Sea r un escalar. Como

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{r\mathbf{I}t}e^{(\mathbf{A}-r\mathbf{I})t} = e^{rt}e^{(\mathbf{A}-r\mathbf{I})t},$$

obtenemos una representación finita de $e^{\mathbf{A}t}$ si $\mathbf{B} = \mathbf{A} - r\mathbf{I}$ es nilpotente para alguna r. De hecho, cuando el polinomio característico de **A** tiene la forma $p(r) = (r_1 - r)^n$, es decir,

cuando **A** tiene un valor propio r_1 de multiplicidad n, el teorema de Cayley-Hamilton[†] implica que $(r_1\mathbf{I} - \mathbf{A})^n = \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\mathbf{A} - r_1\mathbf{I}$ es nilpotente y

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{r_1 t}\left\{\mathbf{I} + (\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})t + \cdots + (\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} .$$

EJEMPLO 1 Determinar la matriz fundamental $e^{\mathbf{A}t}$ para el sistema

$$\textbf{(3)} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} , \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} .$$

SOLUCIÓN Primero calculamos el polinomio característico de **A**:

$$p(r) = |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-r & 1 & 1 \\ 1 & 2-r & 1 \\ -2 & -2 & -1-r \end{vmatrix} = -r^3 + 3r^2 - 3r + 1 = -(r-1)^3 .$$

Así, $r = 1$ es un valor propio de **A** con multiplicidad 3. Por el teorema de Cayley-Hamilton, $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3 = \mathbf{0}$, de modo que

$$\textbf{(4)} \qquad e^{\mathbf{A}t} = e^t e^{(\mathbf{A}-\mathbf{I})t} = e^t\left\{\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \mathbf{I})t + (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\frac{t^2}{2}\right\} .$$

Al calcular, tenemos

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Al sustituir en (4) obtenemos

$$\textbf{(5)} \qquad e^{\mathbf{A}t} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + te^t & te^t & te^t \\ te^t & e^t + te^t & te^t \\ -2te^t & -2te^t & e^t - 2te^t \end{bmatrix} .$$

■

En el ejemplo anterior usamos el hecho de que la matriz $\mathbf{A} - r\mathbf{I}$ es nilpotente para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ directamente. En general, no podemos esperar que la matriz sea nilpotente, pero podemos aprovechar la siguiente relación entre matrices fundamentales como ayuda para calcular $e^{\mathbf{A}t}$.

[†]El teorema de Cayley-Hamilton establece que una matriz satisface su propia ecuación característica; es decir, $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Para un análisis de este teorema, véase *Matrices and Linear Transformations*, 2a. edición, por Charles G. Cullen (Dover Publications, Nueva York, 1990), capítulo 5.

RELACIÓN ENTRE MATRICES FUNDAMENTALES

Lema 1. Sean $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ dos matrices fundamentales para el mismo sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Entonces existe una matriz constante $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}$.

Demostración. Sean $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ las columnas de $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ las columnas de $\mathbf{Y}(t)$. Como $\{\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y $\mathbf{x}_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ son soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, existen constantes $c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}$ tales que

$$\mathbf{x}_j(t) = c_{1j}\mathbf{y}_1(t) + c_{2j}\mathbf{y}_2(t) + \cdots + c_{nj}\mathbf{y}_n(t)$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. Pero esto es equivalente a escribir $\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}$, donde $\mathbf{C} = [c_{ij}]$. ■

Usaremos el lema 1 para hallar una fórmula para $e^{\mathbf{A}t}$ cuando se conoce una matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$ para $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Como $e^{\mathbf{A}t}$ también es una matriz fundamental para el sistema, el lema 1 afirma que $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$ para cierta matriz constante $\mathbf{C}$. Al hacer $t = 0$ obtenemos $\mathbf{I} = \mathbf{X}(0)\mathbf{C}$ y al despejar $\mathbf{C}$ tenemos $\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1}(0)$. Por lo tanto,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)\ . \tag{6}$$

Aunque esta fórmula es útil, sustituye el problema de determinar $e^{\mathbf{A}t}$ por el de determinar una matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$. Por fortuna, podemos usar las *propiedades* de la exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$ para simplificar esta tarea. Como las columnas de una matriz fundamental deben tener la forma $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}$, trataremos de hallar n vectores $\mathbf{u}$ para los que sea razonable el cálculo de $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}$.

Primero usamos la relación $e^{\mathbf{A}t} = e^{rt}e^{(A - r\mathbf{I})t}$ para expresar $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}$ como

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} &= e^{rt}e^{(\mathbf{A}-r\mathbf{I})t}\mathbf{u} \\ &= e^{rt}\left\{\mathbf{u} + t(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} + \cdots + \frac{t^k}{k!}(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^k\mathbf{u} + \cdots\right\}\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Sabemos que si r es un valor propio de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{u}$ es un vector propio correspondiente, entonces $e^{rt}\mathbf{u}$ es una solución de (1). En efecto, en este caso, $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} = (\mathbf{A} - r\mathbf{I})^2\mathbf{u} = \cdots = \mathbf{0}$. Por lo tanto, la serie en (7) se reduce al primer término, $e^{rt}\mathbf{u}$. Aunque es mucho esperar que $\mathbf{A} - r\mathbf{I}$ sea nilpotente, no es mucho pedir que $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^k\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para algún vector no trivial $\mathbf{u}$ y algún entero positivo k.

VECTORES PROPIOS GENERALIZADOS

Definición 5. Sea $\mathbf{A}$ una matriz constante $n \times n$ y r un valor propio de $\mathbf{A}$. Un vector no trivial $\mathbf{u}$ que satisface

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^k\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

para algún entero positivo k es llamado un **vector propio generalizado** asociado a r.

Una consecuencia del teorema de descomposición primaria del álgebra lineal avanzada[†] es que si el polinomio característico de **A** es

$$p(r) = (r_1 - r)^{m_1} \cdots (r_k - r)^{m_k} ,$$

donde los r_i son valores propios distintos de **A** y m_i es la multiplicidad del valor propio r_i, entonces para cada i existen m_i vectores propios generalizados linealmente independientes asociados a r_i, y el conjunto combinado de $n = m_1 + \cdots + m_k$ vectores propios generalizados es linealmente independiente. Además, si **u** es un vector propio generalizado asociado con r_i, entonces $(\mathbf{A} - r_i\mathbf{I})^{m_i}\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Esto conduce al siguiente procedimiento para determinar n soluciones linealmente independientes del sistema (1).

SOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE VECTORES PROPIOS GENERALIZADOS

Para obtener un conjunto fundamental de soluciones para $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

(a) Calcule el polinomio característico $p(t) = |\mathbf{A} - r\mathbf{I}|$ y determine los valores propios distintos $r_1, \ldots, r_k$.
(b) Para cada valor propio r_i, determine m_i vectores propios generalizados linealmente independientes, donde m_i es la multiplicidad del valor propio r_i.
(c) Use los n vectores propios generalizados linealmente independientes en (b) para calcular las n soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ de la forma

$$\textbf{(8)} \qquad e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} = e^{rt}\left\{\mathbf{u} + t(\mathbf{A} - \mathbf{r}I)\mathbf{u} + \frac{t^2}{2}(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^2\mathbf{u} + \cdots\right\} ,$$

donde r es un valor propio y **u** es un vector propio generalizado correspondiente. Si r tiene multiplicidad m_i, entonces la serie anterior se reduce a los primeros m_i términos.

EJEMPLO 2 Determinar la matriz fundamental $e^{\mathbf{A}t}$ para el sistema

$$\textbf{(9)} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} , \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

SOLUCIÓN Primero calculamos el polinomio característico de **A**:

$$p(r) = |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 1 & 3-r & 0 \\ 0 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = -(r-1)^2(r-3) .$$

Por lo tanto, los valores propios de **A** son $r = 1$, con multiplicidad 2, y $r = 3$, con multiplicidad 1.

[†]Véase *Matrices and Linear Transformations*, 2a. edición, por Charles G. Cullen, Ibídem.

Como $r = 1$ tiene multiplicidad 2, debemos determinar dos vectores propios generalizados linealmente independientes asociados a este valor. Comenzamos con $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$; es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Obtenemos que $u_1 = u_2 = 0$ y $u_3 = s$, donde s es arbitrario. Así, sólo existe un vector propio generalizado linealmente independiente correspondiente a $r = 1$, y con $s = 1$ elegimos $\mathbf{u}_1 = \text{col}(0, 0, 1)$. Por lo tanto, una solución de (9) es

$$\textbf{(10)} \qquad \mathbf{x}_1(t) = e^t\mathbf{u}_1 = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix} .$$

A continuación resolvemos $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$. De

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

vemos que $u_2 - s$, $u_1 = -2u_2 = -2s$ y $u_3 = v$, donde s y v son arbitrarios. Haciendo $s = 1$ y $v = 0$, obtenemos el vector propio generalizado $\mathbf{u}_2 = \text{col}(-2, 1, 0)$, que es linealmente independiente de $\mathbf{u}_1$. Ahora usamos $\mathbf{u}_2$ para obtener una segunda solución de (9). Como $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, la fórmula (8) se reduce a

$$\textbf{(11)} \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}_2 = e^t\{\mathbf{u}_2 + t(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u}_2\}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^t \\ e^t \\ te^t \end{bmatrix} .^{\dagger}$$

Para el valor propio $r = 3$, resolvemos $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$, es decir,

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

para obtener el vector propio $\mathbf{u}_3 = \text{col}(0, 2, 1)$. Por lo tanto, una tercera solución linealmente independiente de (9) es

$$\textbf{(12)} \qquad \mathbf{x}_3(t) = e^{3t}\mathbf{u}_3 = e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} .$$

†Observe que expresamos $\mathbf{x}_2(t)$ como se analizó en en el problema 35 de los ejercicios 9.5, página 543.

La matriz $\mathbf{X}(t)$ cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ y $\mathbf{x}_3(t)$ dados en las ecuaciones (10), (11) y (12),

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{bmatrix},$$

es una matriz fundamental para (9). Al hacer $t = 0$ y calcular $\mathbf{X}^{-1}(0)$, tenemos que

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

La fórmula (6) implica ahora que

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^{3t} & 0 \\ -\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

El uso de la matriz fundamental $e^{\mathbf{A}t}$ simplifica muchos cálculos. Por ejemplo, las propiedades $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}s} = e^{\mathbf{A}(t-s)}$ y $(e^{\mathbf{A}t_0})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t_0}$ nos permiten escribir la fórmula de variación de parámetros (13) de la sección 9.7 en una forma más sencilla: la solución del problema con valores iniciales $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ está dada por

$$\textbf{(13)} \qquad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds\,,$$

que es una versión para sistemas de la fórmula para la solución del problema escalar con valores iniciales $x' = ax + f(t)$, $x(t_0) = x_0$.

Para concluir, notemos que los paquetes de software para el cálculo de valores propios indicados en la sección 9.5 (página 534) también contienen subrutinas para calcular la exponencial matricial.

EJERCICIOS 9.8

En los problemas 1 a 6, (a) muestre que la matriz dada **A** *satisface* $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ *para algún número r y cierto número positivo k y (b) use este hecho para determinar la matriz* $e^{\mathbf{A}t}$. *[Sugerencia: Calcule el polinomio característica y use el teorema de Cayley-Hamilton.]*

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$.

En los problemas 7 a 10, determine $e^{\mathbf{A}t}$ *hallando primero una matriz fundamental* $\mathbf{X}(t)$ *para* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *y usando a continuación la fórmula (6).*

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

En los problemas 11 a 12, determine $e^{\mathbf{A}t}$ *usando vectores propios generalizados para hallar una matriz fundamental y usando luego la fórmula (6).*

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

En los problemas 13 a 16, use un paquete de software de álgebra lineal como ayuda para determinar $e^{\mathbf{A}t}$.

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

En los problemas 17 a 20, use los vectores propios generalizados de **A** *para determinar una solución general del sistema* $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, *donde* **A** *está dada.*

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$.

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & -16 & 7 \end{bmatrix}$.

21. Use los resultados del problema 5 para hallar la solución del problema con valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

22. Use su respuesta al problema 12 para hallar la solución del problema con valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

23. Use los resultados del problema 3 y la fórmula de variación de parámetros (13) para hallar la solución del problema con valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

24. Use su respuesta al problema 9 y la fórmula de variación de parámetros (13) para hallar la solución del problema con valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

25. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Muestre que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
(b) Muestre que la propiedad (d) del teorema 7 no se cumple para estas matrices. Es decir, muestre que $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$.

26. Sea **A** una matriz diagonal $n \times n$ con entradas $r_1, \ldots, r_n$ a lo largo de su diagonal principal. Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$, proceda como sigue:

(a) Muestre que $\mathbf{A}^k$ es la matriz diagonal con entradas $r_1^k, \ldots, r_n^k$ a lo largo de su diagonal principal.
(b) Use el resultado de la parte (a) para mostrar que $e^{\mathbf{A}t}$ es la matriz diagonal con entradas $e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}$ a lo largo de su diagonal principal.

27. En los problemas 35-40 de los ejercicios 9.5, página 543, se invocaron algunas fórmulas *ad hoc* para determinar soluciones generales del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cuando **A** tiene valores propios repetidos. Use el procedimiento de vectores propios generalizados (y en particular, la ecuación (8)) para justificar las fórmulas *ad hoc* propuestas en

(a) el problema 35 de los ejercicios 9.5.
(b) el problema 37 de los ejercicios 9.5.
(c) el problema 39 de los ejercicios 9.5.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo analizamos la teoría de sistemas lineales en forma normal y presentamos métodos para resolver tales sistemas. La teoría y métodos son extensiones naturales del desarrollo para ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior. Enumeramos a continuación las propiedades y técnicas importantes.

Sistemas normales homogéneos

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

Suponemos que la función matricial $n \times n$ $\mathbf{A}(t)$ es continua en un intervalo I.

Conjunto fundamental de soluciones: $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Las n soluciones vectoriales $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ del sistema homogéneo en el intervalo I forman un **conjunto fundamental de soluciones**, siempre que ellas sean linealmente independientes en I, o en forma equivalente, su **wronskiano**

$$W[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n](t) := \det[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \cdots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \cdots & x_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \cdots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

nunca se anula en I.

Matriz fundamental: $\mathbf{X}(t)$. Una función matricial $n \times n$ $\mathbf{X}(t)$ cuyos vectores columna forman un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo es una **matriz fundamental**. El determinante de $\mathbf{X}(t)$ es el wronskiano del conjunto fundamental de soluciones. Como el wronskiano nunca se anula en el intervalo I, entonces $\mathbf{X}^{-1}(t)$ existe para t en I.

Solución general de un sistema homogéneo: $\mathbf{Xc} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$. Si $\mathbf{X}(t)$ es una matriz fundamental cuyos vectores columna son $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, entonces una solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) ,$$

donde $\mathbf{c} = \text{col}(c_1, \ldots, c_n)$ es un vector constante arbitrario.

Sistemas homogéneos con coeficientes constantes. La forma de una solución general para un sistema homogéneo con coeficientes constantes depende de los valores y vectores propios de la matriz constante $\mathbf{A}$ $n \times n$. Un **valor propio** de $\mathbf{A}$ es un número r tal que el sistema $\mathbf{Au} = r\mathbf{u}$ tiene una solución no trivial $\mathbf{u}$, llamada un **vector propio** de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio r. La determinación de los valores propios de $\mathbf{A}$ es equivalente a hallar las raíces de la **ecuación característica**

$$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = 0 .$$

Los vectores propios correspondientes se encuentran resolviendo el sistema $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ y r_i es el valor propio correspondiente al vector propio $\mathbf{u}_i$, entonces

$$\{e^{r_1 t}\mathbf{u}_1, e^{r_2 t}\mathbf{u}_2, \ldots, e^{r_n t}\mathbf{u}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo. Una clase de matrices que siempre tiene n vectores propios linealmente independientes es el conjunto de matrices **simétricas**; es decir, las matrices que satisfacen $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Si $\mathbf{A}$ tiene valores propios complejos conjugados $\alpha \pm i\beta$ y vectores propios asociados $\mathbf{z} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores reales, entonces dos soluciones vectoriales reales linealmente independientes para el sistema homogéneo son

$$e^{\alpha t}\cos \beta t\,\mathbf{a} - e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{b} , \qquad e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t\,\mathbf{a} + e^{\alpha t}\cos \beta t\,\mathbf{b}.$$

Cuando $\mathbf{A}$ tiene un valor propio repetido r de multiplicidad m, entonces es posible que $\mathbf{A}$ no tenga n vectores propios linealmente independientes. Sin embargo, r tiene asociadas m soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo, de la forma

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{rt}\mathbf{k}_{1,1}\ , \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^{rt}\mathbf{k}_{2,1} + te^{rt}\mathbf{k}_{2,2}\ , \ldots ,$$

$$\mathbf{x}_m(t) = e^{rt}\mathbf{k}_{m,1} + te^{rt}\mathbf{k}_{m,2} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{rt}\mathbf{k}_{m,m}\ .$$

Sistemas normales no homogéneos

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

Suponemos que la función matricial $n \times n$ $\mathbf{A}(t)$ y la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ son continuas en un intervalo I.

Solución general de un sistema no homogéneo: $\mathbf{x}_p + \mathbf{Xc}$. Si $\mathbf{x}_p(t)$ es cualquier solución particular del sistema no homogéneo y $\mathbf{X}(t)$ es una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado, entonces una solución general para el sistema no homogéneo es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{X}(t)\mathbf{c} = \mathbf{x}_p(t) + c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)\ ,$$

donde $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son los vectores columna de $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{c} = \text{col}(c_1, \ldots, c_n)$ es un vector constante arbitrario.

Coeficientes indeterminados. Si el término no homogéneo $\mathbf{f}(t)$ es un vector cuyos componentes son funciones polinomiales, exponenciales o senoidales, y $\mathbf{A}$ es una matriz constante, entonces es posible usar una extensión del método de coeficientes indeterminados para decidir la forma de una solución particular para el sistema no homogéneo.

Variación de parámetros: $\mathbf{X}(t)\boldsymbol{v}(t)$. Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental para el sistema homogéneo. Una solución particular del sistema no homogéneo viene dada por la **fórmula de variación de parámetros**

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{v}(t) = \mathbf{X}(t)\int \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt.$$

Función exponencial matricial

Si $\mathbf{A}$ es una matriz constante $n \times n$, entonces la función exponencial matricial

$$e^{\mathbf{A}t} := \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

es una matriz fundamental para el sistema homogéneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. La exponencial matricial tiene varias de las propiedades que satisface la exponencial escalar e^{at}. En particular,

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}\ , \qquad e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}\ , \qquad (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}\ .$$

Si $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ para ciertas r y k, entonces la serie para $e^{\mathbf{A}t}$ sólo tiene un número finito de términos:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{rt}\left\{\mathbf{I} + (\mathbf{A} - r\mathbf{I})t + \cdots + (\mathbf{A} - r\mathbf{I})^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right\}.$$

La función exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$ también se puede calcular a partir de cualquier matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$ por medio de la fórmula

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0).$$

Vectores propios generalizados

Si r es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces un **vector propio generalizado** asociado a r es un vector no nulo $\mathbf{u}$ que satisface $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^k\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para cierto entero positivo k. *Toda* matriz $\mathbf{A}$ tiene un conjunto de n vectores propios generalizados linealmente independientes que pueden usarse para calcular un conjunto fundamental de soluciones. En particular, a cada vector propio generalizado $\mathbf{u}$ y valor propio correspondiente r se le asocia una solución del sistema homogéneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ de la forma

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} = e^{rt}\left\{\mathbf{u} + t(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} + \frac{t^2}{2!}(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^2\mathbf{u} + \cdots\right\}.$$

Si r tiene multiplicidad m, entonces la serie anterior se reduce a los primeros m términos.

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 4, determine una solución general para el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{A}$ está dada.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

En los problemas 5 y 6, determine una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{A}$ está dada.

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

En los problemas 7 a 10, determine una solución general para el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{f}(t)$ están dados.

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{bmatrix}$.

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En los problemas 11 y 12, resuelva el problema con valores iniciales dado.

11. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)\ , \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

12. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

En los problemas 13 y 14, determine una solución general para el sistema de Cauchy-Euler $t\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, *donde* $\mathbf{A}$ *está dada.*

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

En los problemas 15 y 16, encuentre la matriz fundamental $e^{\mathbf{A}t}$ *para el sistema* $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, *donde* $\mathbf{A}$ *está dada.*

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$ **16.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. Explique por qué la teoría de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (descrita en las secciones 4.3 y 6.1) es consecuencia de la teoría de sistemas lineales en forma normal (descrita en la sección 9.4).
2. Analice las similitudes y las diferencias entre el método para determinar soluciones de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (véanse las secciones 4.5, 4.6 y 6.2) y el método para determinar soluciones de un sistema lineal en forma normal con coeficientes constantes (véanse las secciones 9.5 y 9.6).
3. Explique por qué las fórmulas de variación de parámetros para ecuaciones lineales de segundo orden deducidas en la sección 4.9 son consecuencia de las fórmulas obtenidas en la sección 9.7 para sistemas lineales en forma normal.
4. Explique cómo definiría las funciones matriciales sen $\mathbf{A}t$ y cos $\mathbf{A}t$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante $n \times n$. ¿Cuál es la relación de estas funciones con la exponencial matricial y de ellas con las soluciones del sistema $\mathbf{x}'' + \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$? Tal vez consiga algo de información al considerar los casos en que $\mathbf{A}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A. *Sistemas normales desacoplados*

Los sistemas normales más sencillos de resolver tienen la forma

(1) $$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \ ,$$

donde **D** es una matriz diagonal $n \times n$. Tal sistema consta en realidad de n ecuaciones desacopladas

(2) $$x_i'(t) = d_{ii}x_i(t) \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ ,$$

cuya solución es

$$x_i(t) = c_i e^{d_{ii}t} \ ,$$

donde las c_i son constantes arbitrarias. Esto hace surgir la siguiente pregunta: ¿Cuándo podemos *desacoplar* un sistema normal?

Para responder esta pregunta, necesitamos el siguiente resultado de álgebra lineal. Una matriz **A** $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si **A** tiene n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$. Además, si **P** es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, entonces

(3) $$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \ .$$

donde **D** es la matriz diagonal cuya entrada d_{ii} es el valor propio asociado al vector $\mathbf{p}_i$.

(a) Use el resultado anterior para mostrar que el sistema

(4) $$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ ,$$

donde **A** es una matriz diagonalizable $n \times n$, es equivalente a un sistema desacoplado

(5) $$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{D}\mathbf{y}(t) \ ,$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ y $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

(b) Resuelva el sistema (5).

(c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para mostrar que una solución general de (4) está dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{d_{11}t}\mathbf{p}_1 + c_2 e^{d_{22}t}\mathbf{p}_2 + \cdots + c_n e^{d_{nn}t}\mathbf{p}_n \ .$$

(d) Use el procedimiento analizado en las partes (a)-(c) para obtener una solución general del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \ .$$

Especifique **P**, **D**, $\mathbf{P}^{-1}$ y **y**.

B. *Método de la transformada de Laplace matricial*

En el capítulo 7 analizamos el método de la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Para aplicar este procedimiento a

las ecuaciones dadas en forma matricial, primero extendemos la definición del operador de Laplace $\mathscr{L}$ a un vector columna de funciones $\mathbf{x} = \text{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ considerando la transformada de cada componente:

$$\mathscr{L}\{\mathbf{x}\}(s) := \text{col}\big(\mathscr{L}\{x_1\}(s), \ldots, \mathscr{L}\{x_n\}(s)\big) .$$

Con esta notación, el análogo vectorial de la importante propiedad que relaciona la transformada de Laplace con la derivada de una función (véase el teorema 4, capítulo 7, página 361) se convierte en

$$\textbf{(6)} \qquad \mathscr{L}\{\mathbf{x}'\}(s) = s\mathscr{L}\{\mathbf{x}\}(s) - \mathbf{x}(0) .$$

Suponga que tenemos dado el problema con valores iniciales

$$\textbf{(7)} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) , \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 ,$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante $n \times n$. Sean $\hat{\mathbf{x}}(s)$ la transformada de Laplace de $\mathbf{x}(t)$ y $\hat{\mathbf{f}}(s)$ la transformada de $\mathbf{f}(t)$. Entonces, al considerar la transformada del sistema y usar la relación (6), obtenemos

$$\mathscr{L}\{\mathbf{x}'\} = \mathscr{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}\} ,$$
$$s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}} .$$

Luego agrupamos los términos $\hat{\mathbf{x}}$ y despejamos $\hat{\mathbf{x}}$ multiplicando a la izquierda por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}} + \mathbf{x}_0 ,$$
$$\hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\hat{\mathbf{f}} + \mathbf{x}_0) .$$

Por último, obtenemos la solución $\mathbf{x}(t)$ calculando la transformada inversa de Laplace:

$$\textbf{(8)} \qquad \mathbf{x} = \mathscr{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\hat{\mathbf{f}} + \mathbf{x}_0)\} .$$

Al aplicar el método matricial de la transformada de Laplace, es directo (aunque tal vez tedioso) el cálculo de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, aunque el cálculo de la transformada inversa podría requerir algunas de las técnicas especiales (como fracciones parciales) analizadas en el capítulo 7.

(a) En el procedimiento anterior usamos la propiedad de que $\mathscr{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x}\} = \mathbf{A}\mathscr{L}\{\mathbf{x}\}$ para cualquier matriz constante $\mathbf{A}$ $n \times n$. Muestre que esta propiedad es consecuencia de la linealidad de la transformada en el caso escalar.

(b) Use el método matricial de la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas con valores iniciales:

$$\textbf{(i)} \ \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) , \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

$$\textbf{(ii)} \ \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \text{sen}\, t \\ -\cos t \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(c) Compare la fórmula de solución mediante la transformada de Laplace (8) con la fórmula de solución mediante la exponencial matricial dada en la sección 9.8 (relación (13), página 565) para el caso homogéneo $\mathbf{f}(t) \equiv 0$ y $t_0 = 0$ para deducir la fórmula de la transformada de Laplace para la exponencial matricial

$$\textbf{(9)} \qquad e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}(t) .$$

(d) ¿A qué es igual $e^{\mathbf{A}t}$ para las matrices de coeficientes en la parte (b) anterior?

(e) Use (9) para volver a resolver los problemas 1, 2, 7 y 8 de los ejercicios 9.8, página 566.

C. *Sistemas de segundo orden no amortiguados*

Hemos visto que el sistema acoplado masa-resorte de la figura 9.5, página 548, queda descrito por las ecuaciones (9) de la sección 9.6, que reproducimos a continuación:

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) ,$$
$$m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 .$$

Escribimos este sistema en forma normal en la ecuación (10) de la sección 9.6; sin embargo, tiene sus ventajas expresarlo como un sistema de segundo orden de la forma

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}'' = -\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

Esta estructura,

(10) $\mathbf{Mx}'' = -\mathbf{Kx}$,

con una *matriz de masa* **M** diagonal y una *matriz de rigidez* **K** simétrica, es típica de la mayor parte de los sistemas vibrantes sin amortiguamiento. Nuestra experiencia con otros sistemas masa-resorte (sección 5.4) sugiere que busquemos soluciones a (10) de la forma

(11) $\mathbf{x} = \cos \omega t\,\mathbf{v}$ o $\mathbf{x} = \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{v}$,

donde **v** es un vector constante y ω es una constante positiva.

(a) Muestre que el sistema (10) tiene una solución no trivial de la forma (11) si y sólo si ω y **v** satisfacen el "problema de vectores propios generalizados" $\mathbf{Kv} = \omega^2\mathbf{Mv}$.

(b) Utilice la inversa de la matriz de masa para escribir (10) como

$$\mathbf{x}'' = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Kx} =: \mathbf{Bx} .$$

Muestre que si (11) tiene una solución no trivial, entonces $-\omega^2$ debe ser un vector propio de **B**.

(c) Si **B** es una matriz constante $n \times n$, entonces $\mathbf{x}'' = \mathbf{Bx}$ se puede escribir como un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden en forma normal. Así, podemos conformar una solución general con $2n$ soluciones linealmente independientes. Use la observación de la parte (b) para determinar una solución general de los siguientes sistemas de segundo orden:

(i) $\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

(ii) $\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

(iii) $\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

(iv) $\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

D. Comportamiento extraño de especies en competencia. Parte II

En el proyecto G del capítulo 5 usamos la experimentación numérica para estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} p_1' &= p_1(1 - p_1 - ap_2 - bp_3)\ , \\ p_2' &= p_2(1 - bp_1 - p_2 - ap_3)\ , \\ p_3' &= p_3(1 - ap_1 - bp_2 - p_3)\ , \end{aligned}$$

donde a y b son constantes positivas y p_i es la población de la especie S_i, $i = 1, 2, 3$. Encontramos que cuando $a = b = 0.5$, las poblaciones tienden a la solución de equilibrio $p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$ cuando $t \to +\infty$. Sin embargo, cuando $a = 0.5$ y $b = 2$, las poblaciones se acercan cíclicamente por los tres puntos críticos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, acercándose cada vez más a estos puntos. Además, las poblaciones permanecen cerca de cada punto durante periodos de tiempo cada vez más largos antes de pasar al siguiente punto. Para analizar lo que ocurre cerca de estos puntos de equilibrio, estudiaremos los sistemas linealizados correspondientes.

(a) Sea $f_i(p_1, p_2, p_3)$ la función del lado derecho de la ecuación para p_i' en (12); en particular, $f_i(p_1, p_2, p_3) = p_1(1 - p_1 - ap_2 - ap_3)$. $\mathbf{f} = \text{col}(f_1, f_2, f_3)$ es una transformación de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$. Muestre que la matriz jacobiana de esta transformación es

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 - 2p_1 - ap_2 - bp_3 & -ap_1 & -bp_1 \\ -bp_2 & 1 - 2p_2 - ap_3 - bp_1 & -ap_2 \\ -ap_3 & -bp_3 & 1 - 2p_3 - ap_1 - bp_2 \end{bmatrix}.$$

(b) Muestre que en el punto crítico (δ, δ, δ), donde $\delta = (1 + a + b)^{-1}$, tenemos $\mathbf{A} = -\delta\mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Muestre que los valores propios de $\mathbf{B}$ son

$$1 + a + b\ , \qquad \left(1 - \frac{a + b}{2}\right) \pm i\frac{\sqrt{3}(a - b)}{2}\ .$$

(d) Cerca del punto crítico $\mathbf{p}^* = (\delta, \delta, \delta)$, las soluciones de (12) deben comportarse como las soluciones de $\mathbf{p}' = -\delta\mathbf{B}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)$. Use los resultados de la parte (c) para argumentar que cuando $a + b < 2$, las soluciones de (12) deben tender al punto crítico (δ, δ, δ) y cuando $a + b > 2$, deben alejarse de él.

(e) Use un análisis similar para concluir que cuando $a < 1$ o $b < 1$, las soluciones de (12) deben alejarse de los puntos críticos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, pues al menos uno de los valores propios del sistema linealizado (en torno de cada punto crítico) es positivo.

(f) ¿En qué forma el análisis desarrollado en las partes (d) y (e) apoya las conclusiones obtenidas mediante los experimentos numéricos realizados en el proyecto G del capítulo 5?

CAPÍTULO 10

Ecuaciones diferenciales parciales

10.1 INTRODUCCIÓN: UN MODELO PARA EL FLUJO DE CALOR

Desarrolle un modelo para el flujo de calor a través de un alambre delgado, aislado, cuyos extremos se mantienen a la temperatura constante 0°C y cuya distribución inicial de temperatura hay que especificar.

Suponga que el alambre se coloca a lo largo del eje x con $x = 0$ en el extremo izquierdo del alambre y $x = L$ en el extremo derecho (véase la figura 10.1). Si u denota la temperatura del alambre, entonces u depende del tiempo t y de la posición x en el alambre. (Supondremos que el alambre es delgado, de modo que u es constante a través de una sección transversal del alambre correspondiente a un valor fijo de x.)

Para desarrollar un modelo para el flujo de calor a través del delgado alambre, consideremos el pequeño elemento de volumen V de alambre entre los dos planos transversales A y B, perpendiculares al eje x, con el plano A colocado en x y el plano B colocado en $x + \Delta x$ (véase la figura 10.1).

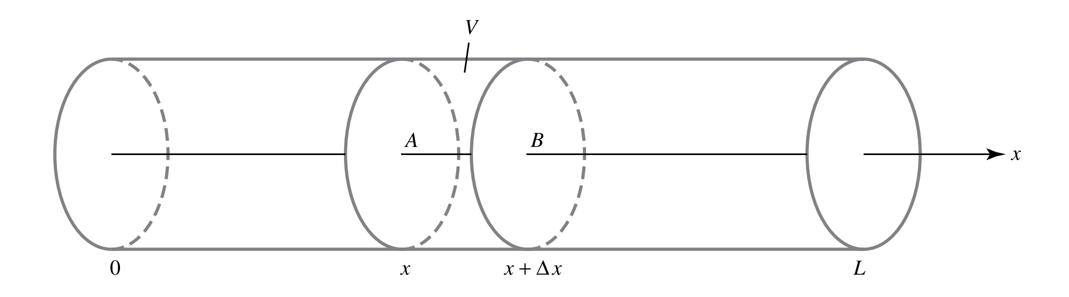


Figura 10.1 Flujo de calor a través de un pedazo delgado de alambre

La temperatura en el plano A en el instante t es $u(x, t)$ y en el plano B es $u(x + \Delta x, t)$. Necesitaremos los siguientes principios de la física que describen el flujo de calor:†

1. **Conducción de calor:** La tasa del flujo de calor (la cantidad de calor por unidad de tiempo que fluye a través de una unidad de área transversal en A) es proporcional a $\partial u/\partial x$, el gradiente de temperatura en A. La constante de proporcionalidad k se llama la **conductividad térmica** del material. En general, la conductividad térmica puede variar de un punto a otro: $k = k(x)$.

2. **Dirección del flujo de calor:** La dirección del flujo de calor siempre va de puntos de temperatura más alta a puntos de temperatura más baja.

3. **Capacidad calórica específica:** La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un objeto de masa m en una cantidad Δu es $cm\,\Delta u$, donde la constante c es la **capacidad calórica específica** del material. La capacidad calórica específica, al igual que la conductividad térmica, puede variar con la posición: $c = c(x)$.

Si H representa la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través de la superficie A durante un intervalo de tiempo Δt, entonces la fórmula para la conducción del calor es

$$H(x) = -k(x)a\,\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) ,$$

donde a es el área de la sección transversal del alambre. El signo negativo es consecuencia del segundo principio: si $\partial u/\partial x$ es positiva, entonces el flujo de calor va de derecha a izquierda (de lo más caliente a lo más frío).

De manera similar, la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano B durante un intervalo de tiempo Δt es

$$H(x + \Delta x) = -k(x + \Delta x)a\,\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) .$$

El cambio neto en el calor ΔE en el volumen V es la cantidad que entra en el extremo A menos la cantidad que sale en el extremo B, más cualquier calor generado por fuentes (como corrientes eléctricas, reacciones químicas, calefactores, etc.). Esto último se modela mediante un término $Q(x, t)\Delta x a \Delta t$, donde Q es la densidad de la tasa de energía (potencia). Por consiguiente,

(1)
$$\begin{aligned}\Delta E &= H(x) - H(x + \Delta x) + Q(x, t)\Delta x\, a\,\Delta t \\ &= a\,\Delta t\left[k(x + \Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right] + Q(x, t)\Delta x\, a\,\Delta t .\end{aligned}$$

Por el tercer principio, el cambio neto está dado por $\Delta E = cm\,\Delta u$, donde Δu es el cambio en temperatura y c es la capacidad calórica específica. Si suponemos que el cambio en la temperatura en el volumen V es esencialmente igual al cambio de temperatura en x, es decir,

†Para un análisis de la transferencia de calor, véase *University Physics*, 9a. edición, por H. D. Young y R. A. Freedman (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1996).

$\Delta u = u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$, y que la masa del volumen V de alambre es $a\rho\,\Delta x$, donde $\rho = \rho(x)$ es la densidad del alambre, entonces

(2) $$\Delta E = c(x)a\rho(x)\Delta x\left[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\right] .$$

Al igualar las dos expresiones para ΔE dadas en las ecuaciones (1) y (2) llegamos a

$$a\,\Delta t\left[k(x + \Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right] + Q(x, t)\,\Delta x\,a\,\Delta t$$
$$= c(x)a\rho(x)\Delta x\left[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\right] .$$

Al dividir ambos lados entre $a\,\Delta x\,\Delta t$ y calcular los límites cuando Δx y Δt tienden a cero, obtenemos

(3) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right] + Q(x, t) = c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) .$$

Si los parámetros físicos k, c y ρ son uniformes a lo largo de la longitud del alambre, entonces (3) se reduce a la **ecuación del flujo de calor en dimensión uno**

(4) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + P(x, t) .$$

donde la constante positiva $\beta := k/c\rho$ es la **difusividad** del material y $P(x, t) := Q(x, t)/c\rho$.

La ecuación (4) controla el flujo de calor en el alambre. Tenemos otras dos restricciones en nuestro problema original. Primero, mantenemos los extremos del alambre a 0°C. Así, pedimos que

(5) $$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

para toda t. Éstas se llaman **condiciones en la frontera**. En segundo lugar, debemos conocer la distribución inicial de temperatura $f(x)$. Es decir, necesitamos

(6) $$u(x, 0) = f(x) , \qquad 0 < x < L .$$

La ecuación (6) se conoce como la **condición inicial** sobre u.

Al combinar las ecuaciones (4), (5) y (6), tenemos el siguiente modelo matemático para el flujo de calor en un alambre uniforme sin fuentes internas $(P = 0)$ cuyos extremos se mantienen a la temperatura constante 0°C:

(7) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) , \qquad 0 < x < L , \qquad t > 0 ,$$

(8) $$u(0, t) = u(L, t) = 0 , \qquad t > 0 ,$$

(9) $$u(x, 0) = f(x) , \qquad 0 < x < L .$$

Este modelo es un ejemplo de **problema con valores iniciales y en la frontera**. Intuitivamente, esperamos que las ecuaciones (7)-(9) describan por completo y sin ambigüedad la temperatura en el alambre. Una vez que hayamos determinado una función $u(x, t)$ que cumpla con estas tres condiciones, podemos garantizar que u es la temperatura. (El teorema 7 de la sección 10.5 aclarará esta cuestión.)

En dimensiones superiores, la ecuación para el flujo de calor (o simplemente la **ecuación del calor**) tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \Delta u + P(x, y, z, t)$$

donde Δu, en este contexto, es el **laplaciano** de u.[†] En dos y tres dimensiones, el laplaciano se define respectivamente como

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

Cuando la temperatura alcanza un estado estacionario, es decir, cuando u no depende del tiempo, y no hay fuentes de calor, entonces $\partial u/\partial t = 0$ y la temperatura satisface la **ecuación de Laplace**

$$\Delta u = 0 .$$

Una técnica clásica para resolver el problema con valores iniciales y en la frontera para la ecuación del calor (7)-(9) es el método de *separación de variables*, que nos permite reemplazar las derivadas parciales por derivadas ordinarias. Esta técnica se analiza en la siguiente sección. Al usar separación de variables, con frecuencia se nos pide expresar una función dada como una serie trigonométrica. Tales series se llaman *series de Fourier*, cuyas propiedades analizaremos en las secciones 10.3 y 10.4. Dedicaremos las tres secciones restantes a las tres ecuaciones diferenciales parciales básicas que surgen con más frecuencia en las aplicaciones: la ecuación del calor, la ecuación de onda y la ecuación de Laplace.

Se han desarrollado muchos algoritmos de computadora para resolver ecuaciones diferenciales parciales, basados en diferencias finitas, elementos finitos, principios variacionales y métodos de proyección que incluyen el método de momentos y, de manera más reciente, sus implantaciones basadas en ondeletas. Como los métodos de Runge-Kutta y de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias, tales técnicas se pueden aplicar más ampliamente que los procedimientos analíticos de separación de variables, pero con frecuencia es difícil evaluar su precisión. De hecho, en la práctica se acostumbra evaluar cualquier nuevo procedimiento numérico propuesto comparando sus predicciones con las de separación de variables.

10.2 MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

El método de separación de variables es una técnica clásica eficaz para resolver varios tipos de ecuaciones diferenciales parciales. La idea a grandes rasgos es la siguiente. Pensamos una solución $u(x, t)$ de una ecuación diferencial parcial como una combinación lineal infinita de funciones componente sencillas $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, que satisfacen la ecuación y ciertas condiciones en la frontera. (Ésta es una hipótesis razonable si la ecuación diferencial parcial y las condiciones en la frontera son lineales y homogéneas.) Para determinar una solución componente $u_n(x, t)$, suponemos que la podemos escribir con sus variables separadas; es decir, como

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) .$$

[†] Por desgracia, es la misma notación que usamos para $u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$.

Al sustituir esta forma de solución en la ecuación diferencial parcial y usar las condiciones en la frontera obtenemos, en muchos casos, dos ecuaciones diferenciales *ordinarias* en términos de las funciones incógnitas $X_n(x)$ y $T_n(t)$. De esta forma, hemos reducido el problema de resolver una ecuación diferencial parcial al problema más familiar de resolver una ecuación diferencial que sólo implica una variable. En esta sección ilustraremos esta técnica para la ecuación del calor y la ecuación de onda.

En la sección anterior dedujimos el siguiente problema con valores iniciales y en la frontera como un modelo matemático para el flujo de calor sin fuentes en un alambre uniforme cuyos extremos se mantienen a la temperatura constante cero:

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ , \qquad 0 < x < L\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(2)} \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(3)} \qquad u(x,0) = f(x)\ , \qquad 0 < x < L\ .$$

Para resolver este problema mediante el método de separación de variables, comenzamos con la ecuación (1). Proponemos que sus soluciones tienen la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)\ ,$$

donde X sólo depende de x y T sólo depende de t. Para determinar X y T, calculamos las derivadas parciales de u para obtener

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)\ .$$

Al sustituir estas expresiones en (1) llegamos a

$$X(x)T'(t) = \beta X''(x)T(t)\ ,$$

y al separar variables tenemos

$$\textbf{(4)} \qquad \frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\ .$$

Ahora observamos que las funciones del lado izquierdo de (4) sólo dependen de t, mientras que todas las del lado derecho dependen sólo de x. Como x y t son variables independientes entre sí, los dos cocientes en (4) deben ser *constantes*. Así,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K \quad \text{y} \quad \frac{T'(t)}{\beta T(t)} = K\ ,$$

o

$$\textbf{(5)} \qquad X''(x) - KX(x) = 0 \quad \text{y} \quad T'(t) - \beta KT(t) = 0\ .$$

En consecuencia, para soluciones separables, hemos reducido el problema de resolver la ecuación diferencial parcial (1) al de resolver las dos ecuaciones diferenciales *ordinarias* en (5).

A continuación nos fijamos en las condiciones en la frontera en (2). Como $u(x, t) = X(x)T(t)$, estas condiciones son

$$X(0)T(t) = 0 \quad \text{y} \quad X(L)T(t) = 0\ , \qquad t > 0\ .$$

Por lo tanto, $T(t) = 0$ para toda $t > 0$, lo que implica que $u(x, t) \equiv 0$, o

$$\textbf{(6)} \qquad X(0) = X(L) = 0 \ .$$

Si ignoramos la solución trivial $u(x, t) \equiv 0$, combinamos las condiciones en la frontera (6) con la ecuación diferencial para X en (5) y obtenemos el *problema con valores en la frontera*

$$\textbf{(7)} \qquad X''(x) - KX(x) = 0 \ , \qquad X(0) = X(L) = 0 \ ,$$

donde K puede ser cualquier constante.

Observe que la función $X(x) \equiv 0$ es una solución de (7) para cada K. Según la elección de K, ésta puede ser la *única* solución del problema con valores en la frontera (7). Así, si buscamos una solución no trivial $u(x, t) = X(x)T(t)$ de (1)-(2), primero debemos determinar aquellos valores de K para los que el problema con valores en la frontera (7) tiene soluciones no triviales. Estos valores particulares de K son llamados **valores propios**, y las soluciones no triviales correspondientes de (7) son las **funciones propias**. Esta nomenclatura surge de la similitud de la forma de operador de la ecuación diferencial $(D^2 - K)[X] = 0$ con la ecuación matricial de los vectores propios, $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (sección 9.5, página 533).

Para resolver la ecuación (con coeficientes constantes) (7), utilizamos $X(x) = e^{rx}$, deducimos la ecuación auxiliar $r^2 - K = 0$ y consideramos tres casos.

Caso 1. $K > 0$. En este caso, las raíces de la ecuación auxiliar son $\pm\sqrt{K}$, de modo que una solución general de la ecuación diferencial en (7) es

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x} \ .$$

Para determinar C_1 y C_2, apelamos a las condiciones en la frontera:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \ ,$$
$$X(L) = C_1 e^{\sqrt{K}L} + C_2 e^{-\sqrt{K}L} = 0 \ .$$

De la primera ecuación vemos que $C_2 = -C_1$. Podemos escribir entonces la segunda ecuación como $C_1(e^{\sqrt{K}L} - e^{-\sqrt{K}L}) = 0$ o $C_1(e^{2\sqrt{K}L} - 1) = 0$. Como $K > 0$, esto implica que $(e^{2\sqrt{K}L} - 1) > 0$. Por lo tanto, C_1, y en consecuencia C_2, es igual a cero. En consecuencia, *no hay* soluciones no triviales de (7) para $K > 0$.

Caso 2. $K = 0$. En este caso, $r = 0$ es una raíz repetida de la ecuación auxiliar y una solución general de la ecuación diferencial es

$$X(x) = C_1 + C_2 x \ .$$

Las condiciones en la frontera en (7) implican que $C_1 = 0$ y $C_1 + C_2 L = 0$, lo que implica que $C_1 = C_2 = 0$. Así, para $K = 0$, *no* hay soluciones no triviales de (7).

Caso 3. $K < 0$. En este caso, las raíces de la ecuación auxiliar son $\pm i\sqrt{-K}$. (Observe que $-K > 0$, pues $K < 0$.) Así, una solución general de $X'' - KX = 0$ es

$$\textbf{(8)} \qquad X(x) = C_1 \cos \sqrt{-K}x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-K}x \ .$$

Esta vez, las condiciones en la frontera $X(0) = X(L) = 0$ dan por resultado el sistema

$$C_1 = 0 \ ,$$
$$C_1 \cos \sqrt{-K}L + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-K}L = 0 \ .$$

Como $C_1 = 0$, el sistema se reduce a resolver C_2 sen $\sqrt{-K}L = 0$. Por tanto, sen $\sqrt{-K}L = 0$ o $C_2 = 0$. En el primer caso, sen $\sqrt{-K}L = 0$ sólo cuando $\sqrt{-K}L = n\pi$, donde n es un entero. Por lo tanto, (7) tiene una solución no trivial $(C_2 \neq 0)$ cuando $\sqrt{-K}L = n\pi$ o $K = -(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (excluimos $n = 0$, pues esto hace que $K = 0$). Además, las soluciones no triviales (funciones propias) X_n correspondientes al valor propio $K = -(n\pi/L)^2$ están dadas por (véase (8))

$$\textbf{(9)} \qquad X_n(x) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ,$$

donde las a_n son constantes arbitrarias no nulas.

Una vez que sabemos que $K = -(n\pi/L)^2$ para cualquier entero positivo n, consideremos la segunda ecuación en (5):

$$T'(t) + \beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0 .$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, una solución general de esta ecuación lineal de primer orden es

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} .$$

Al combinar esto con la ecuación (9) obtenemos, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, las funciones

$$\textbf{(10)} \qquad \begin{aligned} u_n(x, t) &:= X_n(x)T_n(t) = a_n \operatorname{sen}(n\pi x/L) b_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \\ &= c_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x/L) , \end{aligned}$$

donde c_n es una constante arbitraria.

Quisiéramos concluir que cada $u_n(x, t)$ es una solución de (1)-(2). Pero *sólo* hemos mostrado que *si* (1)-(2) tiene una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, entonces u debe ser una de las funciones dadas en (10). Dejaremos que el lector verifique, mediante una sustitución directa, que las funciones en (10) son en realidad soluciones de (1)-(2): satisfacen la ecuación diferencial y las condiciones en la frontera (pero no la condición inicial).

Un cálculo sencillo muestra además que si u_n y u_m son soluciones de (1)-(2), entonces también lo es cualquier combinación lineal $au_n + bu_m$. (Esto es consecuencia de que el operador $\mathcal{L} := \partial/\partial t - \beta\partial^2/\partial x^2$ es *lineal* y las condiciones en la frontera (2) son *homogéneas*.) Además, si consideramos una suma *infinita* de estas funciones, es decir,

$$\textbf{(11)} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x/L) ,$$

entonces esta serie formal será de nuevo una solución de (1)-(2), siempre que la serie infinita tenga el comportamiento adecuado de convergencia.

Ahora trataremos de satisfacer la condición inicial (3). Para que una solución u de la forma (11) satisfaga (3), debemos tener

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) , \qquad 0 < x < L .$$

Así, hemos reducido el problema (1)-(3) de flujo de calor en un alambre delgado al problema de determinar un desarrollo de $f(x)$ de la forma

$$\textbf{(12)} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) .$$

Tal desarrollo es una **serie de senos de Fourier** y la analizaremos en las dos secciones siguientes. Si podemos elegir las c_n de modo que se cumpla la ecuación (12), entonces el desarrollo para $u(x, t)$ en (11) es una **solución formal** del problema de flujo de calor (1)-(3). Si este desarrollo converge a una función con segundas derivadas parciales continuas, entonces la solución formal es una solución genuina. Además, la solución es única.

EJEMPLO 1 Determinar la solución del problema de flujo de calor

$$\textbf{(13)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \qquad 0 < x < \pi , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(14)} \qquad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(15)} \qquad u(x, 0) = 3 \operatorname{sen} 2x - 6 \operatorname{sen} 5x , \qquad 0 < x < \pi .$$

SOLUCIÓN Al comparar la ecuación (13) con (1), vemos que $\beta = 7$ y $L = \pi$. Por lo tanto, sólo debemos determinar los valores de c_n en la fórmula (12). Es decir, debemos tener

$$u(x, 0) = 3 \operatorname{sen} 2x - 6 \operatorname{sen} 5x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx .$$

Con estos datos es fácil determinar c_n. Al igualar los coeficientes de los términos semejantes, vemos que

$$c_2 = 3 \quad \text{y} \quad c_5 = -6 ,$$

y los restantes c_n se anulan. Por lo tanto, de (11), la solución del problema de flujo de calor (13)-(15) es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= c_2 e^{-\beta(2\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(2\pi x/L) + c_5 e^{-\beta(5\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(5\pi x/L) \\ &= 3e^{-28t} \operatorname{sen} 2x - 6e^{-175t} \operatorname{sen} 5x . \ \blacksquare \end{aligned}$$

Otra situación donde podemos aplicar el método de separación de variables ocurre en el estudio de una cuerda vibrante. Esto se refiere a las vibraciones transversales de una cuerda estirada entre dos puntos, como una cuerda de guitarra o de piano. El objetivo es determinar una función $u(x, t)$ que proporcione el desplazamiento (deflexión) de una cuerda en cualquier punto x $(0 \le x \le L)$ y cualquier instante $t \ge 0$ (véase la figura 10.2). Al desarrollar el modelo matemático, suponemos que la cuerda es perfectamente flexible y que tiene densidad lineal constante, que la tensión de la cuerda es constante, que la gravedad es despreciable y

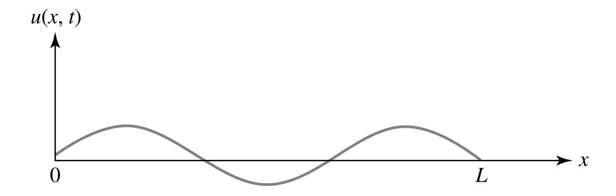


Figura 10.2 Desplazamiento de la cuerda en el instante t

que ninguna otra fuerza actúa sobre la cuerda. Bajo estas condiciones, y con la hipótesis adicional de que los desplazamientos $u(x, t)$ son pequeños con respecto de la longitud de la cuerda, se puede ver que el movimiento de la cuerda queda descrito mediante el siguiente problema con valores iniciales y en la frontera.†

(16) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

(17) $$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

(18) $$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L,$$

(19) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq L.$$

La constante α^2 que aparece en (16) es estrictamente positiva y es igual al cociente de la tensión entre la densidad (lineal) de la cuerda. El significado físico de α, que tiene unidades de velocidad, será revelado en la sección 10.6. Las condiciones en la frontera en (17) reflejan el hecho de que la cuerda se mantiene fija en los dos puntos extremos $x = 0$ y $x = L$. Las ecuaciones (18) y (19), respectivamente, especifican el desplazamiento inicial de la cuerda y la velocidad inicial de cada punto sobre la cuerda. Para que las condiciones iniciales y en la frontera sean consistentes, suponemos que $f(0) = f(L) = 0$ y que $g(0) = g(L) = 0$.

Apliquemos el método de separación de variables al problema con valores iniciales y en la frontera para la cuerda vibrante (16)-(19). Así, comenzamos suponiendo que la ecuación (16) tiene una solución de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

donde X sólo depende de x y T sólo depende de t. Derivamos u para obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Al sustituir estas expresiones en (16), tenemos

$$X(x)T''(t) = \alpha^2 X''(x)T(t),$$

y separamos variables para obtener

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Como antes, estos cocientes deben ser iguales a cierta constante K:

(20) $$\frac{X''(x)}{X(x)} = K \quad \text{y} \quad \frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = K.$$

---

†Para una deducción de este modelo matemático, véase *Partial Differential Equation: Sources and Solutions*, por Arthur D. Snider (Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, 1999).

Además, con $u(x, t) = X(x)T(t)$, las condiciones en la frontera (17) implican

$$X(0)T(t) = 0 \ , \qquad X(L)T(t) = 0 \ , \qquad t \geq 0 \ .$$

Para que estas ecuaciones se cumplan para toda $t \geq 0$, $T(t) \equiv 0$, lo que implica que $u(x, t) \equiv 0$, o bien

$$X(0) = X(L) = 0 \ .$$

Si ignoramos la solución trivial, combinamos estas condiciones en la frontera con la ecuación diferencial para X en (20) y obtenemos el problema con valores iniciales

(21) $$X''(x) - KX(x) = 0 \ , \qquad X(0) = X(L) = 0 \ ,$$

donde K puede ser cualquier constante.

Éste es el mismo problema con valores iniciales que encontramos al resolver la ecuación del calor. Ahí vimos que los valores propios son

$$K = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ ,$$

con las funciones propias correspondientes (soluciones no triviales)

(22) $$X_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ ,$$

donde las c_n son constantes arbitrarias no nulas.

Una vez que hemos determinado que $K = -(n\pi/L)^2$ para algún entero positivo n, consideremos la segunda ecuación en (20) para tales K:

$$T''(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0 \ .$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, una solución general es

$$T_n(t) = c_{n,1} \cos \frac{n\pi\alpha}{L} t + c_{n,2} \operatorname{sen} \frac{n\pi\alpha}{L} t \ .$$

Al combinar esto con la ecuación (22), obtenemos, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, la función

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\right)\left(c_{n,1} \cos \frac{n\pi\alpha}{L} t + c_{n,2} \operatorname{sen} \frac{n\pi\alpha}{L} t\right) \ ,$$

o bien, ordenando las constantes,

(23) $$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi\alpha}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\alpha}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \ .$$

Usamos el hecho de que las combinaciones lineales de las soluciones de (16)-(17) vuelven a ser soluciones, para considerar la suma infinita (superposición) de las funciones en (23):

(24) $$\boldsymbol{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi\alpha}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\alpha}{L} t\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}} \ .$$

Para una solución de la forma (24), al sustituir en las condiciones iniciales (18)-(19) tenemos

$$\textbf{(25)} \qquad u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = f(x)\ , \qquad 0 \le x \le L\ ,$$

$$\textbf{(26)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\alpha}{L} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = g(x)\ , \qquad 0 \le x \le L\ .$$

Así, hemos reducido el problema de la cuerda vibrante (16)-(19) al problema de determinar los desarrollos en serie de senos de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$:

$$\textbf{(27)} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\ , \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\ ,$$

donde $B_n = (n\pi\alpha/L)b_n$. Si elegimos a_n y b_n de modo que se cumplan las ecuaciones en (25) y (26), entonces el desarrollo para $u(x, t)$ en (24) es una **solución formal** del problema de la cuerda vibrante (16)-(19). Si este desarrollo converge a una función con segundas derivadas parciales continuas, entonces la solución formal es una solución genuina.

EJEMPLO 2 Determinar la solución al problema de la cuerda vibrante

$$\textbf{(28)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad 0 < x < \pi\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(29)} \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ , \qquad t \ge 0\ ,$$

$$\textbf{(30)} \qquad u(x,0) = \operatorname{sen} 3x - 4 \operatorname{sen} 10x\ , \qquad 0 \le x \le \pi\ ,$$

$$\textbf{(31)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2 \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x\ , \qquad 0 \le x \le \pi\ .$$

SOLUCIÓN Al comparar la ecuación (28) con la ecuación (16), vemos que $\alpha = 2$ y $L = \pi$. Por lo tanto, sólo debemos determinar los valores de los coeficientes a_n y b_n en la fórmula (24). Elegimos a_n de modo que se cumpla la ecuación (25); es decir,

$$u(x,0) = \operatorname{sen} 3x - 4 \operatorname{sen} 10x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx\ .$$

Al igualar los coeficientes de términos semejantes, vemos que

$$a_3 = 1, \qquad a_{10} = -4\ ,$$

y las demás a_n se anulan. De manera similar, en relación con la ecuación (26), debemos elegir las b_n de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2 \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x = \sum_{n=1}^{\infty} n2b_n \operatorname{sen} nx\ .$$

Al comparar los coeficientes, vemos que

$$2 = (4)(2)b_4 \quad \text{o} \quad b_4 = \frac{1}{4}\ ,$$

$$1 = (6)(2)b_6 \quad \text{o} \quad b_6 = \frac{1}{12}\ ,$$

y las demás b_n se anulan. Por lo tanto, de la fórmula (24), la solución del problema de la cuerda vibrante (28)-(31) es

$$\textbf{(32)} \qquad u(x, t) = \cos 6t \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 8t \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{12} \operatorname{sen} 12t \operatorname{sen} 6x - 4 \cos 20t \operatorname{sen} 10x \ . \quad \blacksquare$$

En secciones posteriores usaremos el método de separación de variables para estudiar una amplia gama de problemas para la ecuación del calor, la ecuación de onda y la ecuación de Laplace. Sin embargo, para usar el método con eficacia, debemos poder calcular series trigonométricas (o, más en general, desarrollos en términos de funciones propias), como la serie de senos de Fourier que encontramos en esta sección. Estos desarrollos se analizan en las dos secciones siguientes.

EJERCICIOS 10.2

En los problemas 1 a 8, determine todas las soluciones, si existen del problema con valores iniciales dado, hallando primero una solución general de la ecuación diferencial.

1. $y'' - y = 0 \ ; \quad 0 < x < 1 \ ,$
$y(0) = 0 \ , \quad y(1) = -4 \ .$

2. $y'' - 6y' + 5y = 0 \ ; \quad 0 < x < 2 \ ,$
$y(0) = 1 \ , \quad y(2) = 1 \ .$

3. $y'' + 4y = 0 \ ; \quad 0 < x < \pi \ ,$
$y(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = 0 \ .$

4. $y'' + 9y = 0 \ ; \quad 0 < x < \pi \ ,$
$y(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = -6 \ .$

5. $y'' - y = 1 - 2x \ ; \quad 0 < x < 1 \ ,$
$y(0) = 0 \ , \quad y(1) = 1 + e \ .$

6. $y'' + y = 0 \ ; \quad 0 < x < 2\pi \ ,$
$y(0) = 0 \ , \quad y(2\pi) = 1 \ .$

7. $y'' + y = 0 \ ; \quad 0 < x < 2\pi \ ,$
$y(0) = 1 \ , \quad y(2\pi) = 1 \ .$

8. $y'' - 2y' + y = 0 \ ; \quad -1 < x < 1 \ ,$
$y(-1) = 0 \ , \quad y(1) = 2 \ .$

En los problemas 9 a 14, determine los valores de l *(valores propios) para los que el problema dado tiene una solución no trivial. Determine además las soluciones no triviales correspondientes (funciones propias).*

9. $y'' + \lambda y = 0 \ ; \quad 0 < x < \pi \ ,$
$y(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = 0 \ .$

10. $y'' + \lambda y = 0 \ ; \quad 0 < x < \pi \ ,$
$y'(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0 \ .$

11. $y'' + \lambda y = 0 \ ; \quad 0 < x < 2\pi \ ,$
$y(0) = y(2\pi) \ , \quad y'(0) = y'(2\pi) \ .$

12. $y'' + \lambda y = 0 \ ; \quad 0 < x < \pi/2 \ ,$
$y'(0) = 0 \ , \quad y'(\pi/2) = 0 \ .$

13. $y'' + \lambda y = 0 \ ; \quad 0 < x < \pi \ ,$
$y(0) - y'(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0 \ .$

14. $y'' - 2y' + \lambda y = 0 \ ; \quad 0 < x < \pi \ ,$
$y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0 \ .$

En los problemas 15 a 18, resuelva el problema de flujo de calor (1)-(3) con $\beta = 3$, $L = \pi$ y la función dada $f(x)$.

15. $f(x) = \operatorname{sen} x - 6 \operatorname{sen} 4x \ .$

16. $f(x) = \operatorname{sen} 3x + 5 \operatorname{sen} 7x - 2 \operatorname{sen} 13x \ .$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x - 7 \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x \ .$

18. $f(x) = \operatorname{sen} 4x + 3 \operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 10x \ .$

En los problemas 19 a 22, resuelva el problema de la cuerda vibrante (16)-(19) con $\alpha = 3$, $L = \pi$ y las funciones dadas $f(x)$ y $g(x)$.

19. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x + 12 \operatorname{sen} 13x \ , \quad g(x) \equiv 0 \ .$

20. $f(x) \equiv 0 \ ,$
$g(x) = -2 \operatorname{sen} 3x + 9 \operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 10x \ .$

21. $f(x) = 6 \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} 6x \ ,$
$g(x) = 11 \operatorname{sen} 9x - 14 \operatorname{sen} 15x \ .$

22. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$,
$g(x) = 6 \operatorname{sen} 3x - 7 \operatorname{sen} 5x$.

23. Determine la solución formal del problema de flujo de calor (1)-(3) con $\beta = 2$ y $L = 1$ si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} n\pi x \ .$$

24. Determine la solución formal del problema de la cuerda vibrante (16)-(19) con $\alpha = 4$, $L = \pi$ y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \ ,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \ .$$

25. Considere el comportamiento de las soluciones de la ecuación

$$T'(t) - \beta K T(t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

para dar un argumento con bases físicas para desechar el caso en que $K > 0$ en la ecuación (5).

26. Verifique que $u_n(x, t)$ dada en la ecuación (10) satisface la ecuación (1) y las condiciones en la frontera (2) sustituyendo $u_n(x, t)$ directamente en la ecuación en cuestión.

En los problemas 27 a 30 se da una ecuación diferencial parcial junto con la forma de una solución que tiene variables separadas. Muestre que tal solución debe satisfacer el conjunto indicado de ecuaciones diferenciales ordinarias.

27. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

si $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ tenemos

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \ ,$$
$$T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0 \ ,$$

donde λ es una constante.

28. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + u = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

si $u(r, t) = X(x)T(t)$ tenemos

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \ ,$$
$$T''(t) + T'(t) + (1 - \lambda\alpha^2)T(t) = 0 \ ,$$

donde λ es una constante.

29. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \beta \left\{ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\}$

si $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ tenemos

$$T'(t) - \beta K T(t) = 0 \ ,$$
$$X''(x) - JX(x) = 0 \ ,$$
$$Y''(y) + (J - K)Y(y) = 0 \ ,$$

donde J, K son constantes.

30. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

si $u(r, \theta, z) = R(r)T(\theta)Z(z)$ tenemos

$$T''(\theta) + \mu T(\theta) = 0 \ ,$$
$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 \ ,$$
$$r^2 R''(r) + rR'(r) - (r^2\lambda + \mu)R(r) = 0 \ ,$$

donde μ, λ son constantes.

31. Para la ecuación diferencial parcial del problema 27, suponga que se imponen las siguientes condiciones en la frontera:

$$u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \ ,$$
$u(r, \theta)$ permanece acotada cuando $r \to 0^+$.

Muestre que una solución no trivial de la forma $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ debe satisfacer las condiciones en la frontera

$$T(0) = T(\pi) = 0 \ ,$$
$R(r)$ permanece acotada cuando $r \to 0^+$.

32. Para la ecuación diferencial parcial del problema 29, suponga que se imponen las siguientes condiciones en la frontera:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 \ , \quad 0 \le y \le b \ , \quad t \ge 0 \ ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b, t) = 0 \ , \quad 0 \le x \le a \ , \quad t \ge 0 \ .$$

Muestre que una solución no trivial de la forma $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ debe satisfacer las condiciones en la frontera

$$X(0) = X(a) = 0 \ ,$$
$$Y'(0) = Y'(b) = 0 \ .$$

33. Cuando la temperatura de un alambre alcanza un estado estacionario, es decir, cuando u sólo depende de x, entonces $u(x)$ satisface la ecuación de Laplace $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$.

(a) Determine la solución de estado estacionario cuando los extremos del alambre se mantienen a una temperatura constante de 50°C; es decir, cuando $u(0) = u(L) = 50$.

(b) Determine la solución de estado estacionario cuando un extremo del alambre se mantiene a 10°C, mientras que el otro se mantiene a 40°C; es decir, cuando $u(0) = 10$ y $u(L) = 40$.

10.3 SERIES DE FOURIER

Al analizar el flujo de calor y las cuerdas vibrantes en la sección anterior, nos topamos con el problema de expresar una función en una serie trigonométrica (véanse las ecuaciones (12) y (25) de la sección 10.2). En las dos secciones siguientes analizaremos la teoría de series de Fourier, que trabajan con desarrollos en series trigonométricas. Sin embargo, primero revisaremos algunas propiedades de funciones, particularmente importantes para este estudio: la continuidad por partes, la periodicidad y la simetría par e impar.

En la sección 7.2 definimos una función **continua por partes** en $[a, b]$ como una función f que es continua en cada punto en $[a, b]$, excepto posiblemente para un número finito de puntos donde f tiene una *discontinuidad de salto*. Tales funciones son integrables en cualquier intervalo finito donde sean continuas por partes.

Recuerde también que una función es **periódica con periodo** T si $f(x + T) = f(x)$ para toda x en el dominio de f. El menor valor positivo de T se llama el **periodo fundamental**. Las funciones trigonométricas sen x y cos x son ejemplos de funciones periódicas, con periodo fundamental 2π y tan x es periódica con periodo fundamental π. Una función constante es una función periódica con periodo arbitrario T.

Hay dos propiedades de simetría de funciones que serán útiles en el estudio de las series de Fourier. Una función f que satisface $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f tiene una gráfica que es simétrica con respecto del eje y (véase la figura 10.3(a)). Decimos que tal función es **par**. Una función f que satisface $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f tiene una gráfica que es simétrica con respecto del origen (véase la figura 10.3(b)). Se dice que es una función **impar**. Las funciones $1, x^2, x^4, \ldots$ son ejemplos de funciones pares, mientras que las funciones $x, x^3, x^5, \ldots$ son ejemplos de funciones impares. Las funciones trigonométricas sen x y tan x son funciones impares y cos x es una función par.

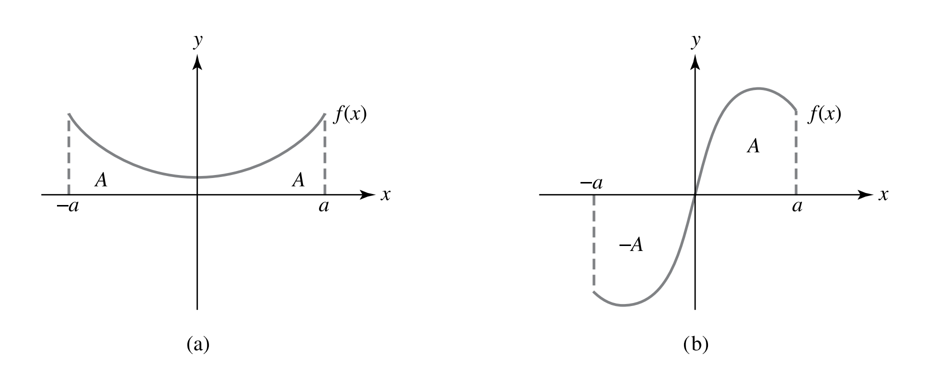


Figura 10.3 (a) Función par $\int_{-a}^{a} f = A + A = 2\int_{0}^{a} f$ (b) Función impar $\int_{-a}^{a} f = A - A = 0$

EJEMPLO 1 Determinar si la función dada es par, impar, o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. **(b)** $g(x) = x^{1/3} - \operatorname{sen} x$. **(c)** $h(x) = e^x$.

SOLUCIÓN

(a) Como $f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x)$, entonces $f(x)$ es una función par.

(b) Como $g(-x) = (-x)^{1/3} - \text{sen}\,(-x) = -x^{1/3} + \text{sen}\,x = -(x^{1/3} - \text{sen}\,x) = -g(x)$, tenemos que $g(x)$ es una función impar.

(c) En este caso, $h(-x) = e^{-x}$. Como $e^{-x} = e^x$ sólo cuando $x = 0$ y e^{-x} nunca es igual a $-e^x$, entonces $h(x)$ no es una función par ni impar. ■

El hecho de saber que una función es par o impar puede ser de utilidad al evaluar integrales definidas.

PROPIEDADES DE FUNCIONES SIMÉTRICAS

Teorema 1. Si f es una función par continua por partes en $[-a, a]$, entonces

(1) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \; .$$

Si f es una función impar continua por partes en $[-a, a]$, entonces

(2) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \; .$$

Demostración. Si f es una función par, entonces $f(-x) = f(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \; ,\end{aligned}$$

donde usamos el cambio de variable $u = -x$. Esto se ilustra en la figura 10.3(a). La fórmula (2) se puede demostrar con un argumento similar y se ilustra en la figura 10.3(b). ■

El siguiente ejemplo trata de ciertas integrales cruciales en las series de Fourier.

EJEMPLO 2 Evaluar las siguientes integrales cuando m y n son enteros positivos:

(a) $$\int_{-T}^{T} \text{sen}\frac{m\pi x}{T}\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx \; .$$ **(b)** $$\int_{-T}^{T} \text{sen}\frac{m\pi x}{T}\,\text{sen}\frac{n\pi x}{T}\,dx \; .$$

(c) $$\int_{-T}^{T} \cos\frac{m\pi x}{T}\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx \; .$$

SOLUCIÓN **(a)** Como $\operatorname{sen}\frac{m\pi(-x)}{T}\cos\frac{n\pi(-x)}{T} = -\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{T}\cos\frac{n\pi x}{T}$, el integrando de la parte (a) es una función impar. Así, por el teorema 1,

(3)
$$\int_{-T}^{T} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{T}\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx = 0 \ .$$

(b) Usamos el hecho de que el integrando es par (¡verifíquelo!) y la identidad trigonométrica

$$2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \cos(A - B) - \cos(A + B) \ ,$$

vemos que para $m \neq n$,

$$\int_{-T}^{T} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{T}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}\,dx = 2\int_{0}^{T} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{T}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}\,dx$$
$$= \int_{0}^{T}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{T} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{T}\right\}dx$$
$$= \frac{T}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{T}}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{T}}{m+n}\right]\Bigg|_{0}^{T} = 0 \ .$$

Cuando $m = n$, la integral en (b) se escribe

$$\int_{-T}^{T}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}\right)^2 dx = 2\int_{0}^{T}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}\right)^2 dx = \int_{0}^{T}\left\{1 - \cos\frac{2n\pi x}{T}\right\}dx$$
$$= \left[x - \frac{T}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{T}\right]\Bigg|_{0}^{T} = T \ .$$

Por lo tanto,

(4)
$$\int_{-T}^{T} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{T}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}\,dx = \begin{cases} 0 \ , & m \neq n \ , \\ T \ , & m = n \ . \end{cases}$$

El integrando de la parte (c) también es par y puede calcularse usando una identidad trigonométrica similar. Dejaremos como ejercicio para el lector la verificación de que (véase problema 8)

(5)
$$\int_{-T}^{T} \cos\frac{m\pi x}{T}\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx = \begin{cases} 0 \ , & m \neq n \ , \\ T \ , & m = n \ . \end{cases}$$ ■

Las ecuaciones (3)-(5) expresan una **condición de ortogonalidad**[†] satisfecha por el conjunto de funciones trigonométricas $\{\cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots\}$, donde $T = \pi$. Diremos más de esto posteriormente.

Es fácil verificar que si cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_n$ es periódica con periodo T, entonces ocurre lo mismo con cualquier combinación lineal

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) \ .$$

Por ejemplo, la suma $7 + 3 \cos \pi x - 8 \operatorname{sen} \pi x + 4 \cos 2\pi x - 6 \operatorname{sen} 2\pi x$ tiene periodo 2, pues cada término tiene periodo 2. Además, si la serie infinita

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{T} \right)$$

que consta de funciones con periodo $2T$, converge para toda x, entonces la función a la cual converge será periódica con periodo $2T$.

Así como a cada función que tiene derivadas de todos los órdenes en un punto fijo le podemos asociar una serie de Taylor, podemos identificar una serie trigonométrica particular con una función continua por partes. Para ilustrar esto, supongamos que $f(x)$ tiene el desarrollo en serie[††]

$$\textbf{(6)} \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{T} \right\} ,$$

donde a_n y b_n son constantes. (Necesariamente, f tiene periodo $2T$.)

Para determinar los coeficientes $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, procedemos como sigue. Integramos $f(x)$ de $-T$ a T, suponiendo que podemos integrar término a término:

$$\int_{-T}^{T} f(x)dx = \int_{-T}^{T} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T}^{T} \cos \frac{n\pi x}{T} dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T}^{T} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{T} dx \ .$$

Como $\operatorname{sen}(n\pi x/T)$ es una función impar, $\int_{-T}^{T} \operatorname{sen}(n\pi x/T)dx = 0$. Además, para $n = 1, 2, \ldots$, es fácil verificar que $\int_{-T}^{T} \cos(n\pi x/T)dx = 0$. Por lo tanto,

$$\int_{-T}^{T} f(x)dx = \int_{-T}^{T} \frac{a_0}{2} dx = a_0 T ,$$

y entonces

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x)dx \ .$$

[†]Esta nomenclatura es sugerida por el hecho de que las fórmulas para las sumas de Riemann que aproximan las integrales (3)-(5) se parecen a los productos punto (sección 9.1, página 528) de vectores de dimensión alta. En la mayor parte de los textos de cálculo, se muestra que el producto punto de vectores ortogonales en dos dimensiones es igual a cero.

[††]La elección de la constante $a_0/2$ en vez de a_0 facilitará la memorización de las fórmulas.

(Observe que $a_0/2$ es el valor promedio de f en un periodo $2T$.) A continuación, para determinar el coeficiente a_m cuando $m \geq 1$, multiplicamos (6) por $\cos(m\pi x/T)$ e integramos:

$$\textbf{(7)} \qquad \int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{m\pi x}{T}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-T}^{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T}^{T}\cos\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T}^{T}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx \ .$$

Las condiciones de ortogonalidad (3)-(5) permiten analizar fácilmente las integrales del lado derecho. Ya hemos observado que

$$\int_{-T}^{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx = 0 \ , \qquad m \geq 1 \ ,$$

y, por las fórmulas (3) y (5), tenemos

$$\int_{-T}^{T}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx = 0 \ ,$$

$$\int_{-T}^{T}\cos\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx = \begin{cases} 0 \ , & n \neq m \ , \\ T \ , & n = m \ . \end{cases}$$

Por tanto, en (7) sólo hay un término del lado derecho que sobrevive a la integración:

$$\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{m\pi x}{T}dx = a_m T \ .$$

Así, tenemos una fórmula para el coeficiente a_m:

$$a_m = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{m\pi x}{T}dx \ .$$

De manera análoga, al multiplicar (6) por $\operatorname{sen}(m\pi x/T)$ e integrar tenemos

$$\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{T}dx = b_m T$$

de modo que la fórmula para b_m es

$$b_m = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{T}dx \ .$$

Motivados por los cálculos anteriores podemos establecer la siguiente definición.

SERIE DE FOURIER

Definición 1. Sea f una función continua por partes en el intervalo $[-T, T]$. La **serie de Fourier**† de f es la serie trigonométrica

(8) $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \right\} ,$$

donde a_n y b_n están dadas por las fórmulas††

(9) $$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

(10) $$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}dx , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Las fórmulas (9) y (10) se llaman **fórmulas de Euler**. Usamos el símbolo ~ en (8) para recordar que esta serie está asociada con $f(x)$ pero podría no converger a tal $f(x)$. Regresaremos a la cuestión de convergencia posteriormente en esta sección, pero primero consideraremos algunos ejemplos de series de Fourier.

EJEMPLO 3 Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi < x < 0 , \\ x , & 0 < x < \pi . \end{cases}$$

SOLUCIÓN En este caso, $T = \pi$. Usamos las fórmulas (9) y (10) para tener

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi n} u\cos u\,du = \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos u + u\operatorname{sen} u\right]\Big|_0^{\pi n} \\ &= \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots , \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} ,$$

---

†***Nota histórica:*** Joseph B. J. Fourier (1768-1830) desarrolló este tipo de series para resolver problemas de flujo de calor. Lagrange expresó sus dudas acerca de la validez de la representación, pero Dirichlet diseñó condiciones que garantizan su convergencia.

††Observe que $f(x)$ no tiene que estar definida para cada x en $[-T, T]$: sólo necesitamos que las integrales en (9) y (10) existan.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi n} u\,\mathrm{sen}\,u\,du = \frac{1}{\pi n^2}\left[\mathrm{sen}\,u - u\cos u\right]\Big|_0^{\pi n}$$
$$= \frac{-\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Por lo tanto,

(11)
$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\,nx\right\}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left\{\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right\}$$
$$+ \left\{\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x + \cdots\right\}\,.$$

La figura 10.4 muestra algunas sumas parciales de esta serie. ■

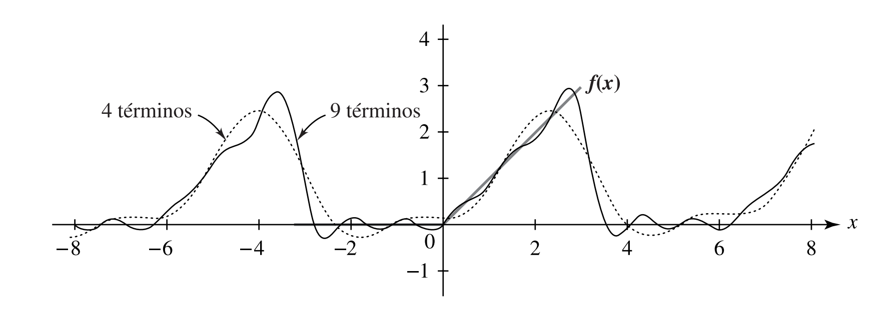


Figura 10.4 Sumas parciales de la serie de Fourier del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi < x < 0\,, \\ 1\,, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

SOLUCIÓN De nuevo, $T = \pi$. Observe que f es una función impar. Como el producto de una función impar y una función par es impar (véase el problema 7), $f(x)\cos nx$ también es una función impar. Así,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Además, $f(x)$ sen nx es el producto de dos funciones impar y por tanto es una función par, de modo que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\, nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$= \begin{cases} 0\,, & n \text{ par}\,, \\ \dfrac{4}{\pi n}\,, & n \text{ impar}\,. \end{cases}$$

Así,

(12) $$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]}{n}\,\text{sen}\, nx = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen}\, x + \frac{1}{3}\text{sen}\, 3x + \frac{1}{5}\text{sen}\, 5x + \cdots\right].$$

La figura 10.5 muestra algunas sumas parciales de (12). ■

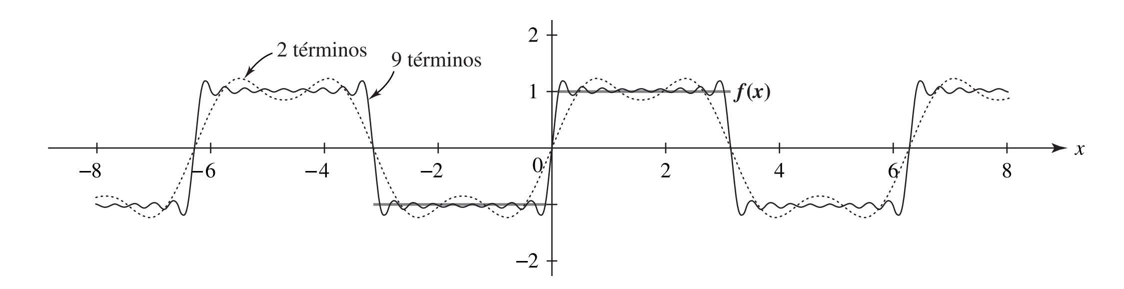


Figura 10.5 Sumas parciales de la serie de Fourier del ejemplo 4

En el ejemplo 4, la función impar f tiene una serie de Fourier que sólo consta de funciones seno. Es fácil ver que, en general, si f es cualquier función impar, entonces su serie de Fourier consta únicamente de términos seno.

EJEMPLO 5 Calcular la serie de Fourier de $f(x) = |x|$, $-1 < x < 1$.

SOLUCIÓN En este caso, $T = 1$. Como f es una función par, $f(x)$ sen $n\pi x$ es una función impar. Por consiguiente,

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\text{sen}\, n\pi x\, dx = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Como $f(x)$ cos $n\pi x$ es una función par, tenemos

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1 \ ,$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\int_0^{\pi n} u\cos u\,du = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[\cos u + u\,\mathrm{sen}\,u\right]\Big|_0^{\pi n} = \frac{2}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Por lo tanto,

(13)
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos n\pi x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left\{\cos \pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \frac{1}{25}\cos 5\pi x + \cdots\right\} \ .$$

La figura 10.6 muestra las sumas parciales de (13). ■

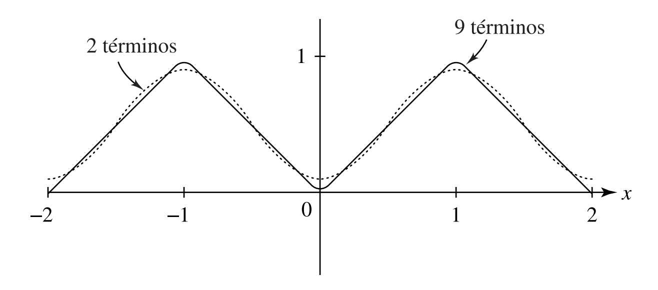


Figura 10.6 Sumas parciales de la serie de Fourier del ejemplo 5

Observe que la función par f del ejemplo 5 tiene una serie de Fourier que sólo consta de funciones coseno y de la función constante $1 = \cos 0\pi x$. En general, si f es una función par, entonces su serie de Fourier sólo consta de funciones coseno (incluyendo $\cos 0\pi x$).

Desarrollos ortogonales

Las series de Fourier son ejemplos de desarrollos ortogonales.[†] Un conjunto de funciones $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un **sistema ortogonal** o simplemente **ortogonal** con respecto de la función de

[†]La ortogonalidad también se analizó en la sección 8.8, páginas 491-492.

ponderación no negativa $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$ si

(14) $$\int_a^b f_m(x)f_n(x)w(x)\,dx = 0 \ , \quad \text{siempre que } m \neq n \ .$$

Como hemos visto, el conjunto de funciones trigonométricas

(15) $$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots\}$$

es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ con respecto de la función de ponderación $w(x) \equiv 1$. Si definimos la **norma** de f como

(16) $$\|f\| := \left[\int_a^b f^2(x)w(x)\,dx\right]^{1/2} ,$$

entonces decimos que un conjunto de funciones $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (o $\{f_n(x)\}_{n=1}^{N}$ es un **sistema ortonormal con respecto de** $w(x)$ si se cumple (14) y además $\|f_n\| = 1$ para cada n. En forma equivalente, decimos que el conjunto es un sistema ortonormal si

(17) $$\int_a^b f_m(x)f_n(x)w(x)\,dx = \begin{cases} 0 \ , & m \neq n \ , \\ 1 \ , & m = n \ . \end{cases}$$

Siempre podemos obtener un sistema ortonormal a partir de un sistema ortogonal, dividiendo cada función entre su norma. En particular, como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \pi \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi \ ,$$

entonces el sistema ortogonal (15) da lugar en $[-\pi, \pi]$ al sistema ortonormal

$$\left\{(2\pi)^{-1/2},\ \pi^{-1/2}\cos x,\ \pi^{-1/2}\operatorname{sen} x,\ \pi^{-1/2}\cos 2x,\ \pi^{-1/2}\operatorname{sen} 2x,\ \ldots\right\} .$$

Si $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal con respecto de $w(x)$ en $[a, b]$, podríamos preguntarnos si podemos desarrollar una función $f(x)$ en términos de estas funciones; es decir, ¿podemos expresar a f en la forma

(18) $$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) + \cdots$$

para una elección adecuada de las constantes $c_1, c_2, \ldots$? Tal desarrollo se llama **desarrollo ortogonal**, o **serie de Fourier generalizada**.

Para determinar las constantes en (18), podemos proceder como en la deducción de las fórmulas de Euler para los coeficientes de una serie de Fourier, utilizando ahora la ortogona-

lidad del sistema. Suponiendo que la representación (18) es válida, multiplicamos por $f_m(x)w(x)$ e integramos para obtener

$$\textbf{(19)} \qquad \int_a^b f(x)f_m(x)w(x)dx = c_1 \int_a^b f_1(x)f_m(x)w(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)f_m(x)w(x)dx + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b f_n(x)f_m(x)w(x)dx \ .$$

(También hemos supuesto que podemos integrar término a término.) Como el sistema es ortogonal con respecto de $w(x)$, cada integral del lado derecho de (19) se anula, excepto cuando $n = m$. Al despejar c_m obtenemos

$$\textbf{(20)} \qquad c_m = \frac{\int_a^b f(x)f_m(x)w(x)dx}{\int_a^b f_m^2(x)w(x)dx} = \frac{\int_c^b f(x)f_m(x)w(x)dx}{\|f_m\|^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

La deducción de la fórmula para c_m sólo fue *formal*, pues no hemos resuelto la cuestión de la convergencia del desarrollo en (18). Si la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $[a, b]$, entonces podemos justificar cada paso y los coeficientes vienen dados por la fórmula (20).

Convergencia de series de Fourier

Regresemos a la cuestión de la convergencia de una serie de Fourier. Las figuras 10.4-10.6 nos proporcionan algunas pistas. En el ejemplo 5 es posible utilizar un criterio de comparación o de comparación de límites para mostrar que la serie es dominada absolutamente por una serie p de la forma $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, la cual converge. Sin embargo, esto es más fácil de hacer en el ejemplo 4, pues los términos tienden a cero como $1/n$. Las cosas pueden empeorar, pues existen series de Fourier que *divergen*.[†] Estableceremos dos teoremas que tratan de la convergencia de una serie de Fourier y dos que tratan de la derivación e integración término a término. Para las demostraciones de estos resultados, véanse *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, por Tyn Myint-U (Elsevier North Holland, Inc., Nueva York, 1980), capítulo 5; *Advanced Calculus with Applications*, por N. J. DeLillo (Macmillan, Nueva York, 1982), capítulo 9; o un texto avanzado acerca de la teoría de series de Fourier.

Antes de continuar, necesitamos la siguiente notación. Sean

$$f(x^+) := \lim_{h \to 0^+} f(x + h) \quad \text{y} \quad f(x^-) := \lim_{h \to 0^+} f(x - h) \ .$$

[†]De hecho, existen series trigonométricas que convergen pero *no son* series de Fourier; un ejemplo es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\, nx}{\ln(n + 1)}$.

CONVERGENCIA PUNTUAL DE UNA SERIE DE FOURIER

Teorema 2. Si f y f' son continuas por partes en $[-T, T]$, entonces para cualquier x en $(-T, T)$,

$$\textbf{(21)} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \right\} = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] ,$$

donde a_n y b_n están dadas por las fórmulas de Euler (9) y (10). Para $x = \pm T$, la serie converge a $\frac{1}{2}\left[f(-T^+) + f(T^-)\right]$.[†]

En otras palabras, cuando f y f' son continuas por partes en $[-T, T]$, la serie de Fourier converge a $f(x)$ si f es continua en x y converge al promedio de los límites por la izquierda y por la derecha en puntos donde f es discontinua.

Observe que el lado izquierdo de (21) es periódico con periodo $2T$. Esto significa que si extendemos $f(x)$ más allá del intervalo $(-T, T)$ a toda la recta real usando la periodicidad con periodo $2T$, entonces la ecuación (21) es válida para toda x en la extensión de $f(x)$ con periodo $2T$.

EJEMPLO 6 ¿A qué función converge la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -1 , & -\pi < x < 0 , \\ 1 , & 0 < x < \pi , \end{cases}$$

converge?

SOLUCIÓN En el ejemplo 4 vimos que la serie de Fourier de $f(x)$ está dada por (12) y en la figura 10.5 bosquejamos las gráficas de dos de sus sumas parciales. $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas por partes en $[-\pi, \pi]$. Además, f es continua excepto en $x = 0$. Así, por el teorema 2, la serie de Fourier de f en (12) converge a la función $g(x)$ con periodo 2π $g(x)$, donde $g(x) = f(x) = -1$ para $-\pi < x < 0$, $g(x) = f(x) = 1$ para $0 < x < \pi$, $g(0) = [f(0^+) + f(0^-)]/2 = 0$ y en $\pm\pi$ tenemos $g(\pm\pi) = [f(-\pi^+) + f(\pi^-)]/2 = (-1 + 1)/2 = 0$. La gráfica de $g(x)$ aparece en la figura 10.7. ■

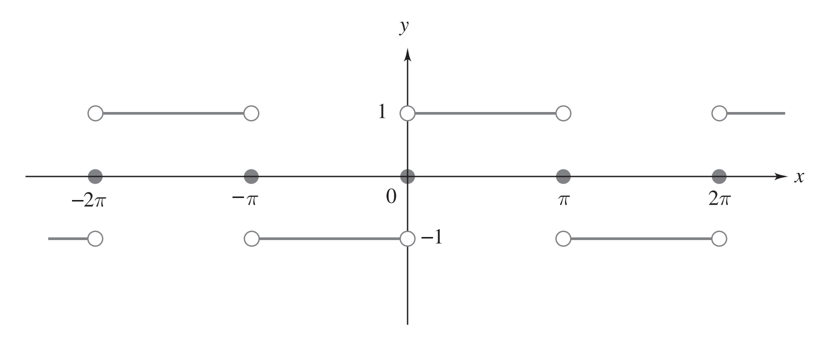


Figura 10.7 La función límite de la serie de Fourier para $f(x) = \begin{cases} -1 , & -\pi < x < 0 , \\ 1 , & 0 < x < \pi \end{cases}$

[†]La fórmula (24) muestra que no importa cómo definamos a $f(x)$ en los puntos de discontinuidad, pues sólo están implicados los límites por la izquierda y por la derecha. Por supuesto, la derivada $f'(x)$ no está definida en tales puntos.

Cuando f es una función con periodo $2T$ continua en $(-\infty, \infty)$ y cuya derivada es continua por partes, su serie de Fourier no sólo converge en cada punto, sino que converge **uniformemente** en $(-\infty, \infty)$. Esto significa que para cualquier tolerancia prescrita $\varepsilon > 0$, la gráfica de la suma parcial

$$s_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \right\}$$

estará, para N grande, en un corredor de ancho ε en torno de la gráfica de f en $(-\infty, \infty)$ (véase la figura 10.8). La propiedad de convergencia uniforme de las series de Fourier es de particular utilidad cuando hay que verificar que una solución formal de una ecuación diferencial parcial es una solución genuina.

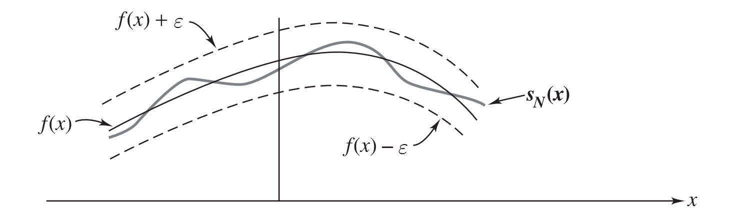


Figura 10.8 Un corredor de ancho ε en torno de f

CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SERIE DE FOURIER

Teorema 3. Sea f una función continua en $(-\infty, \infty)$ y periódica con periodo $2T$. Si f' es continua por partes en $[-T, T]$, entonces la serie de Fourier para f converge uniformemente a f en $[-T, T]$ y por tanto en cualquier intervalo. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero N_0 (que depende de ε) tal que

$$\left| f(x) - \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \right\} \right\} \right| < \varepsilon \ ,$$

para toda $N \geq N_0$ y toda $x \in (-\infty, \infty)$.

En el ejemplo 5 obtuvimos el desarrollo en serie de Fourier dado en (13) para $f(x) = |x|$, $-1 < x < 1$. Como $g(x)$, la extensión periódica de $f(x)$ (véase la figura 10.9 de la página 602) es continua en $(-\infty, \infty)$ y

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \ , & -1 < x < 0 \ , \\ 1 \ , & 0 < x < 1 \ , \end{cases}$$

es continua por partes en $[-1, 1]$, el desarrollo en serie de Fourier (13) converge uniformemente a $|x|$ en $[-1, 1]$. Compare con la figura 10.6.

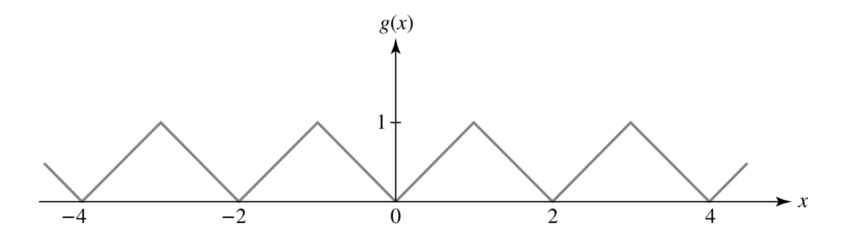


Figura 10.9 Extensión periódica de $f(x) = |x|, -1 < x < 1$

No siempre es posible derivar término a término una serie de Fourier. Por ejemplo, la serie de Fourier para $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ (véase el problema 9) es

(22) $$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} ,$$

que converge para toda x, mientras que su serie derivada

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx$$

diverge para toda x. El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para usar la derivación término a término.

DERIVACIÓN DE SERIES DE FOURIER

Teorema 4. Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$, periódica con periodo $2T$. Suponga que $f'(x)$ y $f''(x)$ son continuas por partes en $[-T, T]$. Entonces la serie de Fourier de $f'(x)$ se puede obtener a partir de la serie de Fourier para $f(x)$ derivando término a término. En particular, si

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{T} \right\} ,$$

entonces

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{T} \left\{ -a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{T} + b_n \cos \frac{n\pi x}{T} \right\} .$$

Observe que el teorema 4 no se aplica al ejemplo $f(x)$ y su desarrollo en serie de Fourier en (22), pues la extensión con periodo 2π de $f(x)$ no es continua en $(-\infty, \infty)$.

La integración término a término de una serie de Fourier es válida bajo condiciones mucho más débiles.

INTEGRACIÓN DE SERIES DE FOURIER

Teorema 5. Sea $f(x)$ continua por partes en $[-T, T]$, con serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \right\} .$$

Entonces para cualquier x en $[-T, T]$, tenemos

$$\int_{-T}^{x} f(t)\,dt = \int_{-T}^{x} \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T}^{x} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi t}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{T} \right\} dt .$$

EJERCICIOS 10.3

En los problemas 1 a 6, determine si la función dada es impar, par o ninguna de ellas.

1. $f(x) = x^3 + \operatorname{sen} 2x$.
2. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.
3. $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.
4. $f(x) = \operatorname{sen}(x + 1)$.
5. $f(x) = e^{-x} \cos 3x$.
6. $f(x) = x^{1/5} \cos x^2$.

7. Demuestre las siguientes propiedades:
(a) Si f y g son funciones pares, entonces también lo es el producto fg.
(b) Si f y g son funciones impares, entonces fg es una función par.
(c) Si f es una función par y g es una función impar, entonces fg es una función impar.

8. Verifique la fórmula (5). [*Sugerencia*: Use la identidad $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$.]

En los problemas 9 a 16, calcule la serie de Fourier para la función dada f en el intervalo indicado. Use una computadora o una calculadora gráfica para trazar unas cuantas sumas parciales de la serie de Fourier.

9. $f(x) = x , \quad -\pi < x < \pi$.

10. $f(x) = |x| , \quad -\pi < x < \pi$.

11. $f(x) = \begin{cases} 1 , & -2 < x < 0 , \\ x , & 0 < x < 2 . \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi < x < 0 , \\ x^2 , & 0 < x < \pi . \end{cases}$

13. $f(x) = x^2 , \quad -1 < x < 1$.

14. $f(x) = \begin{cases} x , & 0 < x < \pi , \\ x + \pi , & -\pi < x < 0 . \end{cases}$

15. $f(x) = e^x , \quad -\pi < x < \pi$.

16. $f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi < x < -\pi/2 , \\ -1 , & -\pi/2 < x < 0 , \\ 1 , & 0 < x < \pi/2 , \\ 0 , & \pi/2 < x < \pi . \end{cases}$

En los problemas 17 a 24, determine la función a la que converge la serie de Fourier para $f(x)$, dada en el problema indicado.

17. Problema 9.
18. Problema 10.
19. Problema 11.
20. Problema 12.
21. Problema 13.
22. Problema 14.
23. Problema 15.
24. Problema 16.

25. Determine las funciones representadas por la series obtenida al integrar término a término la serie de $-\pi$ a x:

(a) $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \sim x , \quad -\pi < x < \pi$.

(b) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n + 1)x}{(2n + 1)} \sim f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 , & -\pi < x < 0 , \\ 1 , & 0 < x < \pi . \end{cases}$$

26. Muestre que el conjunto de funciones

$$\left\{\cos\frac{\pi}{2}x, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x, \cos\frac{3\pi}{2}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}x, \ldots, \cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x, \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}x, \ldots\right\}$$

es un sistema ortonormal en $[-1, 1]$ con respecto de la función de ponderación $w(x) \equiv 1$.

27. Determine el desarrollo ortogonal (serie de Fourier generalizada) para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

en términos del sistema ortonormal del problema 26.

28. **(a)** Muestre que la función $f(x) = x^2$ tiene la serie de Fourier siguiente, en $-\pi < x < \pi$,

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx .$$

(b) Use el resultado de la parte (a) y el teorema 2 para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} .$$

(c) Use el resultado de la parte (a) y el teorema 2 para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

29. En la sección 8.8 mostramos que los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con respecto de la función de ponderación $w(x) \equiv 1$. Use el hecho de que los tres primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = (3/2)x^2 - (1/2),$$

para determinar los tres primeros coeficientes en el desarrollo

$$f(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + \cdots,$$

donde $f(x)$ es la función

$$f(x) := \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

30. Como en el problema 29, determine los tres primeros coeficientes en el desarrollo

$$f(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + \ldots,$$

cuando $f(x) = |x|$, $-1 < x < 1$.

31. Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ son ortogonales en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con respecto de la función de ponderación $W(x) = e^{-x^2}$. Verifique este hecho para los tres primeros polinomios de Hermite:

$$H_0(x) \equiv 1, \qquad H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2 .$$

32. Los polinomios de Chebyshev (Tchebichef) $T_n(x)$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con respecto de la función de ponderación $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Verifique este hecho para los tres primeros polinomios de Chebyshev:

$$T_0(x) \equiv 1, \qquad T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 .$$

33. Sea $\{f_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ con respecto de la función de ponderación $w(x)$. Muestre que se satisface la **propiedad pitagórica**:

$$\|f_m + f_n\|^2 = \|f_m\|^2 + \|f_n\|^2$$

si $m \neq n$.

34. **Norma.** La norma de una función $\|f\|$ es como la longitud de un vector en R^n. En particular, muestre que la norma definida en (16) satisface las siguientes propiedades asociadas a la longitud (suponga que f y g son continuas y $w(x) > 0$ en $[a, b]$):

(a) $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0$ si y sólo si $f \equiv 0$.

(b) $\|cf\| = |c|\,\|f\|$, donde c es cualquier número real.

(c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

35. **Producto interior.** La integral en la condición de ortogonalidad (14) es como el producto punto de dos vectores en R^n. En particular, muestre que el **producto interior** de dos funciones definido como

(23) $$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx ,$$

donde $w(x)$ es una función de ponderación positiva, satisface las siguientes propiedades asociadas al producto punto (suponga que f, g y h son continuas en $[a, b]$):

(a) $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$.

(b) $\langle cf, h\rangle = c\langle f, h\rangle$, donde c es cualquier número real.

(c) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.

36. Forma compleja de la serie de Fourier.

(a) Use la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, con $i = \sqrt{-1}$, para demostrar que

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} .$$

(b) Muestre que la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\}$$
$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\} ,$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2} , \; c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} , \; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} .$$

(c) Por último, use los resultados de la parte (b) para mostrar que

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} , \qquad -\pi < x < \pi ,$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx .$$

37. Propiedad de aproximación por mínimos cuadrados. La N-ésima suma parcial de la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\}$$

proporciona la mejor aproximación por mínimos cuadrados de f mediante un polinomio trigonométrico. Para demostrar esto, sea $F_N(x)$ un polinomio trigonométrico arbitrario de grado N:

$$F_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{\alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx\} ,$$

y defina

$$E := \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_N(x)]^2 dx ,$$

que es el *error cuadrático total*. Al desarrollar el integrando, obtenemos

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_N(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\,dx .$$

(a) Use la ortogonalidad de las funciones $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \ldots\}$ para mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\,dx = \pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2} + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2\right)$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_N(x)\,dx = \pi\left(\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_N b_N\right) .$$

(b) Sea E^* el error obtenido al aproximar f por la N-ésima suma parcial de su serie de Fourier; es decir, cuando elegimos $\alpha_n = a_n$ y $\beta_n = b_n$. Muestre que

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + \cdots + a_N^2 + b_1^2 + \cdots + b_N^2\right) .$$

(c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para mostrar que $E - E^* \geq 0$; es decir, $E \geq E^*$, demostrando que

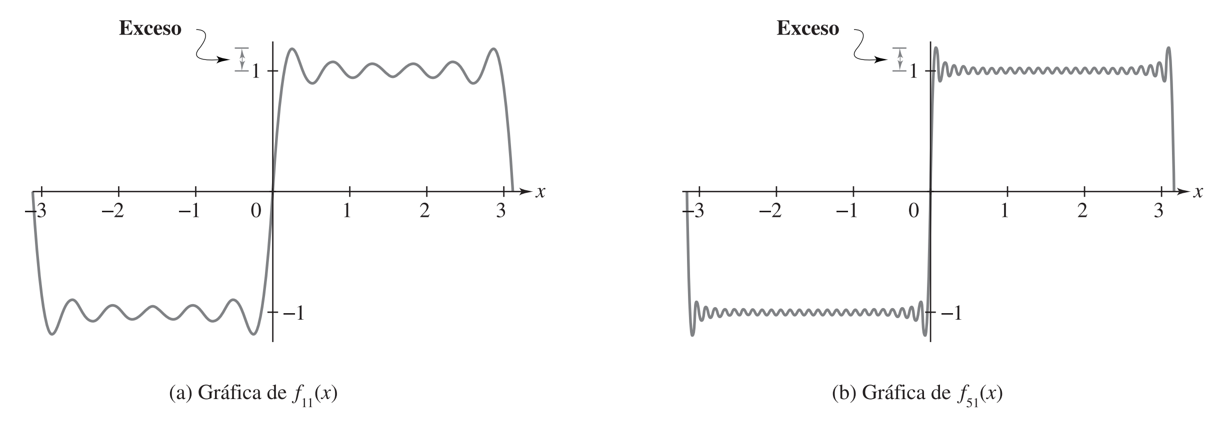
$$E - E^* = \pi\left\{\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + (\alpha_1 - a_1)^2 + \cdots + (\alpha_N - a_N)^2 + (\beta_1 - b_1)^2 + \cdots + (\beta_N - b_N)^2\right\} .$$

Por lo tanto, la N-ésima suma parcial de la serie de Fourier proporciona el menor error cuadrático total, pues $E \geq E^*$.

38. Desigualdad de Bessel. Use el hecho de que E^*, definido en la parte (b) del problema 37, es no negativo, para demostrar la **desigualdad de Bessel**

(24) $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n^2 + b_n^2\} \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx .$$

(Si f es continua por partes en $[-\pi, \pi]$, entonces tenemos la igualdad en (24). Este resultado es la **identidad de Parseval**.)



(a) Gráfica de $f_{11}(x)$

(b) Gráfica de $f_{51}(x)$

Figura 10.10 Fenómeno de Gibbs para las sumas parciales de una serie de Fourier

39. Fenómeno de Gibbs.† El matemático norteamericano Josiah Willard Gibbs (1839-1903) observó que cerca de los puntos de discontinuidad de f, las sumas parciales de la serie de Fourier de f pueden exceder en aproximadamente 9% el salto, sin importar el número de términos. Esto se ilustra en la figura 10.10 para la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 , & -\pi < x < 0 , \\ 1 , & 0 < x < \pi , \end{cases}$$

cuya serie de Fourier tiene las sumas parciales

$$f_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \cdots + \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)}\right] .$$

Para verificar esto para $f(x)$, proceda como sigue:

(a) Muestre que

$$\begin{aligned} \pi(\operatorname{sen} x) f'_{2n-1}(x) &= 4 \operatorname{sen} x\,[\cos x + \cos 3x \\ &\quad + \cdots + \cos(2n-1)x] \\ &= 2 \operatorname{sen} 2nx . \end{aligned}$$

(b) Infiera de la parte (a) y la figura que el máximo ocurre en $x = \pi/(2n)$ y tiene el valor

$$f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right] .$$

(c) Muestre que si uno aproxima

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

usando la partición $x_k := (2k-1)(\pi/2n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\Delta x_k = \pi/n$, eligiendo el punto medio de cada intervalo para evaluar el integrando, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx &\approx \frac{\operatorname{sen}(\pi/2n)}{\pi/2n}\,\frac{\pi}{n} + \cdots \\ &\quad + \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi/2n]}{(2n-1)\pi/2n}\,\frac{\pi}{n} \\ &= \frac{\pi}{2} f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) . \end{aligned}$$

†***Nota histórica:*** En realidad, H. Wilbraham descubrió este fenómeno casi cincuenta años antes que Gibbs. Sería más adecuado llamarlo fenómeno de *Gibbs-Wilbraham*.

(d) Use el resultado de la parte (c) para mostrar que el exceso satisface

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \ .$$

(e) Use el resultado de la parte (d) y un algoritmo de integración numérica (como la regla de Simpson, apéndice B) para la **función integral de seno**

$$Si(z) := \int_0^{z}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \ ,$$

muestre que $\lim_{n\to\infty} f_{2n-1}(\pi/(2n)) \approx 1.18$. Así, las aproximaciones exceden el valor real de $f(0^+) = 1$ por 0.18 o 9% del salto de $f(0^-)$ a $f(0^+)$.

10.4 SERIES DE SENOS Y COSENOS DE FOURIER

Un problema que aparece de manera típica al usar separación de variables para resolver una ecuación diferencial ordinaria es el problema de representar una función definida en algún intervalo finito mediante una serie trigonométrica que conste sólo de funciones seno o sólo de funciones coseno. Por ejemplo, en la ecuación (12) de la sección 10.2, página 583, necesitábamos expresar los valores iniciales $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$, de la solución al problema con valores iniciales y en la frontera asociado al problema de flujo de calor como una serie trigonométrica de la forma

$$\textbf{(1)} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ .$$

Recordemos que la serie de Fourier para una función impar definida en $[-L, L]$ consta sólo de términos seno, por lo que podríamos tratar de obtener (1) extendiendo la función $f(x)$, $0 < x < L$, al intervalo $(-L, L)$ de modo que la función extendida sea impar. Logramos esto definiendo la función

$$f_o(x) := \begin{cases} f(x) \ , & 0 < x < L \ , \\ -f(-x) \ , & -L < x < 0 \ . \end{cases}$$

y extendiendo $f_o(x)$ para toda x usando la periodicidad con periodo $2L$.[†] Como $f_o(x)$ es una función impar, tiene una serie de Fourier que consta sólo de términos seno. Además, $f_o(x)$ es una extensión de $f(x)$, pues $f_o(x) = f(x)$ en $(0, L)$. Esta extensión se llama la **extensión impar con periodo 2*L*** de $f(x)$. El desarrollo en serie de Fourier resultante se llama un desarrollo de medio rango para $f(x)$, pues representa a la función $f(x)$ en $(0, L)$, que es la mitad del intervalo $(-L, L)$ donde representa a $f_o(x)$.

[†]Estrictamente, hemos extendido $f_o(x)$ para toda x distinta de los múltiplos enteros de L. Los aspectos de continuidad también sugieren con frecuencia los valores adecuados para las funciones extendidas en algunos de estos puntos. La figura 10.11 de la página 609 ilustra este punto.

De manera similar, podemos definir la **extensión par con periodo 2*L*** de $f(x)$ como la función

$$f_e(x) := \begin{cases} f(x) , & 0 < x < L , \\ f(-x) , & -L < x < 0 , \end{cases}$$

de modo que $f_e(x + 2L) = f_e(x)$.

Para ilustrar las diversas extensiones, consideremos la función $f(x) = x$, $0 < x < \pi$. Si extendemos $f(x)$ al intervalo $(-\pi, \pi)$ usando un periodo π, entonces la extensión $\tilde{f}$ está dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x , & 0 < x < \pi , \\ x + \pi , & -\pi < x < 0 , \end{cases}$$

con $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x)$. En el problema 14 de los ejercicios 10.3, el lector calculó la serie de Fourier para $\tilde{f}(x)$ y vio que

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} 2nx ,$$

que consta de funciones impares (los términos seno) y funciones pares (el término constante), pues la extensión con periodo π $\tilde{f}(x)$ no es par ni impar. La extensión impar con periodo 2π de $f(x)$ es justamente $f_o(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, que tiene el desarrollo en serie de Fourier

$$\textbf{(2)} \qquad f_o(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$$

(véase el problema 9 en los ejercicios 10.3). Como $f_o(x) = f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$, el desarrollo en (2) es un desarrollo de medio rango para $f(x)$. La extensión par con periodo 2π de $f(x)$ es la función $f_e(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$, que tiene el desarrollo en serie de Fourier

$$\textbf{(3)} \qquad f_e(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} \cos (2n + 1)x$$

(véase el problema 10 de los ejercicios 10.3).

Las tres extensiones anteriores, la función con periodo π $\tilde{f}(x)$, la función impar $f_o(x)$ con periodo y la función par $f_e(x)$ con periodo 2π son extensiones naturales de $f(x)$. Existen otras formas de extender a $f(x)$. Por ejemplo, la función

$$g(x) = \begin{cases} x , & 0 < x < \pi , \\ 0 , & -\pi < x < 0 , \end{cases} \qquad g(x + 2\pi) = g(x) ,$$

que estudiamos en el ejemplo 3 de la sección 10.3, también es una extensión de $f(x)$. Sin embargo, su serie de Fourier contiene términos seno y coseno y por lo tanto no es tan útil como las extensiones anteriores. Las gráficas de estas extensiones de $f(x)$ aparecen en la figura 10.11.

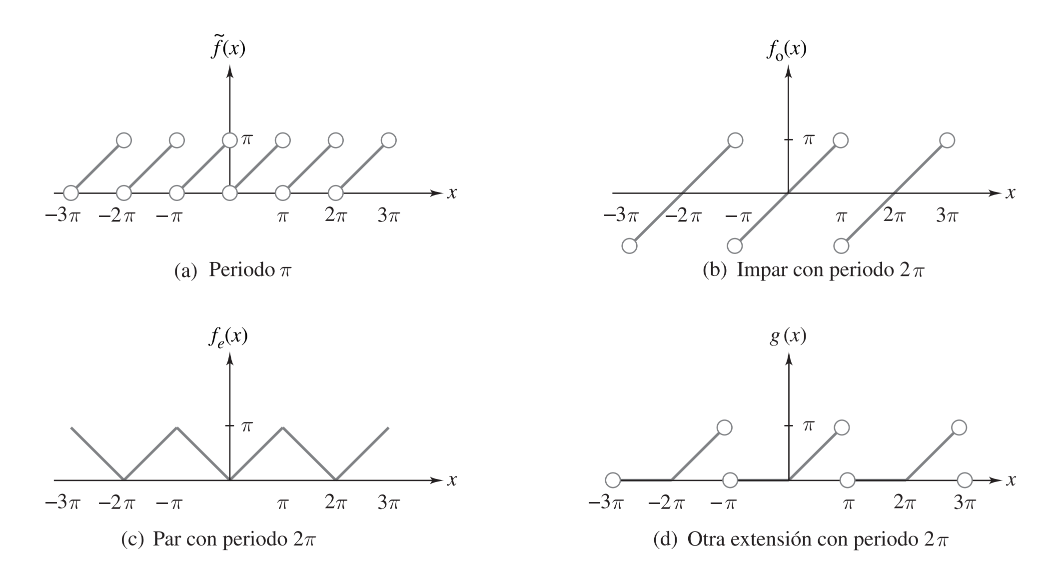


Figura 10.11 Extensiones de $f(x) = x$, $0 < x < \pi$

Los desarrollos en serie de Fourier para $f_o(x)$ y $f_e(x)$ dados en (2) y (3) representan a $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$ (en realidad, son iguales a $f(x)$ en $(0, \pi)$). Esto motiva las siguientes definiciones.

SERIES DE SENOS Y COSENOS DE FOURIER

Definición 2. Sea $f(x)$ continua por partes en el intervalo $[0, T]$. La **serie de cosenos de Fourier** de $f(x)$ en $[0, T]$ es

(4) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T} ,$$

donde

(5) $$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx , \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

La **serie de senos de Fourier** de $f(x)$ en $[0, T]$ es

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} ,$$

donde

(7) $$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}dx , \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

La serie trigonométrica en (4) es justamente la serie de Fourier para $f_e(x)$, la extensión par con periodo $2T$ de $f(x)$, y la de (6) es la serie de Fourier para $f_o(x)$, la extensión impar con periodo $2T$ de $f(x)$. Estos son los **desarrollos de medio rango** para $f(x)$.

EJEMPLO 1 Calcule la serie de Fourier para

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & 0 \le x \le \pi/2 \ , \\ \pi - x \ , & \pi/2 \le x \le \pi \ . \end{cases}$$

SOLUCIÓN Usamos la fórmula (7) con $T = \pi$ para obtener

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}\,nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\,\text{sen}\,nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi n/2} u\,\text{sen}\,u\,du + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\text{sen}\,nx\,dx - \frac{2}{\pi n^2}\int_{\pi n/2}^{\pi n} u\,\text{sen}\,u\,du \\ &= \frac{2}{\pi n^2}[\text{sen}\,u - u\cos u]\Big|_0^{\pi n/2} - \frac{2}{n}\left[\cos \pi n - \cos\frac{n\pi}{2}\right] \\ &\qquad - \frac{2}{\pi n^2}[\text{sen}\,u - u\cos u]\Big|_{\pi n/2}^{\pi n} \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\text{sen}\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 \ , & n \text{ par} \ , \\ \dfrac{4(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n^2} \ , & n \text{ impar} \ , \end{cases} \end{aligned}$$

Así que al hacer $n = 2k + 1$, tenemos que la serie de senos de Fourier para $f(x)$ es

$$\textbf{(8)} \qquad \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\text{sen}(2k+1)x = \frac{4}{\pi}\left\{\text{sen}\,x - \frac{1}{9}\text{sen}\,3x + \frac{1}{25}\text{sen}\,5x + \cdots\right\} . \ \blacksquare$$

Al igual que en el ejemplo 1, la función $f(x)$ es continua y $f'(x)$ es continua por partes en $(0, \pi)$, de modo que el teorema 2 acerca de la convergencia puntual de las series de Fourier implica que

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\text{sen}\,x - \frac{1}{9}\text{sen}\,3x + \frac{1}{25}\text{sen}\,5x - \frac{1}{49}\text{sen}\,7x + \cdots\right\}$$

para toda x en $[0, \pi]$.

Regresemos al problema de flujo de calor en una dimensión.

EJEMPLO 2 Determinar la solución del problema de flujo de calor

$$\textbf{(9)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad 0 < x < \pi \ , \qquad t > 0 \ ,$$

$$\textbf{(10)} \qquad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

$$\textbf{(11)} \qquad u(x, 0) = \begin{cases} x \ , & 0 < x \le \pi/2 \ , \\ \pi - x \ , & \pi/2 \le x < \pi \ . \end{cases}$$

SOLUCIÓN Al comparar la ecuación (9) con la ecuación (1) de la sección 10.2 (página 580), vemos que $\beta = 2$ y $L = \pi$. Por lo tanto, sólo necesitamos representar $u(x, 0) = f(x)$ en una serie de senos de Fourier (véase la ecuación (12) de la página 583) de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx \ .$$

En el ejemplo 1 obtuvimos este desarrollo y mostramos que

$$c_n = \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 \ , & n \text{ par} \ , \\ \dfrac{4(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n^2} \ , & n \text{ impar} \ . \end{cases}$$

Por lo tanto, de la ecuación (11) en la página 582, vemos que la solución del problema de flujo de calor (9)-(11) es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2n^2 t} \operatorname{sen} nx \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-2(2k+1)^2 t} \operatorname{sen}(2k+1)x \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ e^{-2t} \operatorname{sen} x - \frac{1}{9} e^{-18t} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{25} e^{-50t} \operatorname{sen} 5x + \cdots \right\} \ . \end{aligned}$$

La figura 10.12 muestra un bosquejo de una suma parcial para $u(x, t)$. ■

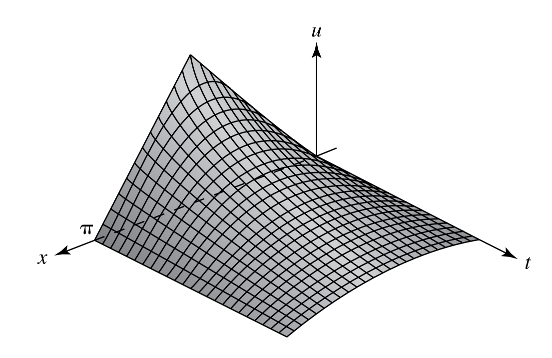


Figura 10.12 Suma parcial para $u(x, t)$ en el ejemplo 2

EJERCICIOS 10.4

En los problemas 1 a 4, determine (a) la extensión con periodo π, $\tilde{f}$, (b) la extensión impar f_o con periodo 2π y (c) la extensión par f_e con periodo 2π para la función dada f y bosqueje sus gráficas.

1. $f(x) = x^2 \ , \quad 0 < x < \pi \ .$

2. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \ , \quad 0 < x < \pi \ .$

3. $f(x) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < x < \pi/2 \ , \\ 1 \ , & \pi/2 < x < \pi \ , \end{cases}$

4. $f(x) = \pi - x \ , \quad 0 < x < \pi \ .$

En los problemas 5 a 10, calcule la serie de senos de Fourier para la función dada.

5. $f(x) = -1$, $0 < x < 1$.

6. $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$.

7. $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$.

8. $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$.

9. $f(x) = x - x^2$, $0 < x < 1$.

10. $f(x) = e^x$, $0 < x < 1$.

En los problemas 11 a 16, calcule la serie de cosenos de Fourier para la función dada.

11. $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$.

12. $f(x) = 1 + x$, $0 < x < \pi$.

13. $f(x) = e^x$, $0 < x < 1$.

14. $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < 1$.

15. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$.

16. $f(x) = x - x^2$, $0 < x < 1$.

En los problemas 17 a 19, determine la solución del problema de flujo de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad 0 < x < \pi , \quad t > 0 ,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 , \quad t > 0 ,$$

$$u(x, 0) = f(x) , \quad 0 < x < \pi ,$$

donde $f(x)$ está dada.

17. $f(x) = 1 - \cos 2x$. **18.** $f(x) = x(\pi - x)$.

19. $f(x) = \begin{cases} -x , & 0 < x \le \pi/2 , \\ x - \pi , & \pi/2 \le x < \pi . \end{cases}$

10.5 LA ECUACIÓN DEL CALOR

En la sección 10.1 desarrollamos un modelo para el flujo del calor en un alambre uniforme aislado cuyos extremos se mantienen a la temperatura constante 0°C. En particular, vimos que la temperatura $u(x, t)$ en el alambre queda descrita mediante el problema con valores iniciales y en la frontera

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 ,$$

$$\textbf{(2)} \qquad u(0, t) = u(L, t) = 0 , \quad t > 0 ,$$

$$\textbf{(3)} \qquad u(x, 0) = f(x) , \quad 0 < x < L$$

(véanse las ecuaciones (7)-(9) de la sección 10.1, página 578). En este caso, la ecuación (2) especifica que la temperatura en los extremos del alambre se anula, mientras que la ecuación (3) especifica la distribución inicial de la temperatura.

En la sección 10.2 obtuvimos también una solución formal de (1)-(3) usando separación de variables. Ahí vimos que la solución de (1)-(3) tiene la forma

$$\textbf{(4)} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} ,$$

donde los c_n son los coeficientes en la serie de senos de Fourier para $f(x)$:

$$\textbf{(5)} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} .$$

En otras palabras, resolver (1)-(3) se reduce a calcular la serie de senos de Fourier para la función de valores iniciales $f(x)$.

En esta sección analizamos los problemas de flujo de calor donde los extremos del alambre están aislados o se mantienen a una temperatura constante no nula. (Esto último implica condiciones no homogéneas en la frontera.) También analizaremos el problema cuando una fuente de calor agrega calor al alambre. (Esto produce una ecuación diferencial ordinaria no homogénea.) También analizamos el problema de flujo de calor en una placa rectangular, que conduce al tema de series de Fourier dobles. Concluimos esta sección con un análisis de la existencia y unicidad de las soluciones al problema de flujo de calor.

En el modelo de flujo de calor en un alambre uniforme, reemplacemos la hipótesis de que los extremos del alambre de mantienen a temperatura constante nula y en vez de ello, supongamos que los extremos del alambre están *aislados*, es decir, no fluye calor hacia afuera (o hacia adentro) por los extremos del alambre. El principio de conducción del calor (véase la sección 10.1) implica que el gradiente de temperatura debe anularse en estos extremos, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ .$$

En el siguiente ejemplo obtenemos la solución formal del problema de flujo de calor con estas condiciones en la frontera.

EJEMPLO 1 Determinar una solución formal del problema de flujo de calor descrito por el problema con valores iniciales y en la frontera

$$\textbf{(6)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad 0 < x < L \ , \qquad t > 0 \ ,$$

$$\textbf{(7)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

$$\textbf{(8)} \qquad u(x,0) = f(x) \ , \qquad 0 < x < L \ .$$

SOLUCIÓN Usamos el método de separación de variables para suponer que

$$u(x,t) = X(x)T(t) \ .$$

Al sustituir en la ecuación (6) y separar variables como en la sección 10.2 (véase la ecuación (5) de la página 580), obtenemos las dos ecuaciones

$$\textbf{(9)} \qquad X''(x) - KX(x) = 0 \ ,$$

$$\textbf{(10)} \qquad T'(t) - \beta KT(t) = 0 \ ,$$

donde K es cierta constante. Las condiciones en la frontera (7) se convierten en

$$X'(0)T(t) = 0 \quad \text{y} \quad X'(L)T(t) = 0 \ .$$

Para que estas ecuaciones se cumplan para toda $t > 0$, tenemos que $T(t) \equiv 0$, lo que implica que $u(x,t) \equiv 0$, o bien

$$\textbf{(11)} \qquad X'(0) = X'(L) = 0 \ .$$

Al combinar las condiciones en la frontera (11) con la ecuación (9) obtenemos el problema con valores en la frontera

$$\textbf{(12)} \qquad X''(x) - KX(x) = 0 \ ; \qquad X'(0) = X'(L) = 0 \ ,$$

donde K puede ser cualquier constante.

Para determinar las soluciones no triviales de (12), comenzamos con la ecuación auxiliar $r^2 - K = 0$. Cuando $K > 0$, argumentos similares a los utilizados en la sección 10.2 muestran que no hay soluciones no triviales de (12).

Cuando $K = 0$, la ecuación auxiliar tiene la raíz repetida 0 y una solución general de la ecuación diferencial es

$$X(x) = A + Bx .$$

Las condiciones en la frontera en (12) se reducen a $B = 0$ con A arbitraria. Así, para $K = 0$, las soluciones no triviales de (12) son de la forma

$$X(x) = c_0 ,$$

donde $c_0 = A$ es una constante arbitraria no nula.

Cuando $K < 0$, la ecuación auxiliar tiene las raíces $r = \pm i\sqrt{-K}$. Así, una solución general de la ecuación diferencial en (12) es

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-K}x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-K}x .$$

Las condiciones en la frontera en (12) conducen al sistema

$$\begin{aligned} \sqrt{-K}C_2 &= 0 , \\ -\sqrt{-K}C_1 \operatorname{sen} \sqrt{-K}L + \sqrt{-K}C_2 \cos \sqrt{-K}L &= 0 . \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C_2 = 0$ y el sistema se reduce a resolver $C_1 \operatorname{sen} \sqrt{-K}L = 0$. Como $\operatorname{sen} \sqrt{-K}L = 0$ sólo cuando $\sqrt{-K}L = n\pi$, donde n es un entero, obtenemos una solución no trivial sólo cuando $\sqrt{-K} = n\pi/L$ o $K = -(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Además, las soluciones no triviales (funciones propias) X_n correspondientes al valor propio $K = -(n\pi/L)^2$ están dadas por

(13) $$X_n(x) = c_n \cos \frac{n\pi x}{L} ,$$

donde las c_n son constantes arbitrarias no nulas. De hecho, la fórmula (13) también es válida para $n = 0$, pues $K = 0$ tiene las funciones propias $X_0(x) = c_0$.

Una vez determinado que $K = -(n\pi/L)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, consideremos la ecuación (10) para tales K:

$$T'(t) + \beta(n\pi/L)^2 T(t) = 0 .$$

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, la solución general es

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} ,$$

donde las b_n son constantes arbitrarias. Al combinar esto con la ecuación (13), obtenemos las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left[c_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right] \left[b_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \right] ,$$

$$u_n(x, t) = a_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \cos \frac{n\pi x}{L} ,$$

donde $a_n = b_n c_n$ es, de nuevo, una constante arbitraria.

Si consideramos una serie infinita de estas funciones, obtenemos

$$\textbf{(14)} \qquad u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \cos\frac{n\pi x}{L} ,$$

que será una solución de (6)-(7) siempre que la serie tenga el comportamiento de convergencia adecuado. Observe que en (14) hemos alterado el término constante y lo hemos escrito como $a_0/2$, produciendo así la forma canónica para los desarrollos de cosenos.

Supongamos que una solución de (6)-(7) está dada por la serie en (14); sustituyendo esto en la condición inicial (8), obtenemos

$$\textbf{(15)} \qquad u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f(x) , \qquad 0 < x < L .$$

Esto significa que si elegimos a_n como los coeficientes en la serie de cosenos de Fourier para f,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

entonces $u(x, t)$ dada en (14) será una **solución formal** del problema de flujo de calor (6)-(8). De nuevo, si este desarrollo converge a una función continua con segundas derivadas parciales continuas, entonces la solución formal es una solución genuina. ■

Observe que los términos individuales en la series (4) y (14) son soluciones genuinas de la ecuación del calor y las condiciones en la frontera asociadas (pero no de la condición inicial, por supuesto). Estas soluciones se llaman los **modos** del sistema. Observe que el factor de tiempo $e^{-\beta(n\pi/L)2t}$ decae más rápido para los modos más oscilatorios (n grande). Esto tiene sentido físico; un patrón de temperatura con muchas franjas calientes y frías alternantes ordenadas de manera muy cercana entre sí se equilibrará más rápido que un patrón más uniforme. Véase la figura 10.13 de la página 640.

Una buena forma de expresar cómo “funciona” la separación de variables es la siguiente: el perfil inicial de temperatura $f(x)$ se descompone en modos a través del análisis de Fourier (las ecuaciones (5) o (15)). Entonces cada modo se relaciona con un factor de decaimiento con respecto del tiempo (ecuaciones (4) o (14)) y evoluciona en el tiempo de acuerdo con esto.

Cuando los extremos del alambre se mantienen a 0°C o cuando están aislados, las condiciones en la frontera son **homogéneas**. Pero cuando los extremos del alambre se mantienen a temperaturas constantes distintas de cero, es decir,

$$\textbf{(16)} \qquad u(0, t) = U_1 \quad \text{y} \quad u(L, t) = U_2 , \qquad t > 0 ,$$

entonces las condiciones en la frontera son **no homogéneas**.

Por nuestra experiencia con los problema de vibración en la sección 4.12, esperamos que la solución del problema de flujo de calor con condiciones no homogéneas en la frontera conste de una **solución de estado estacionario** $v(x)$ que satisfaga las condiciones no homogéneas en la frontera en (16) más una **solución transitoria** $w(x, t)$; es decir,

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) ,$$

donde $w(x, t)$ y sus derivadas parciales tienden a cero cuando $t \to \infty$. La función $w(x, t)$ satisfará entonces condiciones homogéneas en la frontera, como muestra el siguiente ejemplo.

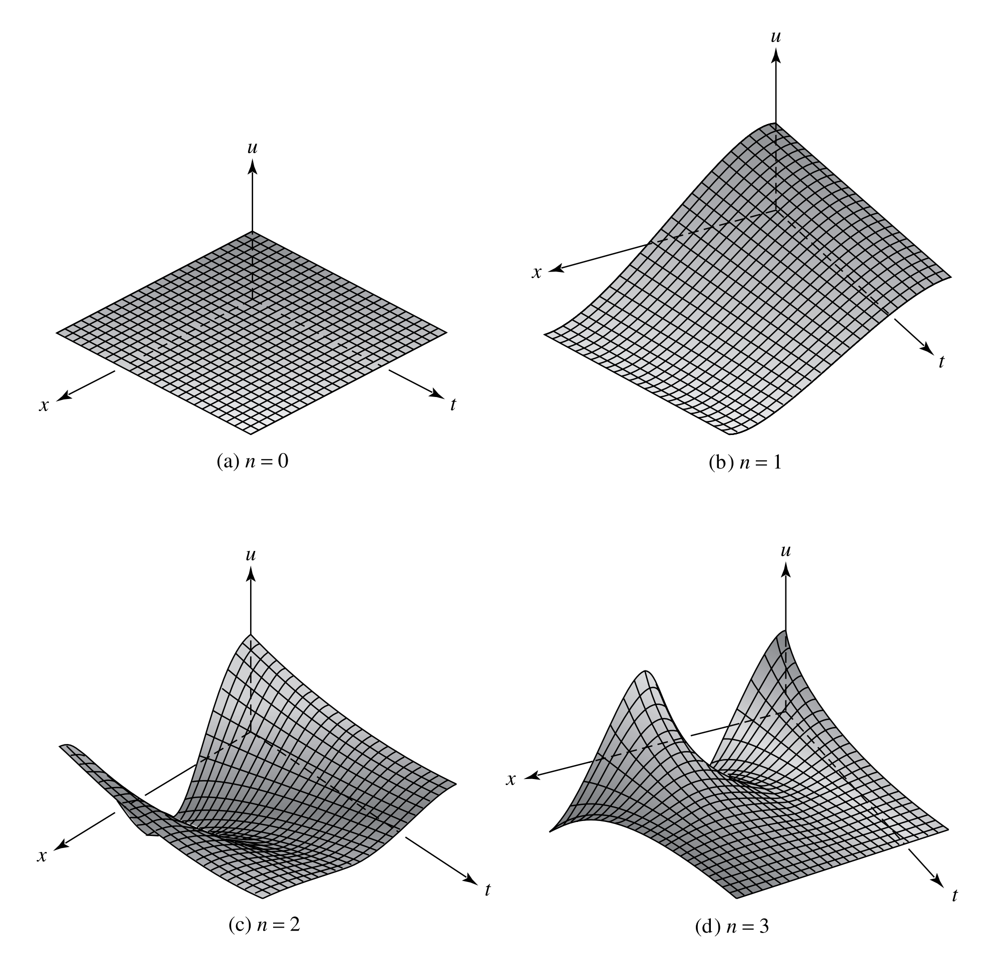


Figura 10.13 Modos para la ecuación (14)

EJEMPLO 2 Determinar una solución formal del problema de flujo de calor descrito mediante el problema con valores iniciales y en la frontera

(17) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad 0 < x < L\,, \qquad t > 0\,,$$

(18) $$u(0, t) = U_1\,, \qquad u(L, t) = U_2\,, \qquad t > 0\,,$$

(19) $$u(x, 0) = f(x)\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

SOLUCIÓN Supongamos que la solución $u(x, t)$ consta de una solución de estado estacionario $v(x)$ y una solución transitoria $w(x, t)$; es decir,

(20) $$u(x, t) = v(x) + w(x, t)\,.$$

Al sustituir esta forma de $u(x, t)$ en las ecuaciones (17)-(19) obtenemos

$$\textbf{(21)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \beta v''(x) + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ , \qquad 0 < x < L\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(22)} \qquad v(0) + w(0, t) = U_1\ , \qquad v(L) + w(L, t) = U_2\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(23)} \qquad v(x) + w(x, 0) = f(x)\ , \qquad 0 < x < L\ .$$

Si hacemos $t \to \infty$ en (21)-(22), suponiendo que $w(x, t)$ es una solución transitoria, obtenemos para el estado estacionario el problema con valores en la frontera

$$v''(x) = 0\ , \qquad 0 < x < L\ ,$$
$$v(0) = U_1\ , \qquad v(L) = U_2\ .$$

De aquí determinamos que $v(x) = Ax + B$, y elegimos A y B de modo que las condiciones en la frontera se satisfagan, de donde

$$\textbf{(24)} \qquad v(x) = U_1 + \frac{(U_2 - U_1)x}{L}$$

es la solución de estado estacionario.

Con esta elección de $v(x)$, el problema con valores iniciales y en la frontera (21)-(23) se reduce al siguiente problema con valores iniciales y en la frontera para $w(x, t)$:

$$\textbf{(25)} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ , \qquad 0 < x < L\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(26)} \qquad w(0, t) = w(L, t) = 0\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(27)} \qquad w(x, 0) = f(x) - U_1 - \frac{(U_2 - U_1)x}{L}\ , \qquad 0 < x < L\ .$$

Recuerde que una solución formal de (25)-(27) está dada por la ecuación (4). Por tanto,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\ ,$$

donde c_n son los coeficientes del desarrollo en serie de senos de Fourier

$$f(x) - U_1 - \frac{(U_2 - U_1)x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\ .$$

Por consiguiente, la solución formal de (17)-(19) es

$$\textbf{(28)} \qquad u(x, t) = U_1 + \frac{(U_2 - U_1)x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\ ,$$

con

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - U_1 - \frac{(U_2 - U_1)x}{L} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx\ . \ ■$$

En el siguiente ejemplo consideramos el problema de flujo de calor cuando tenemos una fuente de calor independiente del tiempo. (Recuerde la deducción en la sección 10.1.)

EJEMPLO 3 Determinar una solución formal del problema de flujo de calor descrito por el problema con valores iniciales y en la frontera

$$\textbf{(29)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x) , \qquad 0 < x < L , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(30)} \qquad u(0, t) = U_1 , \qquad u(L, t) = U_2 , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(31)} \qquad u(x, 0) = f(x) , \qquad 0 < x < L .$$

SOLUCIÓN Primero suponemos que la solución constante de una solución de estado estacionario $v(x)$ y una solución transitoria $w(x, t)$, a saber,

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) ,$$

donde $w(x, t)$ y sus derivadas parciales tienden a cero cuando $t \to \infty$. Al sustituir esta forma de $u(x, t)$ en (29)-(31) se llega a

$$\textbf{(32)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \beta v''(x) + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P(x) , \qquad 0 < x < L , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(33)} \qquad v(0) + w(0, t) = U_1 , \qquad v(L) + w(L, t) = U_2 , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(34)} \qquad v(x) + w(x, 0) = f(x) , \qquad 0 < x < L .$$

Al hacer $t \to \infty$ en (32)-(33), obtenemos el problema con valores en la frontera para el estado estacionario,

$$v''(x) = -\frac{1}{\beta} P(x) , \qquad 0 < x < L ,$$

$$v(0) = U_1 , \qquad v(L) = U_2 .$$

Podemos obtener la solución de este problema con valores en la frontera mediante dos integraciones, usando las condiciones en la frontera para determinar las constantes de integración. El lector puede verificar que la solución está dada por la fórmula

$$\textbf{(35)} \qquad v(x) = \left[U_2 - U_1 + \int_0^L \left(\int_0^z \frac{1}{\beta} P(s) ds \right) dz \right] \frac{x}{L} + U_1 - \int_0^x \left(\int_0^z \frac{1}{\beta} P(s) ds \right) dz .$$

Con esta elección de $v(x)$, vemos que el problema con valores iniciales y en la frontera (32)-(34) se reduce al siguiente problema con valores iniciales y en la frontera para $w(x, t)$:

$$\textbf{(36)} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , \qquad 0 < x < L , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(37)} \qquad w(0, t) = w(L, t) = 0 , \qquad t > 0 ,$$

$$\textbf{(38)} \qquad w(x, 0) = f(x) - v(x) , \qquad 0 < x < L ,$$

donde $v(x)$ está dado por la fórmula (35). Como antes, la solución de este problema con valores iniciales y en la frontera es

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} , \tag{39}$$

donde debemos determinar c_n a partir del desarrollo en serie de senos de Fourier de $f(x) - v(x)$:

$$f(x) - v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} . \tag{40}$$

Así, la solución formal de (29)-(31) está dada por

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) ,$$

donde $v(x)$ aparece en (35) y $w(x, t)$ queda determinada por (39)-(40). ■

El método de separación de variables también se puede aplicar a problemas de dimensión mayor. Por ejemplo, considere el problema de flujo de calor en una placa rectangular con lados $x = 0$, $x = L$, $y = 0$ y $y = W$. Si los dos lados $y = 0$, $y = W$ se mantienen a la temperatura constante de 0°C y los dos lados $x = 0$, $x = L$ están perfectamente aislados, entonces el flujo de calor queda descrito mediante el problema con valores iniciales y en la frontera del siguiente ejemplo (véase la figura 10.14).

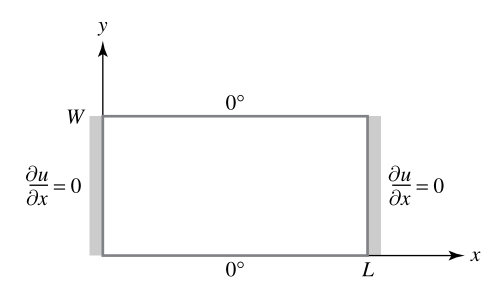


Figura 10.14 Placa con lados aislados

EJEMPLO 4 Determinar una solución formal $u(x, y, t)$ del problema con valores iniciales y en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} , \quad 0 < x < L , \quad 0 < y < W , \quad t > 0 , \tag{41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0 , \quad 0 < y < W , \quad t > 0 , \tag{42}$$

$$u(x, 0, t) = u(x, W, t) = 0 , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 , \tag{43}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) , \quad 0 < x < L , \quad 0 < y < W . \tag{44}$$

SOLUCIÓN Si suponemos una solución de la forma $u(x, y, t) = V(x, y)T(t)$, entonces la ecuación (41) se separa en las dos ecuaciones

$$T'(t) - \beta K T(t) = 0 , \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x, y) - KV(x, y) = 0 , \tag{46}$$

donde K puede ser cualquier constante. Para resolver la ecuación (46), de nuevo usamos separación de variables. Ahora suponemos que $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Esto nos permite separar la ecuación (46) en las dos ecuaciones

(47) $X''(x) - JX(x) = 0$,

(48) $Y''(y) + (J - K)Y(y) = 0$,

donde J puede ser cualquier constante (véase el problema 29 en los ejercicios 10.2).

Para determinar $X(x)$, observamos que las condiciones en la frontera en (42), en términos de las variables separadas, se convierten en

$$X'(0)Y(y)T(t) = X'(L)Y(y)T(t) = 0 , \qquad 0 < y < W , \qquad t > 0 .$$

Por tanto, para obtener una solución no trivial, debemos tener

(49) $X'(0) = X'(L) = 0$.

El problema con valores en la frontera para X dada en las ecuaciones (47) y (49) fue resuelto en el ejemplo 1 (véanse las ecuaciones (12) y (13)). En este caso, $J = -(m\pi/L)^2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, y

$$X_m(x) = c_m \cos\frac{m\pi x}{L} ,$$

donde las c_n son arbitrarias.

Para determinar $Y(y)$, primero observamos que las condiciones en la frontera en (43) se convierten en

(50) $Y(0) = Y(W) = 0$.

A continuación, sustituimos $J = -(m\pi/L)^2$ en la ecuación (48) para obtener

$$Y''(y) - \left(K + (m\pi/L)^2\right)Y(y) = 0 ,$$

lo que escribimos como

(51) $Y''(y) - EY(y) = 0$,

donde $E = K + (m\pi/L)^2$. Ya hemos resuelto el problema con valores en la frontera para Y, consistente en (50)-(51). En la sección 10.2 (véanse las ecuaciones (7) y (9), páginas 605 y 606) mostramos que $E = -(n\pi/W)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, y las soluciones no triviales están dadas por

$$Y_n(y) = a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W} ,$$

donde las a_n son arbitrarias.

Como $K = E - (m\pi/L)^2$, tenemos que

$$K = -(n\pi/W)^2 - (m\pi/L)^2 , \qquad m = 0, 1, 2, \ldots , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Al sustituir K en la ecuación (45), podemos determinar $T(t)$ y obtener

$$T_{mn}(t) = b_{mn}e^{-(m^2/L^2+n^2/W^2)\beta\pi^2 t} .$$

Al sustituir X_m, Y_n y T_{mn}, tenemos

$$u_{mn}(x, y, t) = \left(c_m \cos\frac{m\pi x}{L}\right)\left(a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W}\right)\left(b_{mn}e^{-(m^2/L^2+n^2/W^2)\beta\pi^2 t}\right),$$

$$u_{mn}(x, y, t) = a_{mn}e^{-(m^2/L^2+n^2/W^2)\beta\pi^2 t}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W},$$

donde $a_{mn} := a_n b_{mn} c_m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots$) son constantes arbitrarias.

Si ahora consideramos una serie infinita doble de tales funciones, obtenemos la serie formal

(52) $$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}e^{-(m^2/L^2+n^2/W^2)\beta\pi^2 t}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W}.$$

Ahora podemos aplicar las condiciones iniciales (44). Al hacer $t = 0$, obtenemos

(53) $$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W}.$$

Ésta es una **serie doble de Fourier**.† Las fórmulas para los coeficientes a_{mn} se obtienen utilizando dos veces las condiciones de ortogonalidad. Supongamos que se cumple (53) y que podemos integrar término a término; multiplicamos cada lado por $\cos(p\pi x/L)\operatorname{sen}(q\pi y/W)$ e integramos con respecto de x y y:

$$\int_0^L\int_0^W f(x, y)\cos\frac{p\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{q\pi y}{W}\,dy\,dx$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\int_0^L\int_0^W \cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W}\cos\frac{p\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{q\pi y}{W}\,dy\,dx.$$

De acuerdo con las condiciones de ortogonalidad, cada integral de la derecha se anula, excepto cuando $m = p$ y $n = q$; así,

$$\int_0^L\int_0^W f(x, y)\cos\frac{p\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{q\pi y}{W}\,dy\,dx$$
$$= a_{pq}\int_0^L\cos^2\frac{p\pi x}{L}\,dx\int_0^W\operatorname{sen}^2\frac{q\pi y}{W}\,dy = \begin{cases}\dfrac{LW}{4}a_{pq}, & p \neq 0,\\[2mm] \dfrac{LW}{2}a_{pq}, & p = 0.\end{cases}$$

Por consiguiente,

(54) $$a_{0q} = \frac{2}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x, y)\operatorname{sen}\frac{q\pi y}{W}\,dy\,dx, \qquad q = 1, 2, 3, \ldots,$$

† Para un análisis de las series dobles de Fourier, véase *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, por Tyn Myint-U (Elsevier North Holland, Inc., Nueva York, 1980), sección 5.14.

y para $p \geq 1, q \geq 1$,

(55) $$a_{pq} = \frac{4}{LW}\int_0^L \int_0^W f(x, y) \cos\frac{p\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{q\pi y}{W}\, dy\, dx .$$

Por último, la solución del problema con valores iniciales y en la frontera (41)-(44) está dada por la ecuación (52), donde los coeficientes quedan determinados por las ecuaciones (54) y (55). ■

Existencia y unicidad de soluciones

En los ejemplos que hemos estudiado en esta sección y en la sección 10.2 logramos obtener soluciones formales, en el sentido de que podíamos expresar la solución en términos de un desarrollo en serie que consta de exponenciales, senos y cosenos. Para demostrar que estas series convergen a soluciones genuinas, necesitamos algunos resultados acerca de la convergencia de series de Fourier y resultados del análisis real relativos a la convergencia uniforme. No entraremos en detalles, pero el lector puede consultar la sección 6.5 del texto de Tyn Myint-U (véase la nota de pie de página 621) para ver una demostración de la existencia de una solución al problema de flujo de calor analizado en las secciones 10.1 y 10.2. (También ahí se da una demostración de la unicidad.)

Como sería de esperar, podemos usar las series de Fourier y el método de separación de variables para obtener "soluciones" cuando los datos iniciales son discontinuos, pues las soluciones formales sólo requieren la existencia de una serie de Fourier convergente. Esto nos permite estudiar problemas idealizados, donde las condiciones iniciales no coinciden con las condiciones en la frontera o las condiciones iniciales implican una discontinuidad de salto. Por ejemplo, podemos suponer que en un principio la mitad del alambre tiene una temperatura, mientras que la otra mitad tiene una temperatura distinta; es decir,

$$f(x) = \begin{cases} U_1 , & 0 < x < L/2 , \\ U_2 , & L/2 < x < L . \end{cases}$$

La solución formal que obtendremos tiene sentido para $0 < x < L$, $t > 0$, pero debemos tener cuidado al interpretar los resultados cerca de los puntos de discontinuidad $x = 0$, $L/2$ y L.

La cuestión de la unicidad de la solución del problema de flujo de calor se puede responder de varias formas. Uno puede estar tentado a decir que el método de separación de variables proporciona *fórmulas* para las soluciones y que por tanto hay una única solución. Sin embargo, esto *no* excluye la posibilidad de que haya soluciones que no puedan obtenerse mediante el método de separación de variables.

Ciertas consideraciones físicas nos indican que la temperatura *máxima* a lo largo de un alambre no se incrementa de manera espontánea si no hay fuentes de calor que lo modifiquen. De hecho, si los objetos calientes pudieran extraer calor de los objetos fríos sin intervención externa, violaríamos la segunda ley de termodinámica. Así, ningún punto en un alambre no calentado alcanzará una temperatura más alta que su temperatura máxima inicial. Este tipo de afirmaciones se llaman **principios del máximo** y se pueden demostrar matemáticamente para la ecuación del calor y la ecuación de Laplace. Uno de tales resultados es el siguiente.†

---

†Para un análisis de los principios del máximo y sus aplicaciones, véase *Maximum Principles in Differential Equations*, por M. H. Protter y H. F. Weinberger (Springer-Verlag, Nueva York, 1984).

PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR

Teorema 6. Sea $u(x, t)$ una función continuamente diferenciable que satisface la ecuación del calor

(56) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad 0 < x < L\ , \qquad t > 0\ ,$$

y las condiciones en la frontera

(57) $$u(0, t) = u(L, t) = 0\ , \qquad t > 0\ .$$

Entonces $u(x, t)$ alcanza su valor máximo en $t = 0$, para alguna x en $[0, L]$, es decir,

$$\max_{\substack{t \geq 0 \\ 0 \leq x \leq L}} u(x, t) = \max_{0 \leq x \leq L} u(x, 0)\ .$$

Podemos usar el principio del máximo para mostrar que el problema de flujo de calor tiene una única solución.

UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Teorema 7. El problema con valores iniciales y en la frontera

(58) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad 0 < x < L\ , \qquad t > 0\ ,$$

(59) $$u(0, t) = u(L, t) = 0\ , \qquad t > 0\ ,$$

(60) $$u(x, 0) = f(x)\ , \qquad 0 < x < L\ ,$$

tiene a lo más una solución continuamente diferenciable.

Demostración. Supongamos que $v(x, t)$ y $v(x, t)$ son funciones continuamente diferenciables que satisfacen el problema con valores iniciales y en la frontera (58)-(60). Sea $w = u - v$. Ahora, w es una solución continuamente diferenciable del problema con valores en la frontera (56)-(57). Por el principio del máximo, w debe alcanzar su máximo en $t = 0$, y como

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - f(x) = 0\ ,$$

tenemos que $w(x, t) \leq 0$. Por lo tanto, $u(x, t) \leq v(x, t)$ para toda $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$. Un argumento similar con $\hat{w} = v - u$ implica que $v(x, t) \leq u(x, t)$. Por lo tanto, debemos tener $u(x, t) = v(x, t)$ para toda $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$. Así, existe a lo más una solución continuamente diferenciable del problema (58)-(60). ■

EJERCICIOS 10.5

En los problemas 1 a 10, determine una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera dado.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
$u(0, t) = u(1, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = (1 - x)x^2$, $0 < x < 1$.

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = x^2$, $0 < x < \pi$.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = x$, $0 < x < \pi$.

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = x(1 - x)$, $0 < x < 1$.

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = e^x$, $0 < x < \pi$.

6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = 1 - \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$.

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = 5$, $u(\pi, t) = 10$, $t > 0$,
$u(x, 0) = \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 5x$, $0 < x < \pi$.

8. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 3\pi$, $t > 0$,
$u(x, 0) = 0$, $0 < x < \pi$.

9. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-x}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = \operatorname{sen} 2x$, $0 < x < \pi$.

10. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$.

11. Determine una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < \pi$.

12. Determine una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < \pi$.

13. Determine una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $t > 0$,
$u(x, 0) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$.

14. Determine una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 1$, $t > 0$,
$u(x, 0) = 1$, $0 < x < \pi$.

En los problemas 15 a 18, determine una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ , \ 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi \ , \ t > 0 \ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y, t) = 0 \ , \ 0 < y < \pi \ , \ t > 0 \ ,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0 \ , \quad 0 < x < \pi \ , \quad t > 0 \ ,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \ , \quad 0 < x < \pi \ , \quad 0 < y < \pi \ ,$$

para la función dada $f(x, y)$.

15. $f(x, y) = \cos 6x \operatorname{sen} 4y - 3 \cos x \operatorname{sen} 11y$.

16. $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y + 4 \cos 2x \operatorname{sen} y - 3 \cos 3x \operatorname{sen} 4y$.

17. $f(x, y) = y$.

18. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

19. Difusión química. La difusión química a través de una capa delgada queda descrita mediante la ecuación

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - LC \ ,$$

donde $C(x, t)$ es la concentración en moles/cm^3, la difusividad k es una constante positiva con unidades cm^2/s, y $L > 0$ es una tasa de consumo con unidades s^{-1}. Suponga que las condiciones en la frontera son

$$C(0, t) = C(a, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

y que la concentración inicial está dada por

$$C(x, 0) = f(x) \ , \qquad 0 < x < a \ .$$

Use el método de separación de variables para determinar formalmente la concentración $C(x, t)$. ¿Qué ocurre con la concentración cuando $t \to +\infty$?

10.6 LA ECUACIÓN DE ONDA

En la sección 10.2 presentamos un modelo para el movimiento de una cuerda vibrante. Si $u(x, t)$ representa el desplazamiento (deflexión) de la cuerda y los extremos de la cuerda se mantienen fijos, entonces el movimiento de la cuerda queda descrito mediante el problema con valores iniciales y en la frontera

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad 0 < x < L \ ,$$

(2) $$u(0, t) = u(L, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

(3) $$u(x, 0) = f(x) \ , \qquad 0 < x < L \ ,$$

(4) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \ , \qquad 0 < x < L \ .$$

La ecuación (1) se llama la **ecuación de onda**.

La constante α^2 que aparece en (1) es estrictamente positiva y depende de la densidad lineal y la tensión de la cuerda. Las condiciones en la frontera en (2) reflejan el hecho de que la cuerda se mantiene fija en los dos extremos $x = 0$ y $x = L$.

Las ecuaciones (3) y (4) especifican, respectivamente, el desplazamiento inicial y la velocidad inicial de cada punto sobre la cuerda. Para que las condiciones iniciales y en la frontera sean consistentes, suponemos que $f(0) = f(L) = 0$ y $g(0) = g(L) = 0$.

En la sección 10.2 usamos el método de separación de variables para mostrar que una solución formal de (1)-(4) está dada por (véanse las ecuaciones (24)-(26) de las páginas 585-586)

(5) $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi\alpha}{L}t + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi\alpha}{L}t \right] \qquad \frac{n\pi x}{L} \ ,$$

donde a_n y b_n quedan determinadas mediante las series de senos de Fourier

$$\textbf{(12)} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \, ,$$

Véase la figura 10.15 para un bosquejo de las sumas parciales de (5).

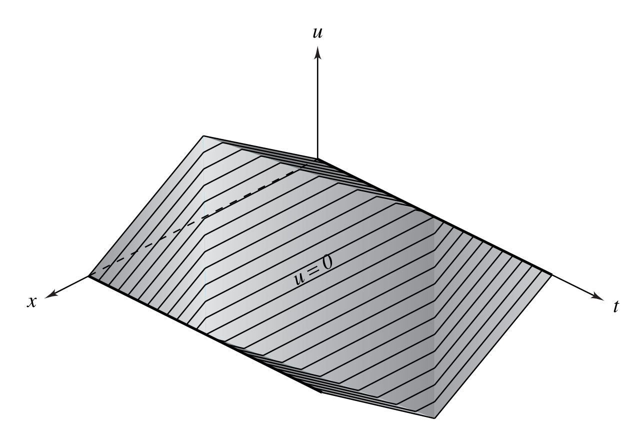


Figura 10.15 Sumas parciales para la ecuación (5) con $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$ y $g(x) = 0$

Cada término (o modo) en el desarrollo (5) se puede ver como una **onda estacionaria** (una onda que vibra en su lugar, sin movimientos laterales a lo largo de la cuerda). Por ejemplo, el primer término,

$$\left(a_1 \cos\frac{\pi\alpha}{L}t + b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{L}t\right)\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \, ,$$

es una función de forma senoidal $\operatorname{sen}(\pi x/L)$ multiplicada por una amplitud variable con el tiempo. El segundo término también es un senoide $\operatorname{sen}(2\pi x/L)$ con una amplitud variable con el tiempo. En el último caso, existe un *nodo* a la mitad, en $x = L/2$ que nunca se mueve. Para el n-ésimo término, tenemos un senoide $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ con una amplitud variable con el tiempo y $(n - 1)$ nodos. Esto se ilustra en la figura 10.16. Así, la separación de variables descompone los datos iniciales en senoides o modos (ecuaciones (6)-(7)), asigna a cada modo una frecuencia a la cual vibrar (ecuación (5)) y representa la solución como la superposición de una infinidad de ondas verticales. Los modos con más nodos vibran a mayores frecuencias. Si se elige la configuración inicial de la cuerda de la misma forma que los términos individuales de la solución, podemos activar sólo ese modo.

Los diversos modos de vibración de una cuerda de guitarra son distinguibles por el oído humano por medio de la frecuencia del sonido que generan; distintas frecuencias se disciernen mediante “pasos” diferentes. La frecuencia *fundamental* es la frecuencia del modo más bajo, y los múltiplos enteros de esta frecuencia fundamental se llaman “armónicos”. Un violonchelo y un trombón suenan diferente aunque toquen la misma frecuencia fundamental, como fa sostenido, debido a la diferencia en las intensidades de los armónicos que generan.

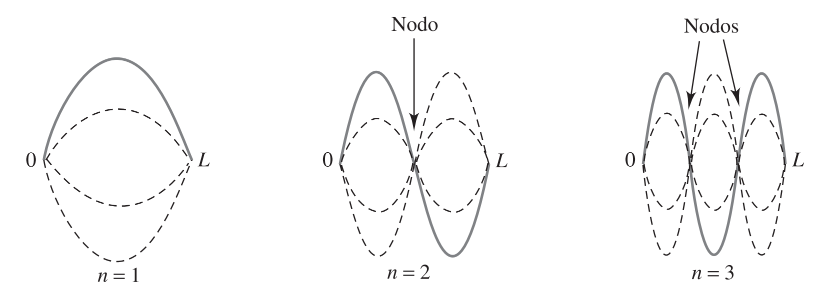


Figura 10.16 Ondas estacionarias. Las amplitudes variables con el tiempo aparecen con líneas punteadas.

Muchos dispositivos de ingeniería operan mejor en algunos modos que en otros. Por ejemplo, ciertos modos se propagan hacia abajo en una guía de ondas o una fibra óptica menos atenuados que los demás. En tales casos, los ingenieros diseñan los sistemas para suprimir los modos no deseados, ya sea dando forma a la excitación inicial o introduciendo dispositivos (como tarjetas de resistencia en una guía de ondas) que amortiguan ciertos modos de manera preferente.

El modo fundamental en una cuerda de guitarra se puede suprimir manteniendo un dedo en contacto ligero con el punto medio, creando con ello un punto estacionario o nodo en ese punto. De acuerdo con la ecuación (5), el paso de la nota se duplica, produciendo una "octava". Este estilo de pulsado, llamado "ejecución de armónicos", se usa con frecuencia en las ejecuciones musicales.

Una característica importante de un dispositivo de ingeniería es el conjunto de frecuencias angulares soportado por sus modos propios (sus "frecuencias propias"). De acuerdo con la ecuación (5), las frecuencias propias de la cuerda vibrante son los armónicos $\omega_n = n\pi\alpha/L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Estas mezclas suenan bien para el oído humano, y disfrutamos de melodías ejecutadas con instrumentos de cuerda. Las frecuencias propias de un tambor no son armónicas (véase el problema 21). Por lo tanto, los tambores se usan para el ritmo, no para la melodía.

Como vimos en la sección anterior, el método de separación de variables se puede usar para resolver problemas con condiciones no homogéneas en la frontera y ecuaciones no homogéneas donde el término de forzamiento es independiente del tiempo. En el siguiente ejemplo consideraremos un problema con un término de forzamiento $h(x, t)$ dependiente del tiempo.

EJEMPLO 1 Para las funciones dadas f, g y h, determine una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera

(8) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t)\ , \qquad 0 < x < L\ , \qquad t > 0\ ,$$

(9) $$u(0, t) = u(L, t) = 0\ , \qquad t > 0\ ,$$

(10) $$u(x, 0) = f(x)\ , \qquad 0 < x < L\ ,$$

(11) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)\ , \qquad 0 < x < L\ .$$

SOLUCIÓN Es claro que las condiciones en la frontera en (9) requieren que la solución se anule para $x = 0$ y $x = L$. Motivados por el hecho de que la solución del sistema homogéneo correspondiente (1)-(4) consta de una superposición de ondas verticales, tratemos de hallar una solución de (8)-(11) de la forma

(12) $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\ ,$$

donde debemos determinar las funciones $u_n(t)$.

Para cada t fija, podemos calcular la serie de senos de Fourier para $h(x, t)$. Si suponemos que la serie es convergente a $h(x, t)$, entonces

(13) $$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} ,$$

donde el coeficiente $h_n(t)$ está dado por (véase la ecuación (6) en la página 609)

$$h_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx , \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Si la serie en (13) tiene las propiedades adecuadas de convergencia, entonces podemos sustituir (12) y (13) en la ecuación (8) para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n''(t) + \left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 u_n(t) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} .$$

Al igualar los coeficientes de cada serie (¿por qué?), tenemos

$$u_n''(t) + \left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 u_n(t) = h_n(t) .$$

Ésta es una ecuación no homogénea con coeficientes constantes, que se puede resolver mediante variación de parámetros. El lector debe verificar que

$$u_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi\alpha}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\alpha}{L} t + \frac{L}{n\pi\alpha} \int_0^t h_n(s) \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi\alpha}{L}(t - s) \right] ds$$

(véase el problema 28 de los ejercicios 4.9). Por lo tanto, con esta elección de $u_n(t)$, la serie en (12) es una solución formal de la ecuación diferencial parcial (8).

Como†

$$u_n(0) = a_n \quad \text{y} \quad u_n'(0) = b_n \left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right) ,$$

al sustituir (12) en las condiciones iniciales (10)-(11) se llega a

(14) $$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} ,$$

(15) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} .$$

Así, si elegimos a_n y b_n de modo que se cumplan las ecuaciones (14) y (15), una solución formal de (8)-(11) está dada por

(16) $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi\alpha}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\alpha}{L} t + \frac{L}{n\pi\alpha} \int_0^t h_n(s) \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi\alpha}{L}(t - s) \right] ds \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} . \ \blacksquare$$

†Para calcular $u_n'(0)$, usamos el hecho de que $\frac{d}{dt} \int_0^t G(s, t) ds = G(t, t) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}(s, t) ds$.

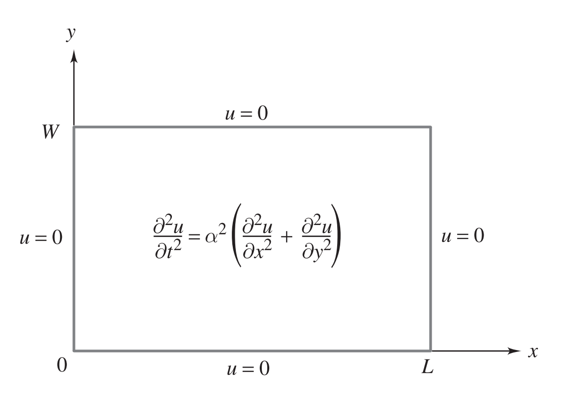


Figura 10.17 Membrana vibrante

El método de separación de variables también se usa para resolver problemas con valores iniciales y en la frontera para la ecuación de onda en dimensiones mayores. Por ejemplo, una membrana rectangular vibrante de largo L y ancho W (véase la figura 10.17) queda descrita mediante el siguiente problema con valores iniciales y en la frontera para $u(x, y, t)$:

(17) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W, \quad t > 0,$$

(18) $$u(0, y, t) = u(L, y, t) = 0, \quad 0 < y < W, \quad t > 0,$$

(19) $$u(x, 0, t) = u(x, W, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

(20) $$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W,$$

(21) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W.$$

Usamos un argumento similar al dado para el problema de flujo de calor en una placa rectangular (ejemplo 4 de la sección 10.5) para ver que el problema con valores iniciales y en la frontera (17)-(21) tiene una solución formal

(22) $$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{mn}\cos\left(\sqrt{\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}}\,\alpha\pi t\right) + b_{mn}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}}\,\alpha\pi t\right)\right\}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W},$$

donde las constantes a_{mn} y b_{mn} quedan determinadas mediante las series dobles de Fourier

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W},$$

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\pi\sqrt{\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}}\, b_{mn}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{W}.$$

En particular,

(23) $$a_{mn} = \frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x, y)\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\text{sen}\frac{n\pi y}{W}dy\,dx \ ,$$

(24) $$b_{mn} = \frac{4}{LW\pi\alpha\sqrt{\dfrac{m^2}{L^2}+\dfrac{n^2}{W^2}}}\int_0^L\int_0^W g(x, y)\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\text{sen}\frac{n\pi y}{W}dy\,dx \ .$$

Dejaremos la deducción de esta solución como ejercicio (véase el problema 19).

Ya hemos mencionado que la solución del problema de la cuerda vibrante (1)-(4) consta de una superposición de ondas verticales. También hay "ondas viajeras" asociadas a la ecuación de onda. Las ondas viajeras surgen de manera natural en el caso de la solución de d'Alembert para la ecuación de onda de una cuerda "infinita".

Para obtener la solución de d'Alembert de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,$$

usamos el cambio de variables

$$\psi = x + \alpha t\,, \qquad \eta = x - \alpha t\,.$$

Si u tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces $\partial u/\partial x = \partial u/\partial\psi + \partial u/\partial\eta$ y $\partial u/\partial t = \alpha(\partial u/\partial\psi - \partial u/\partial\eta)$, de donde obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\psi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\psi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right\} \ .$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación de onda y simplificar tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\psi\partial\eta} = 0 \ .$$

Podemos resolver esta ecuación directamente, integrando primero con respecto de ψ para obtener

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = b(\eta) \ ,$$

donde $b(\eta)$ es una función arbitraria de η; luego integramos con respecto de η para ver que

$$u(\psi, \eta) = A(\psi) + B(\eta) \ ,$$

donde $A(\psi)$ y $B(\eta) = \int b(\eta)\,d\eta$ son funciones arbitrarias. Al sustituir las variables originales x y t tenemos la **solución de d'Alembert**

(25) $$\boldsymbol{u(x, t) = A(x + \alpha t) + B(x - \alpha t)} \ .$$

Podemos verificar fácilmente, con una sustitución directa, que la función $u(x, t)$ dada por la fórmula (25), es en realidad una solución de la ecuación de onda, siempre que A y B sean funciones dos veces diferenciables.

EJEMPLO 2 Usar la fórmula de d'Alembert (25) para hallar una solución del problema con valores iniciales

$$\textbf{(26)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad -\infty < x < \infty\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(27)} \qquad u(x, 0) = f(x)\ , \qquad -\infty < x < \infty\ ,$$

$$\textbf{(28)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)\ , \qquad -\infty < x < \infty\ .$$

SOLUCIÓN La fórmula (25) proporciona una solución de (26), de modo que sólo debemos elegir las funciones A y B de modo que las condiciones iniciales (27)-(28) se cumplan. Para esto necesitamos que

$$\textbf{(29)} \qquad u(x, 0) = A(x) + B(x) = f(x)\ ,$$

$$\textbf{(30)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \alpha A'(x) - \alpha B'(x) = g(x)\ .$$

Al integrar la ecuación (30) desde x_0 hasta x (x_0 arbitrario) y dividir entre α tenemos

$$\textbf{(31)} \qquad A(x) - B(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + C\ ,$$

donde C también es arbitrario. Al resolver el sistema (29) y (31), obtenemos

$$A(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\alpha}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + \frac{C}{2}\ ,$$

$$B(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2\alpha}\int_{x_0}^{x} g(s)ds - \frac{C}{2}\ .$$

Usamos estas funciones en la fórmula (25) para tener

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + \alpha t) + f(x - \alpha t)] + \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{x_0}^{x+\alpha t} g(s)ds - \int_{x_0}^{x\quad \alpha t} g(s)ds\right]\ ,$$

lo que se simplifica como

$$\textbf{(32)} \qquad u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + \alpha t) + f(x - \alpha t)] + \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(s)ds\ . \ \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Determinar la solución del problema con valores iniciales

$$\textbf{(33)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad -\infty < x < \infty\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$\textbf{(34)} \qquad u(x, 0) = \operatorname{sen} x\ , \qquad -\infty < x < \infty\ ,$$

$$\textbf{(35)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1\ , \qquad -\infty < x < \infty\ .$$

SOLUCIÓN Éste es un caso particular del ejemplo anterior, donde $\alpha = 2$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 1$. Al sustituir en (32), obtenemos la solución

$$\textbf{(36)} \qquad u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x + 2t) + \operatorname{sen}(x - 2t)\right] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x-2t} ds$$
$$= \operatorname{sen} x \cos 2t + t \ . \ \blacksquare$$

Ahora usaremos la fórmula de d'Alembert para mostrar que la solución del problema de la cuerda "infinita" consta de ondas viajeras.

Sea $h(x)$ una función definida en $(-\infty, \infty)$. La función $h(x + a)$, donde $a > 0$, es una traslación de la función $h(x)$, en el sentido de que su "forma" es igual a la de $h(x)$, pero que se ha recorrido a la izquierda en una cantidad a. Esto se ilustra en la figura 10.18 para una función $h(x)$ cuya gráfica consta de un "tope" triangular. Si $t \geq 0$ es un parámetro (digamos, el tiempo), entonces las funciones $h(x + \alpha t)$ representan una familia de funciones con la misma forma pero recorridas más y más hacia la izquierda cuando $t \to \infty$ (figura 10.19). Decimos que $h(x + \alpha t)$ es una **onda viajera** que se mueve hacia la izquierda con velocidad α. De manera similar, $h(x - \alpha t)$ es una onda viajera que se mueve hacia la derecha con velocidad α.

En relación con la fórmula (25), vemos que la solución de $\partial^2 u/\partial t^2 = \alpha^2 \partial^2 u/\partial x^2$ consta de ondas viajeras $A(x + \alpha t)$ que se mueven hacia la izquierda con velocidad α y $B(x - \alpha t)$ que se mueven hacia la derecha con la misma velocidad.

En el caso particular en que la velocidad inicial $g(x) \equiv 0$, tenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x + \alpha t) - f(x - \alpha t)\right] .$$

Por lo tanto, $u(x, t)$ es la suma de las ondas viajeras

$$\frac{1}{2}f(x + \alpha t) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}f(x - \alpha t) .$$

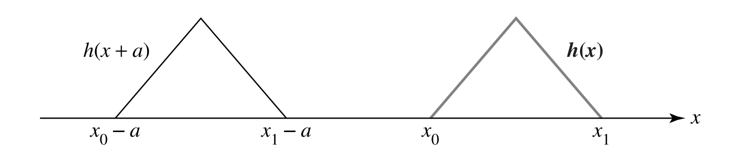


Figura 10.18 Gráficas de $h(x)$ y $h(x + a)$

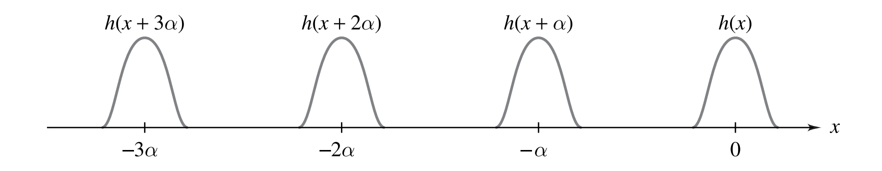


Figura 10.19 Onda viajera

Estas ondas se sobreponen en un principio, y

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) = f(x) \ .$$

Cuando t crece, las dos ondas se alejan entre sí con velocidad 2α. Esto se ilustra en la figura 10.20 para una onda triangular.

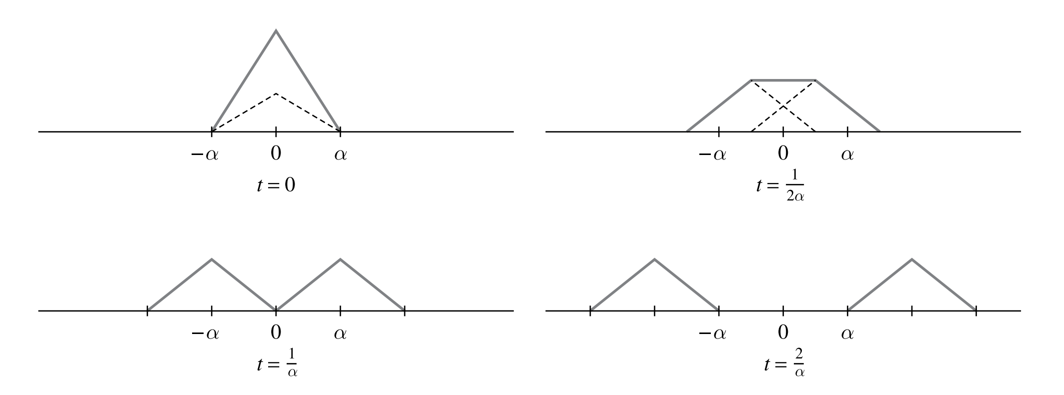


Figura 10.20 Descomposición de un desplazamiento inicial en ondas viajeras

EJEMPLO 4 Expresar la onda estacionaria $\frac{\pi\alpha}{L} t \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$ como una superposición de ondas viajeras.

SOLUCIÓN Usamos una identidad trigonométrica conocida,

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi\alpha}{L} t \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}(x - \alpha t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}(x + \alpha t) \\ &= h(x - \alpha t) + h(x + \alpha t) \ , \end{aligned}$$

donde

$$h(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \ .$$

Esta onda estacionaria surge de sumar una onda que viaja hacia la derecha con una onda de la misma forma, pero que viaja hacia la izquierda. ■

Existencia y unicidad de soluciones

En el ejemplo 1 usamos el método de separación de variables para deducir una solución formal del problema con valores iniciales y en la frontera. Para mostrar que esta serie converge a una solución genuina necesitamos resultados del análisis real, como en el caso de las soluciones formales de la ecuación del calor, en la sección 10.5. En los ejemplos 2 y 3 podemos establecer la validez de la solución de d'Alembert mediante una sustitución directa en el problema con valores iniciales, suponiendo que las funciones iniciales son lo bastante diferenciables. Dejaremos como ejercicio para el lector mostrar que si f tiene una segunda derivada

continua y g tiene primera derivada continua, entonces la solución de d'Alembert es una solución genuina (véase el problema 12).

La cuestión de unicidad de la solución del problema con valores iniciales y en la frontera (1)-(4) se puede responder mediante un **argumento de energía**.

UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LA CUERDA VIBRANTE

Teorema 8. El problema con valores iniciales y en la frontera

(37) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \qquad 0 < x < L , \qquad t > 0 ,$$

(38) $$u(0, t) = u(L, t) = 0 , \qquad t > 0 ,$$

(39) $$u(x, 0) = f(x) , \qquad 0 < x < L ,$$

(40) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) , \qquad 0 < x < L ,$$

tiene a lo más una solución dos veces continuamente diferenciable.

Demostración. Supongamos que $u(x, t)$ y $v(x, t)$ son soluciones dos veces diferenciables de (37)-(40), sea $w(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$. Es fácil verificar que $w(x, t)$ satisface el problema con valores iniciales y en la frontera (37)-(40) con datos iniciales nulos; es decir, para $0 \leq x \leq L$,

(41) $$w(x, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 .$$

Ahora mostraremos que $w(x, t) \equiv 0$ para $0 \leq x \leq L, t \geq 0$.

Si $w(x, t)$ es el desplazamiento de la cuerda vibrante en la posición x y el instante t, entonces (con las unidades adecuadas), la energía total $E(t)$ de la cuerda vibrante en el instante t se define mediante la integral

(42) $$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx .$$

(El primer término del integrando se relaciona con el estiramiento de la cuerda en la posición x y representa la energía potencial. El segundo término es el cuadrado de la velocidad de la cuerda vibrante en x y representa la energía cinética.)

Ahora consideremos la derivada de $E(t)$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \right\} .$$

Como w tiene segundas derivadas parciales continuas (pues u y v las tienen), podemos intercambiar el orden de integración y derivación. Esto implica

(43) $$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \left[\alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] dx .$$

De nuevo, la continuidad de las segundas parciales de w garantizan que las parciales cruzadas son iguales; es decir,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \ .$$

Al combinar este hecho con la integración por partes, obtenemos

(44)
$$\begin{aligned} \int_0^L \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dx &= \int_0^L \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} dx \\ &= \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) \frac{\partial w}{\partial t}(L, t) - \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) \frac{\partial w}{\partial t}(0, t) \\ &\quad - \int_0^L \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial t} dx \ . \end{aligned}$$

Las condiciones en la frontera $w(0, t) = w(L, t) = 0$, $t \geq 0$, implican que $(\partial w/\partial t)(0, t) = (\partial w/\partial t)(L, t) = 0$, $t \geq 0$. Esto reduce la ecuación (44) a

$$\int_0^L \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dx = -\int_0^L \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \ .$$

Al sustituir esto en el primer integrando de (43), tenemos

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \ .$$

Como w satisface la ecuación (37), el integrando se anula para toda x. Así, $dE/dt = 0$, de modo que $E(t) \equiv C$, donde C es una constante. Esto significa que la energía total se conserva dentro de la cuerda vibrante.

La primera condición en la frontera en (41) establece que $w(x, 0) = 0$ para $0 \leq x \leq L$. Por lo tanto, $(\partial w/\partial x)(x,0) = 0$ para $0 < x < L$. Al combinar esto con la segunda condición en la frontera en (41), vemos que cuando $t = 0$, el integrando en (42) se anula para $0 < x < L$. Por lo tanto, $E(0) = 0$. Como $E(t) \equiv C$, debemos tener $C = 0$. Por lo tanto,

(45)
$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \equiv 0 \ .$$

Es decir, la energía total del sistema es igual a cero.

Como el integrando en (45) es no negativo y continuo y la integral es igual a cero, el integrando debe anularse para $0 \leq x \leq L$. Además, el integrando es la suma de los dos cuadrados, de modo que cada término debe ser igual a cero. Por lo tanto,

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = 0$$

para toda $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$. Así, $w(x, t) = K$, donde K es una constante. Desde el punto de vista físico, esto dice que la cuerda no tiene movimiento.

Por último, como w es constante y w se anula cuando $t = 0$, entonces $w(x, t) \equiv 0$. En consecuencia, $u(x, t) = v(x, t)$ y el problema con valores iniciales y en la frontera tiene a lo más una solución. ■

EJERCICIOS 10.6

En los problemas 1 a 4, determine una solución formal del problema de la cuerda vibrante descrito por el problema con valores iniciales y en la frontera dado.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 1$, $\quad t > 0$,
$u(0, t) = u(1, t) = 0$, $\quad t > 0$,
$u(x, 0) = x(1 - x)$, $\quad 0 < x < 1$,
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \operatorname{sen} 7\pi x$, $\quad 0 < x < 1$.

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < \pi$, $\quad t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\quad t > 0$,
$u(x, 0) = \operatorname{sen}^2 x$, $\quad 0 < x < \pi$,
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1 - \cos x$, $\quad 0 < x < \pi$.

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < \pi$, $\quad t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\quad t > 0$,
$u(x, 0) = x^2(\pi - x)$, $\quad 0 < x < \pi$,
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, $\quad 0 < x < \pi$.

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < \pi$, $\quad t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\quad t > 0$,
$u(x, 0) = \operatorname{sen} 4x + 7 \operatorname{sen} 5x$, $\quad 0 < x < \pi$,
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} x , & 0 < x < \pi/2 , \\ \pi - x , & \pi/2 < x < \pi . \end{cases}$$

5. La cuerda pulsada. Una cuerda vibrante queda descrita mediante el problema con valores iniciales y en la frontera (1)-(4). Si la cuerda se levanta hasta una altura h_0 en $x = a$ y se suelta, entonces las condiciones iniciales son
$$f(x) = \begin{cases} h_0 x/a , & 0 < x \le a , \\ h_0(L - x)/(L - a) , & a < x < L , \end{cases}$$
y $g(x) \equiv 0$. Determine una solución formal.

6. La cuerda golpeada. Una cuerda vibrante queda descrita mediante el problema con valores iniciales y en la frontera (1)-(4). Si la cuerda se golpea en $x = a$, entonces las condiciones iniciales se pueden aproximar mediante $f(x) \equiv 0$ y
$$g(x) = \begin{cases} v_0 x/a , & 0 < x \le a , \\ v_0(L - x)/(L - a) , & a < x < L , \end{cases}$$
donde v_0 es una constante. Determine una solución formal.

En los problemas 7 y 8, determine una solución formal del problema de la cuerda vibrante descrito mediante el problema con valores iniciales y en la frontera no homogéneos dado.

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx$, $\quad 0 < x < \pi$, $\quad t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\quad t > 0$,
$u(x, 0) = \operatorname{sen} x$, $\quad 0 < x < \pi$,
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 5 \operatorname{sen} 2x - 3 \operatorname{sen} 5x$, $\quad 0 < x < \pi$.

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \operatorname{sen} t$, $\quad 0 < x < \pi$, $\quad t > 0$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\quad t > 0$,
$u(x, 0) = 0$, $\quad 0 < x < \pi$,
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, $\quad 0 < x < \pi$.

9. Si un extremo de una cuerda se mantiene fijo mientras que el otro queda libre, entonces el movimiento de la cuerda queda descrito mediante el problema con valores iniciales y en la frontera
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 ,$$
$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 , \quad t > 0 ,$$
$$u(x, 0) = f(x) , \quad 0 < x < L ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) , \quad 0 < x < L .$$
Deduzca una fórmula para la solución formal.

10. Deduzca una fórmula para la solución del siguiente problema con valores iniciales y en la frontera que implica condiciones en la frontera no homogéneas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad 0 < x < L\,, \qquad t > 0\,,$$
$$u(0, t) = U_1\,, \qquad u(L, t) = U_2\,, \qquad t > 0\,,$$
$$u(x, 0) = f(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,$$

donde U_1 y U_2 son constantes.

11. El problema del telégrafo.† Use el método de separación de variables para reducir una solución formal del problema del telégrafo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad 0 < x < L\,, \qquad t > 0\,,$$
$$u(0, t) = u(L, t) = 0\,, \qquad t > 0\,,$$
$$u(x, 0) = f(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

12. Verifique la solución de d'Alembert (32) para el problema con valores iniciales (26)-(28) cuando $f(x)$ tiene una segunda derivada continua y $g(x)$ tiene una primera derivada continua, sustituyendo directamente en la ecuación.

En los problemas 13 a 18, determine la solución del problema con valores iniciales.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,, \qquad t > 0\,,$$
$$u(x, 0) = f(x)\,, \qquad -\infty < x < \infty\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)\,, \qquad -\infty < x < \infty\,,$$

para las funciones dadas $f(x)$ *y* $g(x)$.

13. $f(x) \equiv 0\,, \quad g(x) = \cos x\,.$
14. $f(x) = x^2\,, \quad g(x) \equiv 0\,.$
15. $f(x) = x\,, \quad g(x) = x\,.$
16. $f(x) = \operatorname{sen} 3x\,, \quad g(x) \equiv 1\,.$
17. $f(x) = e^{-x^2}\,, \quad g(x) = \operatorname{sen} x\,.$
18. $f(x) = \cos 2x\,, \quad g(x) = 1 - x\,.$

19. Deduzca la solución formal dada en las ecuaciones (22)-(24) para el problema de la membrana vibrante descrito mediante el problema con valores iniciales y en la frontera (17)-(21).

20. Ondas acuáticas largas. El movimiento de las ondas acuáticas largas en un canal de profundidad constante se describe mediante la **ecuación linealizada de Korteweg y de Vries (KdV)**

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_{xxx} = 0\,, \tag{46}$$

donde $u(x, t)$ es el desplazamiento del agua desde su profundidad de equilibrio en la posición x y el instante t, y α y β son constantes positivas.

(a) Muestre que la ecuación (46) tiene una solución de la forma

$$u(x, t) = V(z)\,, \quad z = kx - w(k)t\,, \tag{47}$$

donde k es una constante fija y $w(k)$ es una función de k, siempre que V satisfaga

$$-w\frac{dV}{dz} + \alpha k\frac{dV}{dz} + \beta k^3\frac{d^3V}{dz^3} = 0\,. \tag{48}$$

Las soluciones definidas por (47) son llamadas **ondas uniformes**.

(b) Desde el punto de vista físico, sólo nos interesan soluciones $V(z)$ acotadas y no constantes en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$. Muestre que tales soluciones existen sólo si $\alpha k - w > 0$.

(c) Sea $\lambda^2 = (\alpha k - w)/(\beta k^3)$. Muestre que las soluciones de la parte (b) se pueden expresar en la forma $V(x, t) = A \operatorname{sen}[\lambda kx - (\alpha\lambda k - \beta\lambda^3 k^3)t + B]$,

donde A y B son constantes arbitrarias. [*Sugerencia*: Despeje w en términos de λ y k y use (47).]

(d) Como λ y k se pueden elegir de manera arbitraria y siempre aparecen juntas como el producto λk, sin pérdida de generalidad podemos hacer $\lambda = 1$, con lo que tenemos

$$V(x, t) = A \operatorname{sen}[kx - (\alpha k - \beta k^3)t + B]\,,$$

como una solución de onda uniforme de (46). La relación de definición $w(k) = \alpha k - \beta k^3$ se

---

†Para un análisis del problema del telégrafo, véase *Methods of Mathematical Physics*, por R. Courant y D. Hibert, volumen II (Wiley-Interscience, Nueva York, 1989).

llama la **relación de dispersión**, el cociente $w(k)/k = \alpha - \beta k^2$ es la **velocidad de fase**, y la derivada $dw/dk = \alpha - 3\beta w^2$ es la **velocidad de grupo**. Cuando la velocidad de grupo no es constante, las ondas se llaman **dispersivas**. Muestre que la ecuación de onda canónica $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ sólo tiene ondas no dispersivas.

21. Tambor vibrante. Una membrana circular vibrante de radio unitario, cuya orilla se mantiene fija en un plano y cuyo desplazamiento $u(r, t)$ sólo depende de la distancia radial r desde el centro y del instante t queda descrita mediante el problema con valores iniciales y en la frontera.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) ,$$

$$0 < r < 1 , \quad t > 0 ,$$

$$u(1, t) = 0 , \qquad t > 0 ,$$

$$u(r, t) \quad \text{permanece finita cuando } r \to 0^+ ,$$

$$u(r, 0) = f(r) , \qquad 0 < r < 1 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = g(r) , \qquad 0 < r < 1 ,$$

donde f y g son el desplazamiento y la velocidad iniciales, respectivamente. Use el método de separación de variables para deducir una solución formal del problema del tambor vibrante. [*Sugerencia*: Muestre que hay una familia de soluciones de la forma

$$u_n(r, t) = [a_n \cos(k_n\alpha t) + b_n \operatorname{sen}(k_n\alpha t)]J_0(k_n r) ,$$

donde J_0 es la función de Bessel de primer tipo, de orden cero, y $0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ son los ceros positivos de J_0. Ahora, use superposición.] Véase la figura 10.21.

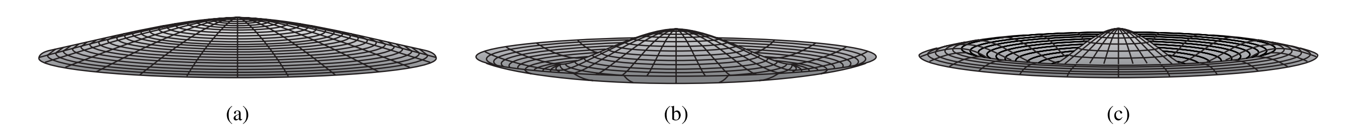


Figura 10.21 Formas de los modos para el tambor vibrante. (a)$J_0(2.405r)$, (b) $J_0(5.520r)$, (c) $J_0(8.654r)$

10.7 ECUACIÓN DE LAPLACE

En la sección 10.1 mostramos la forma en que la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

surge en el estudio de soluciones de estado estacionario o independientes del tiempo para la ecuación del calor. Como estas soluciones no dependen del tiempo, las condiciones iniciales no son importantes y sólo debemos especificar las condiciones en la frontera. También se puede aplicar para analizar el desplazamiento estático $u(x, y)$ de una membrana estirada y asegurada en el espacio a lo largo de la frontera de una región (en este caso, u debe satisfacer la ecuación de Laplace dentro de la región); para analizar los potenciales electrostático y gravitacional en ciertos campos de fuerzas (en este caso, u debe satisfacer la ecuación de Laplace en cualquier región libre de cargas eléctricas o de masa); y, en la mecánica de fluidos

de un fluido idealizado, para analizar la función de flujo $u(x, y)$ cuyas curvas de nivel (líneas de flujo) $u(x, y) = \text{constante}$, representan la trayectoria de partículas en el fluido (de nuevo, u satisface la ecuación de Laplace en la región de flujo).

Hay dos tipos básicos de condiciones en la frontera que usualmente se asocian con la ecuación de Laplace: **condiciones de tipo Dirichlet**, donde la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en un dominio D debe satisfacer

$$u(x, y) = f(x, y) \qquad \text{en } \partial D ,$$

con $f(x, y)$ una función dada, definida en la frontera ∂D de D; y las **condiciones de tipo Neumann**, donde se pide que la derivada direccional $\partial u/\partial n$ a lo largo de la normal exterior a la frontera satisfaga

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y) \qquad \text{en } \partial D ,$$

con $g(x, y)$ una función dada definida en ∂D. Decimos que las condiciones en la frontera están **mezcladas** si la solución debe satisfacer $u(x, y) = f(x, y)$ en una parte de la frontera y $(\partial u/\partial n)(x, y) = g(x, y)$ en la parte restante de la frontera.

En esta sección usaremos el método de separación de variables para determinar soluciones de la ecuación de Laplace con diversas condiciones en la frontera para dominios rectangulares, circulares y cilíndricos. También analizaremos la existencia y unicidad de tales soluciones.

EJEMPLO 1 Determinar una solución del siguiente problema mixto con valores en la frontera para un rectángulo (véase la figura 10.22):

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \qquad 0 < x < a , \qquad 0 < y < b ,$$

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0 , \qquad 0 \le y \le b ,$$

$$\textbf{(3)} \qquad u(x, b) = 0 , \qquad 0 \le x \le a ,$$

$$\textbf{(4)} \qquad u(x, 0) = f(x) , \qquad 0 \le x \le a .$$

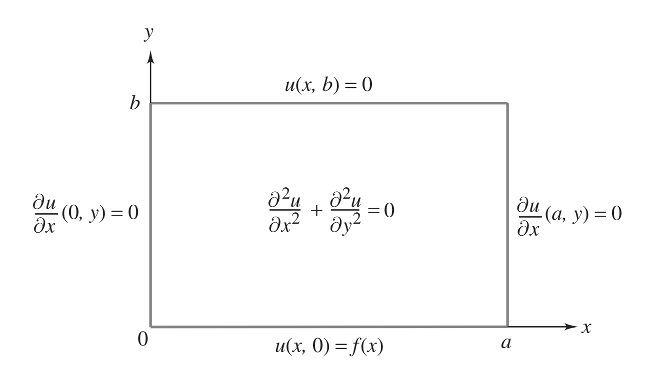


Figura 10.22 Problema mixto con valores en la frontera

SOLUCIÓN Para separar variables, sea $u(x, y) = X(x)Y(y)$; sustituimos esto en la ecuación (1) para tener

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 ,$$

lo que se separa como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K ,$$

donde K es cierta constante. Esto conduce a las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

(5) $$X''(x) - KX(x) = 0 ,$$

(6) $$Y''(y) + KY(y) = 0 .$$

De las condiciones en la frontera (2), vemos que

(7) $$X'(0) = X'(a) = 0 .$$

Ya nos hemos topado antes con el problema de valores propios en (5) y (7) anteriormente (véase el ejemplo 1 de la sección 10.5). Los valores propios son $K = K_n = -(n\pi/a)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, con las soluciones correspondientes

(8) $$X_n(x) = a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) ,$$

donde a_n son constantes arbitrarias.

Al hacer $K = K_n = -(n\pi/a)^2$ en la ecuación (6) y despejar Y tenemos†

(9) $$\begin{aligned} Y_0(y) &= A_0 + B_0 y , \\ Y_n(y) &= A_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) , \qquad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Las condiciones en la frontera $u(x, b) = 0$ en (3) se satisfacen si $Y(b) = 0$. Al hacer $y = b$ en (9), vemos que queremos $A_0 = -bB_0$ y

$$A_n = -B_n \tanh\left(\frac{n\pi b}{a}\right), \text{ o de manera equivalente, } Y_n(y) = C_n \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right], n = 1, 2, \ldots .$$

(véase el problema 18). Así, vemos que existen soluciones de (1)-(3) de la forma

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= X_0(x)Y_0(y) = a_0 B_0 (y - b) = E_0 (y - b) , \\ u_n(x, y) &= X_n(x)Y_n(y) = a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) C_n \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right] \\ &= E_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right] , \qquad n = 1, 2, \ldots , \end{aligned}$$

†Por lo general escribimos $Y_n(y) = a_n e^{npy/a} + b_n e^{-npy/a}$. Sin embargo, los cálculos se simplifican en este caso usando las funciones hiperbólicas $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$ y $\operatorname{senh} z = (e^z - e^{-z})/2$.

donde las E_n son constantes. Por el principio de superposición,

(10) $$u(x, y) = E_0(y - b) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right]$$

es una solución formal de (1)-(3).

Al aplicar las demás condiciones no homogéneas en la frontera en (4), tenemos que

$$u(x, 0) = f(x) = -E_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi b}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) .$$

Ésta es una serie de cosenos de Fourier para $f(x)$ y por lo tanto, los coeficientes están determinados por las fórmulas

(11) $$E_0 = \frac{1}{(-ba)} \int_0^a f(x)dx ,$$

$$E_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx , \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Así, una solución formal está dada por (10), con las constantes E_n dadas por (11). Véase la figura 10.23 para un bosquejo de las sumas parciales para (10). ■

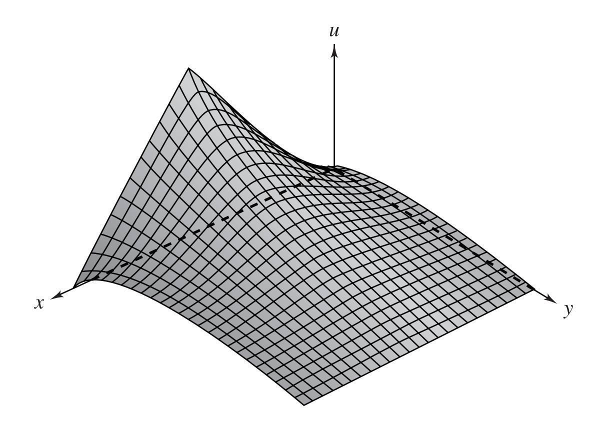


Figura 10.23 Sumas parciales para el ejemplo 1, con $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$

En el ejemplo 1, las condiciones en la frontera fueron homogéneas en tres lados del rectángulo y no homogéneas en el cuarto lado, $\{(x, y)\colon y = 0, 0 \leq x \leq a\}$. Es importante observar que el método usado en el ejemplo 1 también se puede utilizar para resolver problemas donde las condiciones en la frontera sean no homogéneas en todos los lados. Esto se lleva a cabo resolviendo cuatro problemas separados con valores en la frontera, donde tres lados tienen condiciones homogéneas en la frontera y sólo un lado tiene condiciones no homogéneas. La solución se obtiene entonces sumando estas cuatro soluciones (véase el problema 5).

Para problemas que implican dominios circulares, por lo general es más conveniente usar coordenadas polares. En coordenadas rectangulares, el laplaciano tiene la forma

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

En coordenadas polares (r, θ), hacemos

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

de modo que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} , \qquad \tan \theta = y/x .$$

Con paciencia y un poco de cuidado al aplicar la regla de la cadena, se puede mostrar que el laplaciano en coordenadas polares es

$$\textbf{(12)} \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

(véase el problema 6). En el siguiente ejemplo obtenemos una solución del **problema de Dirichlet** en un disco de radio a.

EJEMPLO 2 Un disco metálico circular de radio a tiene su parte superior e inferior aisladas. La orilla $(r = a)$ del disco se mantiene a una temperatura dada, que depende de su posición (varía con θ). La temperatura de estado estacionario dentro del disco satisface la ecuación de Laplace. Determinar la distribución de temperatura $u(r, \theta)$ dentro del disco, hallando la solución del siguiente problema de Dirichlet con valores en la frontera, que se muestra en la figura 10.24:

$$\textbf{(13)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 , \qquad 0 \le r < a , \qquad -\pi \le \theta \le \pi ,$$

$$\textbf{(14)} \qquad u(a, \theta) = f(\theta) , \qquad -\pi \le \theta \le \pi .$$

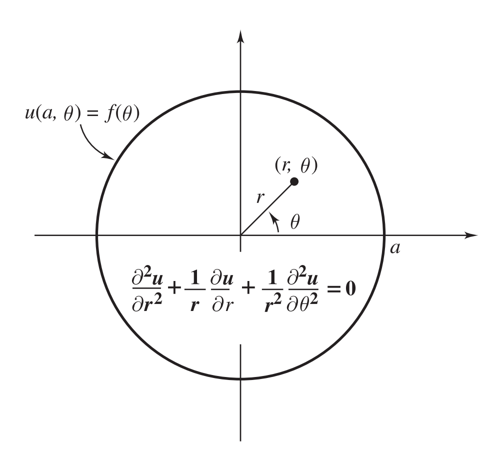


Figura 10.24 Distribución de temperatura de estado estacionario en un disco

SOLUCIÓN Para usar el método de separación de variables, primero hacemos

$$u(r, \theta) = R(r)T(\theta) ,$$

donde $0 \le r < a$ y $-\pi \le \theta \le \pi$. Al sustituir en (13) y separar variables, tenemos

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \lambda ,$$

donde λ es cualquier constante. Esto conduce a las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

(15) $$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 ,$$

(16) $$T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0 .$$

Para que $u(r, \theta)$ sea continua en el disco $0 \le r < a$, necesitamos que $T(\theta)$ sea periódica con periodo 2π; en particular, necesitamos que

(17) $$T(-\pi) = T(\pi) \quad \text{y} \quad T'(-\pi) = T'(\pi) .$$

Por lo tanto, buscamos soluciones no triviales del problema de valores propios (16)-(17).

Cuando $\lambda < 0$, la solución general de (16) es la suma de dos exponenciales. Por lo tanto, sólo tenemos soluciones triviales con periodo 2π.

Cuando $\lambda = 0$, vemos que $T(\theta) = A\theta + B$ es la solución de (16). Esta función lineal sólo es periódica cuando $A = 0$; es decir, $T_0(\theta) = B$ es la única solución con periodo 2π correspondiente a $\lambda = 0$.

Cuando $\lambda > 0$, la solución general de (16) es

$$T(\theta) = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\theta .$$

Por lo tanto, obtenemos una solución no trivial con periodo 2π sólo cuando $\sqrt{\lambda} = n$, $n = 1, 2, \ldots$. (El lector puede verificar esto mediante (17).) Por consiguiente, obtenemos las soluciones no triviales con periodo 2π

(18) $$T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta$$

correspondientes a $\sqrt{\lambda} = n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ahora, para $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, la ecuación (15) es la ecuación de Cauchy-Euler

(19) $$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0$$

(véase la sección 4.5, página 187). Cuando $n = 0$, la solución general es

$$R_0(r) = C + D \ln r .$$

Como $\ln r \to -\infty$ cuando $r \to 0^+$, esta solución no está acotada cerca de $r = 0$ cuando $D \ne 0$. Por lo tanto, debemos elegir $D = 0$ si queremos que $u(r, \theta)$ sea continua en $r = 0$. Ahora tenemos que $R_0(r) = C$, de modo que $u_0(r, \theta) = R_0(r)T(\theta) = CB$, que por conveniencia hemos escrito en la forma

(20) $$u_0(r, \theta) = \frac{A_0}{2} ,$$

donde A_0 es una constante arbitraria.

Cuando $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, el lector debe verificar que la ecuación (19) tiene la solución general

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} .$$

Como $r^{-n} \to \infty$ cuando $r \to 0^+$, debemos hacer $D_n = 0$ para que $u(r, \theta)$ esté acotada en $r = 0$. Así,

$$R_n(r) = C_n r^n .$$

Para cada $n = 1, 2, \ldots$, tenemos las soluciones

$$\textbf{(21)} \qquad u_n(r, \theta) = R_n(r)T_n(\theta) = C_n r^n (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) ,$$

y podemos formar una serie infinita con las soluciones en (20) y (21) para obtener la siguiente solución formal de (13):

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) .$$

Es más conveniente escribir esta serie en la forma equivalente

$$\textbf{(22)} \qquad u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) ,$$

donde las a_n y b_n son constantes que pueden determinarse a partir de la condición en la frontera; si $r = a$ en (22), la condición (14) se convierte en

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) .$$

Por lo tanto, si $f(\theta)$ tiene periodo 2π, reconocemos que a_n y b_n son coeficientes de Fourier. Así,

$$\textbf{(23)} \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta , \qquad n = 0, 1, \ldots ,$$

$$\textbf{(24)} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta , \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

En resumen, si a_n y b_n se definen mediante las fórmulas (23) y (24), entonces la función $u(r, \theta)$ dada en (22) es una solución formal del problema de Dirichlet (13)-(14). ■

El procedimiento del ejemplo 2 también se puede usar para estudiar el **problema de Neumann** en un disco:

$$\textbf{(25)} \qquad \Delta u = 0 , \qquad 0 \le r < a , \qquad -\pi \le \theta \le \pi ,$$

$$\textbf{(26)} \qquad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = f(\theta) , \qquad -\pi \le \theta \le \pi .$$

Este problema no tiene solución única, pues si u es una solución, entonces la función u más una constante también es solución. Además, f debe satisfacer la **condición de consistencia**

$$\textbf{(27)} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0 .$$

Si interpretamos la solución $u(r, \theta)$ de la ecuación (25) como la distribución de temperatura de estado estacionario dentro de un disco circular que no contiene fuentes ni sumideros de calor, entonces la ecuación (26) especifica el flujo de calor a través de la frontera del disco. En este caso, la condición de consistencia (27) no es más que el requisito de que el flujo neto de calor a través de la frontera sea igual a cero. (Si seguimos introduciendo calor, ¡la temperatura no alcanzará el equilibrio!) Dejaremos la solución del problema de Neumann y la deducción de la condición de consistencia para los ejercicios.

La técnica utilizada en el ejemplo 2 también se aplica a dominios anulares, $\{(r, \theta): 0 < a < r < b\}$, y a dominios exteriores, $\{(r, \theta): a < r\}$. También dejamos estas aplicaciones como ejercicios.

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas surge en el estudio de distribuciones de temperatura de estado estacionario en un cilindro sólido y al determinar el potencial eléctrico dentro de un cilindro. En coordenadas cilíndricas,

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad z = z\,,$$

la ecuación de Laplace se convierte en

$$(28) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\ .$$

El problema de Dirichlet para el cilindro $\{(r, \theta, z): 0 \le r \le a, 0 \le z \le b\}$ tiene las condiciones en la frontera

$$(29) \qquad u(a, \theta, z) = f(\theta, z)\,, \qquad -\pi \le \theta \le \pi\,, \qquad 0 \le z \le b\,,$$

$$(30) \qquad u(r, \theta, 0) = g(r, \theta)\,, \qquad 0 \le r \le a\,, \qquad -\pi \le \theta \le \pi\,,$$

$$(31) \qquad u(r, \theta, b) = h(r, \theta)\,, \qquad 0 \le r \le a\,, \qquad -\pi \le \theta \le \pi\,.$$

Para resolver el problema de Dirichlet con valores en la frontera (28)-(31), primero resolvemos los tres problemas con valores en la frontera correspondientes a (i) $g \equiv 0$ y $h \equiv 0$; (ii) $f \equiv 0$ y $h \equiv 0$; y (iii) $f \equiv 0$ y $g \equiv 0$. Luego, por el principio de superposición, la solución de (28)-(31) será la suma de estas tres soluciones. Éste es el mismo método que usamos al tratar problemas de Dirichlet sobre dominios rectangulares. (Véanse las observaciones después del ejemplo 1.) En el siguiente ejemplo resolvemos el problema de Dirichlet cuando $g \equiv 0$ y $h \equiv 0$.

EJEMPLO 3 La base $(z = 0)$ y la parte superior $(z = b)$ de un cilindro libre de carga hacen tierra, de modo que tienen potencial nulo. El potencial sobre la superficie lateral $(r = a)$ del cilindro está dado por $u(a, \theta, z) = f(\theta, z)$, donde $f(\theta, 0) = f(\theta, b) = 0$. Dentro del cilindro, el potencial $u(r, \theta, z)$ satisface la ecuación de Laplace. Determinar el potencial u dentro del cilindro, hallando una solución al problema de Dirichlet con valores en la frontera

$$(32) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,, \quad 0 \le r < a\,, \quad -\pi \le \theta \le \pi\,, \quad 0 < z < b\,,$$

$$(33) \qquad u(a, \theta, z) = f(\theta, z)\,, \qquad -\pi \le \theta \le \pi\,, \qquad 0 \le z \le b\,,$$

$$(34) \qquad u(r, \theta, 0) = u(r, \theta, b) = 0\,, \qquad 0 \le r < a\,, \qquad -\pi \le \theta \le \pi\,.$$

SOLUCIÓN Usaremos el método de separación de variables; primero suponemos que

$$u(r, \theta, z) = R(r)T(\theta)Z(z)\ .$$

Al sustituir en la ecuación (32) y separar las Z, tenemos

$$\frac{R''(r) + (1/r)R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda ,$$

donde λ puede ser cualquier constante. Separamos las R y las T para obtener:

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} - r^2\lambda = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \mu ,$$

donde μ también puede ser cualquier constante. Ahora tenemos las tres ecuaciones diferenciales ordinarias

(35) $$r^2R''(r) + rR'(r) - (r^2\lambda + \mu)R(r) = 0 ,$$

(36) $$T''(\theta) + \mu T(\theta) = 0 ,$$

(37) $$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 .$$

Para que u sea continua en el cilindro, $T(\theta)$ debe tener periodo 2π. Así, partimos del problema de valores propios

$$T''(\theta) + \mu T(\theta) = 0 , \qquad -\pi < \theta < \pi ,$$
$$T(-\pi) = T(\pi) \quad \text{y} \quad T'(-\pi) = T'(\pi) .$$

En el ejemplo 2 mostramos que este problema tiene soluciones no triviales para $\mu = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dadas por

(38) $$T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta ,$$

donde las A_n y B_n son constantes arbitrarias.

Las condiciones en la frontera en (34) implican que $Z(0) = Z(b) = 0$. Por lo tanto, Z debe satisfacer el problema de valores propios

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 , \qquad 0 < z < b , \qquad Z(0) = Z(b) = 0 .$$

Ya hemos visto este problema varias veces. Existen soluciones no triviales para $\lambda = (m\pi/b)^2$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ dadas por

(39) $$Z_m(z) = C_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) ,$$

donde las C_m son constantes arbitrarias.

Al sustituir μ y λ en la ecuación (35) tenemos

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \left(r^2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + n^2\right)R(r) = 0 , \qquad 0 \le r < a .$$

El lector debe verificar que el cambio de variables $s = (m\pi r/b)$ transforma esta ecuación en la **ecuación modificada de Bessel de orden n**†

(40) $$s^2R''(s) + sR'(s) - (s^2 + n^2)R(s) = 0 , \qquad 0 \le s < \frac{m\pi a}{b} .$$

†La ecuación modificada de Bessel de orden n surge en muchas aplicaciones y ha sido estudiada ampliamente. El lector puede consultar el texto *Special Functions*, por E. D. Raineville (Chelsea Publishing Co., Inc., Nueva York, 1972), para los detalles relativos a su solución.

La ecuación modificada de Bessel de orden n tiene dos soluciones linealmente independientes, la **función modificada de Bessel del primer tipo**:

$$I_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s/2)^{2k+n}}{k!\Gamma(k+n+1)} ,$$

que permanece acotada cerca de cero, y la **función modificada de Bessel del segundo tipo**:

$$K_n(s) = \lim_{\upsilon \to n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\upsilon}(s) - I_{\upsilon}(s)}{\operatorname{sen} \upsilon\pi} ,$$

que se vuelve no acotada cuando $s \to 0$. (Recuerde que Γ es la función gamma analizada en la sección 7.6.) Una solución general de (40) tiene la forma $CK_n + DI_n$, donde C y D son constantes. Como u debe permanecer acotada cerca de $s = 0$, debemos hacer $C = 0$. Así, las soluciones deseadas de (40) tienen la forma

$$\textbf{(41)} \qquad R_{mn}(r) = D_{mn} I_n\left(\frac{m\pi r}{b}\right) , \qquad n = 0, 1, \ldots , \qquad m = 1, 2, \ldots ,$$

donde las D_{mn} son constantes arbitrarias.

Si multiplicamos las funciones en (38), (39) y (41) y luego sumamos sobre m y n, obtenemos la siguiente solución de (32) y (34) en términos de series:

$$\textbf{(42)} \qquad u(r, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} I_0\left(\frac{m\pi r}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \operatorname{sen} n\theta) I_n\left(\frac{m\pi r}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) ,$$

donde a_{mn} y b_{mn} son constantes arbitrarias.

Las constantes en (42) se pueden obtener al imponer la condición en la frontera (33). Al hacer $r = a$ y ordenar términos, tenemos

$$\textbf{(43)} \qquad f(\theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} I_0\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} I_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\right] \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} I_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\right] \operatorname{sen} n\theta .$$

Al analizar esta serie doble de Fourier como la de la sección 10.5 (página 621), vemos que

$$\textbf{(44)} \qquad a_{m0} = \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) d\theta\, dz \Big/ \pi b I_0\left(\frac{m\pi a}{b}\right) ,$$

$$\textbf{(45)} \qquad a_{mn} = 2 \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) \cos n\theta\, d\theta\, dz \Big/ \pi b I_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right) , \quad n \geq 1 ,$$

$$\textbf{(46)} \qquad b_{mn} = 2 \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta\, dz \Big/ \pi b I_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right) , \quad n \geq 1 .$$

En consecuencia, una solución formal de (32)-(34) está dada por la ecuación (42) con las constantes a_{mn} y b_{mn} determinadas mediante las ecuaciones (44)-(46). ■

Existencia y unicidad de soluciones

Podemos establecer la existencia de soluciones de los problemas con valores en la frontera para la ecuación de Laplace estudiando la convergencia de las soluciones formales obtenidas mediante el método de separación de variables.

Para responder la cuestión de la unicidad de la solución de un problema de Dirichlet con valores en la frontera para la ecuación de Laplace, recordemos que esta ecuación surge en el estudio de las soluciones de estado estacionario para la ecuación del calor. Así como hay principios del máximo para la ecuación del calor, también hay principios del máximo para la ecuación de Laplace. Establecemos uno de estos resultados a continuación.†

PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE

Teorema 9. Sea $u(x, y)$ una solución de la ecuación de Laplace en un dominio acotado D, con $u(x, y)$ continua en $\bar{D}$, la adherencia de D. ($\bar{D} = D \cup \partial D$, donde ∂D denota la frontera de D.) Entonces $u(x, t)$ alcanza su valor máximo en ∂D.

La unicidad de la solución del problema de Dirichlet con valores en la frontera es consecuencia del principio del máximo. Establecemos este resultado en el siguiente teorema, pero dejaremos su demostración como ejercicio (véase el problema 19).

UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Teorema 10. Sea D un dominio acotado. Si existe una solución continua del problema de Dirichlet con valores en la frontera

$$\Delta u(x, y) = 0 \qquad \text{en } D\,,$$
$$u(x, y) = f(x, y) \qquad \text{en } \partial D\,,$$

entonces la solución es única.

Las soluciones de la ecuación de Laplace en dos variables se llaman funciones **armónicas**. Estas funciones surgen de manera natural en el estudio de las funciones analíticas de una variable compleja. Además, el análisis complejo proporciona muchos resultados útiles acerca de las funciones armónicas. Para un análisis de esta interacción, el lector puede consultar un texto introductorio de análisis complejo, como *Fundamentals of Complex Analysis,* 2a. edición, por E. B. Saff y A. D. Snider (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1993).

†En la sección 8.2 del texto *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 2a. edición, por Tyn Myint-U (Elsevier North Holland, Inc., Nueva York, 1980), aparece una demostración de este hecho.

EJERCICIOS 10.7

En los problemas 1 a 5, determine una solución formal del problema con valores en la frontera dado.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \quad 0 < x < \pi\ , \quad 0 < y < 1\ ,$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0\ , \quad 0 \le y \le 1\ ,$

$u(x, 0) = 4\cos 6x + \cos 7x\ , \quad 0 \le x \le \pi\ ,$

$u(x, 1) = 0\ , \quad 0 \le x \le \pi\ .$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \quad 0 < x < \pi\ , \quad 0 < y < \pi\ ,$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0\ , \quad 0 \le y \le \pi\ ,$

$u(x, 0) = \cos x - 2\cos 4x\ , \quad 0 \le x \le \pi\ ,$

$u(x, \pi) = 0\ , \quad 0 \le x \le \pi\ .$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \quad 0 < x < \pi\ , \quad 0 < y < \pi\ ,$

$u(0, y) = u(\pi, y) = 0\ , \quad 0 \le y \le \pi\ ,$

$u(x, 0) = f(x)\ , \quad 0 \le x \le \pi\ ,$

$u(x, \pi) = 0\ , \quad 0 \le x \le \pi\ .$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \quad 0 < x < \pi\ , \quad 0 < y < \pi\ ,$

$u(0, y) = u(\pi, y) = 0\ , \quad 0 \le y \le \pi\ ,$

$u(x, 0) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 4x\ , \quad 0 \le x \le \pi\ ,$

$u(x, \pi) = 0\ , \quad 0 \le x \le \pi\ .$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \quad 0 < x < \pi\ , \quad 0 < y < 1\ ,$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0\ , \quad 0 \le y \le 1\ ,$

$u(x, 0) = \cos x - \cos 3x\ , \quad 0 \le x \le \pi\ ,$

$u(x, 1) = \cos 2x\ , \quad 0 \le x \le \pi\ .$

6. Deduzca la forma del laplaciano en coordenadas polares dada en la ecuación (12).

En los problemas 7 y 8, determine una solución del problema de Dirichlet con valores en la frontera para un disco.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\ ,$$

$$0 \le r < 2\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$

$$u(2, \theta) = f(\theta)\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

para la función dada $f(\theta)$.

7. $f(\theta) = |\theta|\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ .$

8. $f(\theta) = \cos^2\theta\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ .$

9. Determine una solución para el problema de Neumann con valores en la frontera para un disco:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\ ,$$

$$0 \le r < a\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = f(\theta)\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ .$$

10. Una solución del problema de Neumann (25)-(26) debe satisfacer además la condición de consistencia en (27). Para mostrar esto, use la **segunda fórmula de Green**

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy = \int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds\ ,$$

donde $\partial/\partial n$ es la derivada normal exterior y ds es la diferencial de la longitud de arco. [*Sugerencia*: Haga $v \equiv 1$ y observe que $\partial u/\partial n = \partial u/\partial r$.]

11. Determine una solución del siguiente problema de Dirichlet para un anillo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\ ,$$

$$1 < r < 2\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$

$$u(1, \theta) = \operatorname{sen} 4\theta - \cos\theta\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$

$$u(2, \theta) = \operatorname{sen}\theta\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ .$$

12. Determine una solución del siguiente problema de Dirichlet para un anillo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\ ,$$

$$1 < r < 3\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$

$$u(1, \theta) = 0\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$

$$u(3, \theta) = \cos 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ .$$

13. Determine una solución del siguiente problema de Dirichlet para un dominio exterior:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \ ,$$
$$1 < r \ , \qquad -\pi \le \theta \le \pi \ ,$$
$$u(1, \theta) = f(\theta) \ , \qquad -\pi < \theta \le \pi \ ,$$
$$u(r, \theta) \quad \text{permanece acotada cuando } r \to \infty.$$

14. Determine una solución del siguiente problema de Neumann para un dominio exterior:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \ ,$$
$$1 < r \ , \qquad -\pi \le \theta \le \pi \ ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = f(\theta) \ , \qquad -\pi \le \theta \le \pi \ ,$$
$$u(r, \theta) \quad \text{permanece acotada cuando } r \to \infty.$$

15. Determine una solución del siguiente problema de Dirichlet para un semidisco:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \ ,$$
$$0 < r < 1 \ , \qquad 0 < \theta < \pi \ ,$$
$$u(r, 0) = 0 \ , \qquad 0 \le r \le 1 \ ,$$
$$u(r, \pi) = 0 \ , \qquad 0 \le r \le 1 \ ,$$
$$u(1, \theta) = \operatorname{sen} 3\theta \ , \qquad 0 \le \theta \le \pi \ ,$$
$$u(0, \theta) \text{ acotada.}$$

16. Determine una solución del siguiente problema de Dirichlet para un semianillo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \ ,$$
$$\pi < r < 2\pi \ , \qquad 0 < \theta < \pi \ .$$
$$u(r, 0) = \operatorname{sen} r \ , \qquad \pi \le r \le 2\pi \ .$$
$$u(r, \pi) = 0 \ , \qquad \pi \le r \le 2\pi \ ,$$
$$u(\pi, \theta) = u(2\pi, \theta) = 0 \ , \qquad 0 \le \theta \le \pi \ .$$

17. Determine una solución del siguiente problema mixto con valores en la frontera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \ ,$$
$$1 < r < 3 \ , \qquad -\pi \le \theta \le \pi \ ,$$
$$u(1, \theta) = f(\theta) \ , \qquad -\pi \le \theta \le \pi \ ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}(3, \theta) = g(\theta) \ , \qquad -\pi \le \theta \le \pi \ .$$

18. Muestre que

$$-B_n \tanh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$
$$= C_n \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right] \ ,$$

donde

$$C_n = B_n / \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \ .$$

19. Demuestre el teorema 10 relativo a la unicidad de la solución del problema de Dirichlet.

20. **Estabilidad.** Use el principio del máximo para demostrar el siguiente teorema relativo a la dependencia continua de la solución con respecto de las condiciones en la frontera:

Teorema. Sean f_1 y f_2 funciones continuas en ∂D, donde D es un dominio acotado. Para $i = 1$ y 2, sea u_i la solución del problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } D \ ,$$
$$u = f_i \ , \quad \text{en } \partial D \ .$$

Si los valores en la frontera satisfacen

$$|f_1(x,y) - f_2(x, y)| \le \varepsilon \text{ para toda } (x, y) \text{ en } \partial D \ ,$$

donde $\varepsilon > 0$ es cierta constante, entonces

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \le \varepsilon \text{ para toda } (x, y) \text{ en } D \ .$$

21. Para el problema de Dirichlet descrito en el ejemplo 3, sean $a = b = \pi$ y suponga que el potencial de la superficie lateral $(r = \pi)$ del cilindro es $f(\theta, z) = \operatorname{sen} z$. Use las ecuaciones (44)-(46) para calcular la solución dada por la ecuación (42).

22. **Invariancia de la ecuación de Laplace.** Una función con valores complejos $f(z)$ de la variable compleja $z = x + iy$ se puede escribir como $f(z) = u(x,y) + iv(x, y)$, donde u y v son funciones con valores reales. Si $f(z)$ es analítica en una región plana D, entonces sus partes real e imaginaria satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D; es decir, en D

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

Sea f analítica y uno a uno en D; suponga que su inversa f^{-1} es analítica en D', donde D' es la imagen de D bajo f. Entonces

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \ , \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

son justamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f^{-1}. Muestre que si $\phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace para (x, y) en D, entonces $\psi(u, v) :=$ $\phi(x(u, v), y(u, v))$ satisface la ecuación de Laplace para (u, v) en D'.

23. Flujo de fluido cerca de una esquina. Las líneas de flujo que describen el flujo de un fluido en torno de una esquina (véase la figura 10.25) están dadas por $\phi(x, y) = k$, donde k es una constante y ϕ, la función de flujo, satisface el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 , \qquad x > 0 , \qquad y > 0 ,$$
$$\phi(x, 0) = 0 , \qquad 0 \le x ,$$
$$\phi(0, y) = 0 , \qquad 0 \le y .$$

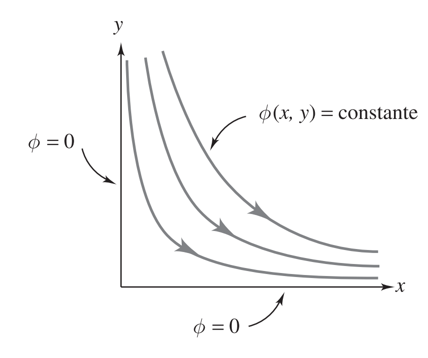


Figura 10.25 Flujo en torno a una esquina

(a) Use los resultados del problema 22 para mostrar que este problema se puede reducir al de determinar el flujo sobre una placa plana (véase la figura 10.26). Es decir, muestre que el problema se reduce a hallar la solución de

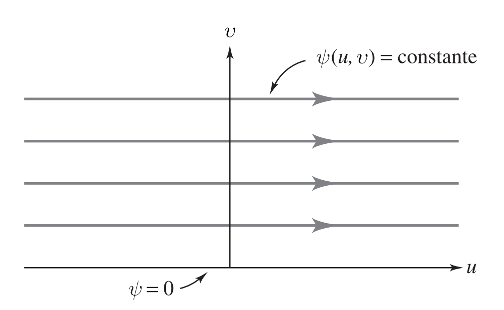


Figura 10.26 Flujo sobre una superficie plana

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0 ,$$
$$v > 0 , \qquad -\infty < u < \infty ,$$
$$\psi(u, 0) = 0 , \qquad -\infty < u < \infty ,$$

donde ψ y ϕ están relacionadas como sigue: $\psi(u, v) = \phi(x(u, v), y(u, v))$, y la transformación entre (u, v) y (x, y) está dada por la función analítica $f(z) = z^2$.

(b) Verifique que una solución no constante del problema en la parte (a) está dada por $\psi(u, v) = v$.

(c) Use el resultado de la parte (b) para determinar una función de flujo $\phi(x, y)$ para el problema original.

24. Dominio no acotado. Use separación de variables para determinar una solución de la ecuación de Laplace en el rectángulo infinito $0 < x < \pi$, $0 < y < \infty$, que se anule en los lados $x = 0$ y $x = \pi$, tienda a cero cuando $y \to \infty$ y sea igual a $f(x)$ para $y = 0$.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Separación de variables: Una técnica clásica eficaz para resolver problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales parciales es el **método de separación de variables**. Brevemente, la idea es suponer primero que existe una solución que puede escribirse con las variables separadas, por ejemplo, $u(x, t) = X(x)T(t)$. Al sustituir $u = XT$ en la ecuación diferencial parcial e imponer las condiciones en la frontera se llega al problema de hallar los valores propios y las funciones propias para un problema con valores en la frontera para una ecuación diferencial ordinaria. Al determinar los valores propios y las funciones propias, se obtienen funciones $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ que resuelven la ecuación diferencial parcial y las condiciones en la frontera. Al considerar combinaciones lineales infinitas de las

$u_n(x, t)$ obtenemos soluciones de la ecuación diferencial parcial y condiciones en la frontera de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) \ .$$

A continuación se obtienen los coeficientes c_n usando las condiciones iniciales o las demás condiciones en la frontera.

Serie de Fourier: Sea $f(x)$ una función continua por partes en el intervalo $[-T, T]$. La **serie de Fourier** de f es la serie trigonométrica

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \right\} \ ,$$

donde las a_n y b_n están dadas por las **fórmulas de Euler:**

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \cos\frac{n\pi x}{T} dx \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} dx \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Sea f continua por partes en el semiintervalo $[0, T]$. La **serie de cosenos de Fourier** de $f(x)$ en $[0, T]$ es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T} \ ,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x) \cos\frac{n\pi x}{T} dx \ .$$

La **serie de senos de Fourier** de $f(x)$ en $[0, T]$ es

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \ ,$$

donde

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} dx \ .$$

Las series de Fourier y el método de separación de variables se usan para resolver problemas con valores en la frontera y problema con valores iniciales y en la frontera para las tres ecuaciones clásicas:

Ecuación del calor $$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ .$$

Ecuación de onda $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ .$$

Ecuación de Laplace $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Para la ecuación del calor, existe una única solución $u(x, t)$ cuando los valores en la frontera en los extremos de un alambre conductor se especifican junto con la distribución inicial de temperatura. La ecuación de onda proporciona el desplazamiento $u(x, t)$ de una cuerda vibrante cuando los extremos se mantienen fijos, dados el desplazamiento y la velocidad iniciales en cada punto de la cuerda. En tal caso, la separación de variables proporciona una solución que es la suma de ondas verticales. Para una cuerda infinita con desplazamiento y velocidad iniciales dados, la solución de d'Alembert proporciona ondas viajeras. La ecuación de Laplace surge en el estudio de soluciones de estado estacionario para la ecuación del calor cuando se especifican condiciones en la frontera de tipo Dirichlet o Neumann.

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. El método de separación de variables es una técnica importante para resolver problemas con valores iniciales y en la frontera y problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales parciales *lineales*. Explique en qué parte la linealidad de la ecuación diferencial juega un papel crucial en el método de separación de variables.

2. Al aplicar el método de separación de variables encontramos varias *funciones especiales*, como los senos, los cosenos, las funciones de Bessel y las funciones modificadas de Bessel. Describa tres o cuatro ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales que impliquen a otras funciones especiales, como los polinomios de Legendre, los polinomios de Hermite y los polinomios de Laguerre. (Tal vez necesite explorar un poco en la biblioteca.)

3. Una ecuación diferencial parcial de segundo orden con coeficientes constantes de la forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se puede clasificar mediante el discriminante $D := b^2 - 4ac$. En particular, la ecuación es

hiperbólica si $D > 0$, y
elíptica si $D < 0$.

Verifique que la ecuación de onda es hiperbólica y que la ecuación de Laplace es elíptica. Se puede mostrar que las ecuaciones hiperbólicas (elípticas) pueden transformarse mediante un cambio lineal de variables en la ecuación de onda (ecuación de Laplace). Con base en su conocimiento de estas últimas ecuaciones, describa los tipos de problemas (con valores iniciales, con valores en la frontera, etc.) que son adecuados para las ecuaciones hiperbólicas o para las ecuaciones elípticas.

A. Distribución estacionaria de temperatura en un cilindro circular

Cuando la temperatura u dentro de un cilindro circular alcanza un estado estacionario, satisface la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. Si la temperatura sobre la superficie lateral $(r = a)$ se mantiene en cero grados, la temperatura en la parte superior $(z = b)$ también se mantiene nula, y la temperatura en la parte inferior $(z = 0)$ está dada por $u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$, entonces la temperatura de estado estacionario satisface el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\ , \quad 0 \le r < a\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ , \quad 0 < z < b\ ,$$
$$u(a, \theta, z) = 0\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ , \quad 0 \le z \le b\ ,$$
$$u(r, \theta, b) = 0\ , \quad 0 \le r < a\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$
$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)\ , \quad 0 \le r < a\ , \quad -\pi \le \theta \le \pi\ ,$$

donde $f(a, \theta) = 0$ para $-\pi \le \theta \le \pi$ (véase la figura 10.27). Para determinar una solución de este problema con valores en la frontera, proceda como sigue:

(a) Sea $u(r, \theta, z) = R(r)T(\theta)Z(z)$. Muestre que R, T y Z deben satisfacer las tres ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2R'' + rR' - (r^2\lambda + \mu)R = 0\ ,$$
$$T'' + \mu T = 0\ ,$$
$$Z'' + \lambda Z = 0\ .$$

(b) Muestre que $T(\theta)$ tiene la forma

$$T(\theta) = A \cos n\theta + B \operatorname{sen} n\theta$$

para $\mu = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(c) Muestre que $Z(z)$ tiene la forma

$$Z(z) = C \operatorname{senh}[\beta(b - z)]$$

para $\lambda = -\beta^2$, donde $\beta > 0$.

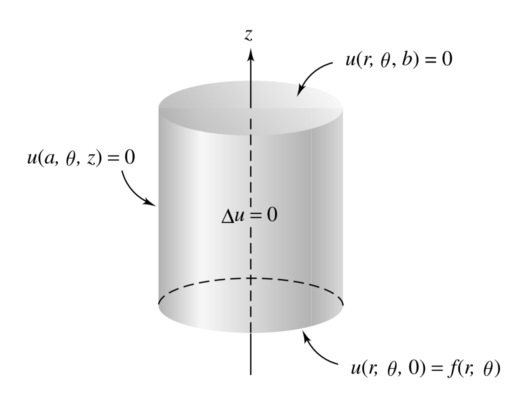


Figura 10.27 Problema de Dirichlet para el cilindro

(d) Muestre que para cada n, $R(r)$ tiene la forma

$$R_n(r) = DJ_n(\beta r) ,$$

donde J_n es la función de Bessel del primer tipo.

(e) Muestre que las condiciones en la frontera exigen que $R(a) = 0$, de modo que

$$J_n(\beta a) = 0 \ .$$

Por lo tanto, para cada n, si $0 < \alpha_{n1} , < \alpha_{n2} < \cdots , < a_{nm} < \cdots$ son los ceros de J_n, entonces

$$\beta_{nm} = \alpha_{nm}/a \ .$$

Además,

$$R_n(r) = DJ_n(\alpha_{nm} r/a) \ .$$

(f) Use los resultados anteriores para mostrar que $u(r, \theta, z)$ tiene la forma

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\alpha_{nm} r}{a}\right)(a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \operatorname{sen} n\theta) \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{nm}(b - z)}{a}\right) ,$$

donde a_{nm} y b_{nm} son constantes.

(g) Use la última condición en la frontera y un desarrollo ortogonal doble con funciones de Bessel y funciones trigonométricas para deducir las fórmulas

$$a_{0m} = \frac{1}{\pi a^2 \operatorname{senh}(\alpha_{0m} b/a)[J_1(\alpha_{0m})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_0\left(\frac{\alpha_{0m} r}{a}\right) r\,dr\,d\theta \ ,$$

para $m = 1, 2, 3, \ldots$, y para $n, m = 1, 2, 3, \ldots$,

$$a_{nm} = \frac{2}{\pi a^2 \operatorname{senh}(\alpha_{nm} b/a)[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n\left(\frac{\alpha_{nm} r}{a}\right) \cos(n\theta)\, r\,dr\,d\theta \ ,$$

$$b_{nm} = \frac{2}{\pi a^2 \operatorname{senh}(\alpha_{nm} b/a)[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n\left(\frac{\alpha_{nm} r}{a}\right) \operatorname{sen}(n\theta)\, r\,dr\,d\theta \ .$$

B. *Una solución de la ecuación de onda mediante transformada de Laplace*

Las transformadas de Laplace permiten resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales. Para ilustrar esta técnica, considere el problema con valores iniciales y en la frontera

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \qquad 0 < x < \infty , \qquad t > 0 ,$$

(2) $$u(0, t) = h(t) , \qquad t > 0 ,$$

(3) $$u(x, 0) = 0 , \qquad 0 < x < \infty ,$$

(4) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 , \qquad 0 < x < \infty ,$$

(5) $$\lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0 , \qquad t \geq 0 .$$

Este problema surge al estudiar una cuerda semiinfinita que en un principio está colocada en forma horizontal y en reposo, donde uno de los extremos comienza a moverse en forma vertical. Sea $u(x, t)$ la solución de (1)-(5). Para cada x, sea

$$U(x, s) := \mathscr{L}\{u(x, t)\}(x, s) = \int_0^\infty e^{-st}u(x, t)dt \ .$$

(a) Use el hecho de que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{L}\{u\} \ ,$$

y muestre que $U(x, s)$ satisface la ecuación

(6) $$s^2U(x, s) = \alpha^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ , \qquad 0 < x < \infty \ .$$

(b) Muestre que la solución general de (6) es

$$U(x, s) = A(s)e^{-sx/\alpha} + B(s)e^{sx/\alpha} \ ,$$

donde $A(s)$ y $B(s)$ son funciones arbitrarias de s.

(c) Como $u(x, t) \to 0$ cuando $x \to \infty$ para toda $0 \le t < \infty$, tenemos que $U(x, s) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Use este hecho para mostrar que la $B(s)$ en la parte (b) debe ser igual a cero.

(d) Use la ecuación (2) para mostrar que

$$A(s) = H(s) = \mathscr{L}\{h\}(s) \ ,$$

donde $A(s)$ está dada en la parte (b).

(e) Use los resultados de las partes (b), (c) y (d) para obtener una solución formal de (1)-(5).

C. *Función de Green*

Sea Ω una región en el plano xy con frontera suave $\partial\Omega$. Asociamos a Ω una **función de Green** $G(x, y; \xi, \eta)$ definida para parejas de puntos distintos (x, y), (ξ, η) en Ω. La función $G(x, y; \xi, \eta)$ tiene la siguiente propiedad.

Sea $\Delta u := \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ el operador laplaciano en Ω; sea $h(x, y)$ una función continua dada en Ω; y sea $f(x, y)$ una función continua dada en $\partial\Omega$. Entonces, una solución continua del problema de Dirichlet con valores en la frontera

$$\Delta u(x, y) = h(x, y) \ , \qquad \text{en } \Omega \ ,$$
$$u(x, y) = f(x, y) \ , \qquad \text{en } \partial\Omega \ ,$$

está dada por

(7) $$u(x, y) = \iint_\Omega G(x, y; \xi, \eta)h(\xi, \eta)d\xi\, d\eta + \int_{\partial\Omega} f(\xi, \eta)\frac{\partial G}{\partial n}(x, y; \xi, \eta)d\sigma(\xi, \eta) \ ,$$

donde n es la normal exterior a la frontera $\partial\Omega$ de Ω y la segunda integral es la integral de línea a lo largo de la frontera de Ω con el interior de Ω a la izquierda, conforme se recorre la frontera. En (7) suponemos que $\partial\Omega$ es lo bastante suave como para que los integrandos y las integrales existan.

Cuando Ω es el semiplano superior, la función de Green es†

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}\right] .$$

(a) Use (7) para mostrar que una solución de

$$\textbf{(8)} \qquad \Delta u(x, y) = h(x, y) , \qquad -\infty < x < \infty , \quad 0 < y ,$$

$$\textbf{(9)} \qquad u(x, 0) = f(x) , \qquad -\infty < x < \infty ,$$

está dada por

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}d\xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}\right]h(\xi, \eta)d\xi\, d\eta .$$

(b) Use el resultado de la parte (a) para determinar una solución de (8)-(9) cuando $h \equiv 0$ y $f \equiv 1$.

(c) Cuando Ω es el interior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, la función de Green, en coordenadas polares (r, θ) y (ρ, ϕ), está dada por

$$G(r, \theta; \rho, \phi) = \frac{1}{4\pi}\ln\left[r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\phi - \theta)\right]$$

$$- \frac{1}{4\pi}\ln\left[r^2 + \rho^{-2} - 2r\rho^{-1}\cos(\phi - \theta)\right] - \frac{1}{4\pi}\ln\rho .$$

Use (7) para mostrar que la solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 , \qquad 0 \le r < 1 , \qquad 0 \le \theta \le 2\pi ,$$

$$u(1, \theta) = f(\theta) , \qquad 0 \le \theta \le 2\pi ,$$

está dada por

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\phi - \theta)} f(\phi)d\phi .$$

Esto se conoce como la **fórmula integral de Poisson**.

(d) Use la fórmula integral de Poisson para deducir el siguiente teorema para las soluciones de la ecuación de Laplace.

---

†Las técnicas para determinar las funciones de Green aparecen textos de ecuaciones diferenciales parciales como *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 2a. edición, por Tyn Myint-U (Elsevier North Holland, Inc., Nueva York, 1980), capítulo 10.

PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO

Teorema 11. Sea $u(x, y)$ una función que satisface $\Delta u = 0$ en un dominio acotado Ω en $\mathbf{R}^2$ y sea (x_0, y_0) en Ω. Entonces

(10) $$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta$$

para toda $r > 0$ tal que el disco $\overline{B}(x_0, y_0; r) = \{(x, y): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$ está totalmente contenido en Ω.

[*Sugerencia*: Use un cambio de variables que transforme el disco $\overline{B}(x_0, y_0; r)$ en el disco unitario $\overline{B}(0, 0; 1)$.]

D. *Método numérico para $\Delta u = f$ en un rectángulo*

Sea R el rectángulo abierto

$$R = \{(x, y): a < x < b,\ \ c < y < d\}$$

y ∂R su frontera. Aquí describiremos una técnica numérica para resolver el problema de Dirichlet generalizado

(11) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)\ , \quad \text{para } (x, y) \text{ en } R\ ,$$
$$u(x, y) = g(x, y)\ , \quad \text{para } (x, y) \text{ en } \partial R\ .$$

El método es similar a la técnica de diferencias finitas analizado en el capítulo 4. Primero elegimos enteros positivos m y n y tamaños de paso h y k de modo que $b - a = hm$ y $d - c = kn$. El intervalo $[a, b]$ se divide ahora en m subintervalos iguales y $[c, d]$ en n subintervalos iguales. Los puntos de la partición son

$$x_i = a + ih\ , \qquad 0 \leq i \leq m\ ,$$
$$y_j = c + jk\ , \qquad 0 \leq j \leq n$$

(véase la figura 10.28). Las líneas (punteadas) $x = x_i$ y $y = y_j$ se llaman **líneas de la malla** y sus intersecciones (x_i, y_j) son los **puntos de la malla** de la partición. Queremos obtener aproxi-

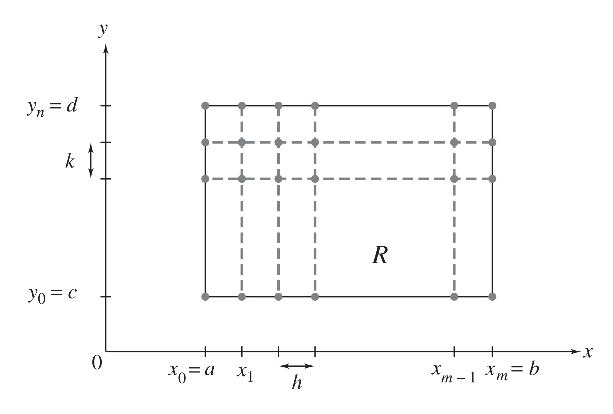


Figura 10.28 Malla rectangular

maciones de la solución $u(x, y)$ del problema (11) en cada punto *interior* de la malla, es decir, en (x_i, y_j) tal que $1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq n-1$. (Por supuesto, de (11), tenemos los valores de $u(x, y)$ en los puntos frontera de la malla; por ejemplo, $u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j)$, $0 \leq j \leq n$.)

El siguiente paso consiste en aproximar las derivadas parciales $\partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial^2 u/\partial y^2$ usando las *aproximaciones con diferencias centradas*

(12) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)\right] \quad \text{para } 1 \leq i \leq m-1 \ ,$$

y

(13) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{k^2}\left[u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})\right] \quad \text{para } 1 \leq j \leq n-1 \ .$$

Estas aproximaciones se basan en la fórmula genérica

$$y''(x) = [y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)]/h^2 + [\text{términos que implican a } h^2, h^3, \ldots] \quad ,$$

que es consecuencia del desarrollo en serie de Taylor de $y(x)$.

(a) Muestre que al sustituir las aproximaciones (12) y (13) en el problema de Dirichlet (11) obtenemos el siguiente sistema:

(14) $$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right]u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k}\right)^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

para $i = 1, 2, \ldots, m-1$, y $j = 1, 2, \ldots, n-1$;

$u_{0,j} = g(a, y_j)$, $u_{m,j} = g(b, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$,

$u_{i,0} = g(x_i, c)$, $u_{i,n} = g(x_i, d)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$,

donde $u_{i,j}$ aproxima a $u(x_i, y_j)$.

Observe que cada ecuación en (14) implica aproximaciones de la solución que aparecen en una cruz con centro en un punto de la malla (véase la figura 10.29).

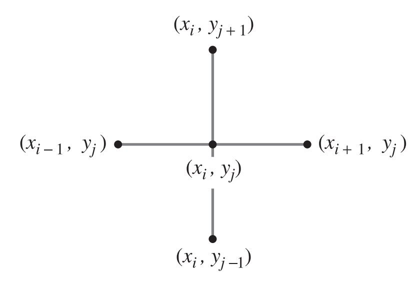


Figura 10.29 La solución aproximada $u_{i,j}$ en (x_i, y_j) se obtiene a partir de los valores en los extremos de la cruz

(b) Muestre que el sistema de la parte (a) es un sistema lineal de $(m-1)(n-1)$ incógnitas con $(m-1)(n-1)$ ecuaciones.

(c) Para la ecuación de Laplace con $f(x, y) \equiv 0$, muestre que cuando $n = k$, la ecuación (14) implica que

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \ .$$

Compare esta fórmula de promedio con la propiedad del valor medio del teorema 11 (proyecto C).

(d) Para la placa cuadrada

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 0.4, 0 \leq y \leq 0.4\} ,$$

mantenemos la temperatura de la frontera como sigue:

$$u(0, y) = 0 , \qquad u(0.4, y) = 10y , \qquad 0 \leq y \leq 0.4 .$$
$$u(x, 0) = 0 , \qquad u(x, 0.4) = 10x , \qquad 0 \leq x \leq 0.4 .$$

Use el sistema de la parte (a) con $f(x, y) \equiv 0$, $m = n = 4$ y $h = k = 0.1$ para determinar aproximaciones de las temperaturas de estado estacionario en los puntos de la malla de la placa. [*Sugerencia*: Es útil nombrar a los puntos de la malla con un solo índice, digamos, $p_1, p_2, \ldots, p_q$, eligiendo el orden como al leer un libro.]

CAPÍTULO 11

Problemas de valores propios y ecuaciones de Sturm-Liouville

11.1 INTRODUCCIÓN: FLUJO DE CALOR EN UN ALAMBRE NO UNIFORME

Formule la ecuación diferencial y las condiciones en la frontera para el flujo de calor a través de un alambre delgado aislado, con densidad, conductividad térmica y capacidad calórica específica no uniforme, sujeto a condiciones generales en la frontera en sus extremos.

En la sección 10.1 obtuvimos la siguiente ecuación para la temperatura $u(x, t)$ en un alambre con densidad $\rho(x)$, conductividad térmica $k(x)$ y capacidad calórica específica $c(x)$ (véase la ecuación (3) en la sección 10.1):

$$\textbf{(1)} \qquad c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right] + Q(x, t) \ .$$

Analizamos esta ecuación para el caso en que c, ρ y k eran independientes de la posición; ahora no podremos darnos ese lujo.

Si los extremos del alambre se mantienen a 0°C, pedimos que $u(x, t)$ satisfaga las condiciones en la frontera

$$\textbf{(2)} \qquad u(0, t) = u(L, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

donde L es la longitud del alambre. Si $f(x)$ denota la distribución inicial de temperatura en el alambre, entonces $u(x, t)$ debe satisfacer además la condición inicial

$$\textbf{(3)} \qquad u(x, 0) = f(x) \ , \qquad 0 < x < L \ .$$

Así, vemos que un modelo matemático para el flujo de calor a través de un alambre no uniforme está dado por el problema con valores iniciales y en la frontera formado por las ecuaciones (1), (2) y (3).

En ciertos casos, como el del calor producido por una reacción química, la expresión para la fuente o pozo interno $Q(x, t)$ se puede modelar mediante un término proporcional a la

temperatura, $q(x)u(x, t)$. La mayor parte de los demás tipos de fuentes son independientes de la temperatura y se modelan mediante una función explícita (conocida) $h(x, t)$. Por lo tanto, una ecuación muy general para el flujo de calor en un alambre no uniforme está dada por

$$\textbf{(4)} \qquad c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right] + q(x)u(x, t) + h(x, t) \; .$$

En el problema original, las temperaturas en los extremos del alambre se mantenían constantes. Más en general, los extremos del alambre podrían estar aislados, $\partial u/\partial x = 0$, o sólo parcialmente aislados, $\partial u/\partial x + cu = 0$. Para generalizar la situación, suponemos entonces que $u(x, t)$ satisface condiciones en la frontera en $x = a$ y $x = b$ de la forma

$$\textbf{(5)} \qquad a_1 u(a, t) + a_2\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \; , \qquad b_1 u(b, t) + b_2\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0$$

para toda $t > 0$. Éstas se llaman **condiciones separadas en la frontera**, pues la condición impuesta sobre $u(x, t)$ en $x = a$ no depende de los valores de $u(x, t)$ en $x = b$ y viceversa.

De (4), (5) y (3), obtenemos el siguiente modelo general para el flujo del calor en un alambre no uniforme

$$\textbf{(6)} \qquad r(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right] + q(x)u(x, t) + h(x, t) \; , \qquad a < x < b \; , \qquad t > 0 \; ,$$

$$\textbf{(7)} \qquad a_1 u(a, t) + a_2\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \; , \qquad b_1 u(b, t) + b_2\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0 \; , \qquad t > 0 \; ,$$

$$\textbf{(8)} \qquad u(x, 0) = f(x) \; , \qquad a < x < b \; ,$$

donde $r(x) = c(x)\rho(x)$ y $p(x) = k(x)$.

En el capítulo 10 usamos el método de separación de variables para resolver estos tipos de problemas. En particular, analizamos técnicas para trabajar con el término no homogéneo $h(x, t)$ (véase el ejemplo 3 de la sección 10.5 y el ejemplo 1 de la sección 10.6). Por ahora supondremos que $h(x, t) \equiv 0$. Al aplicar el método de separación de variables a las ecuaciones (6) y (7), es decir, al hacer $u(x, t) = X(x)T(t)$, llegamos al **problema de valores propios para $y(x)$**:

$$\textbf{(9)} \qquad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \; , \qquad a < x < b \; ,$$

$$\textbf{(10)} \qquad a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \; , \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \; ,$$

donde λ es un número por determinar. (El lector debe verificar esta afirmación.) El sistema (9)-(10) es un **problema de Sturm-Liouville con valores en la frontera**.† Excluimos las condiciones triviales en la frontera, donde $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$. Cuando $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[a, b]$ y $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$, nos referimos a este sistema como un problema **regular** de Sturm-Liouville con valores en la frontera.

La mayor parte de los problemas de valores propios del capítulo 10 eran regulares. Sin embargo, decimos que la ecuación es **singular** cuando las hipótesis sobre p, p', q y r sólo

---

†***Nota histórica:*** Estos sistemas también se llaman **sistemas de Sturm-Liouville** o **problemas de Sturm-Liouville**. Reciben este nombre en honor del matemático suizo Jacques Charles François Sturm (1803-1855) y el matemático francés Joseph Liouville (1809-1882), quienes estudiaron esta clase de problemas con valores en la frontera en la década de 1830.

son válidas en el intervalo abierto (a, b) y no en el intervalo cerrado; si p se anula en a o b; si $p(x)$, $q(x)$ o $r(x)$ no están acotadas cuando x tiende a a o a b; o cuando el intervalo (a, b) no está acotado. Un ejemplo de problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera es el de determinar soluciones no triviales para la ecuación de Bessel

(11) $$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda xy = 0 , \qquad 0 < x < b ,$$

que satisfagan las condiciones en la frontera

(12) $\lim_{x \to 0^+} y(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} y'(x)$ existen y son finitos y $y(b) = 0$.

Este problema surge al estudiar el flujo de calor en un cilindro. En este caso, $p(x) = r(x) = x$, que se anula en $x = 0$. Las condiciones en la frontera en (12) son típicas de los problemas singulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera.

Otra clase importante de condiciones en la frontera es la clase de condiciones periódicas, que ya hemos estudiado en el contexto de la ecuación de Laplace en un disco (véase la sección 10.7). Si buscamos soluciones con periodo P para la ecuación (9), entonces necesitamos que la solución $y(x)$ satisfaga las **condiciones periódicas en la frontera**

(13) $$y(0) = y(P) , \qquad y'(0) = y'(P) .$$

Como veremos, la teoría de problemas periódicos de Sturm-Liouville está muy relacionada con la teoría de problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera.

El tipo de problemas con valores en la frontera que surgen de la aplicación del método de separación de variables depende de la geometría de la región. Por supuesto, hay que elegir un sistema de coordenadas que permita separar las variables. En el capítulo 10 usamos las coordenadas rectangulares y las polares.†

En este capítulo estudiaremos las propiedades de los problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera. En la sección 11.2 iniciamos con un análisis de los valores propios y las funciones propias. En la sección 11.3 analizamos los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Los problemas no homogéneos con valores en la frontera y la alternativa de Fredholm se analizan en la sección 11.4. Daremos dos métodos para resolver los problemas no homogéneos: el método de desarrollo en términos de funciones propias (sección 11.5) y las funciones de Green (sección 11.6). En la sección 11.7 analizamos tres ejemplos de problemas singulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera: la ecuación de Bessel, la ecuación de Legendre y la ecuación de Hermite. Por último, en la sección 11.8, describimos la ubicación de los ceros para las soluciones de ecuaciones de Sturm-Liouville, según el teorema de separación de Sturm, el teorema fundamental de Sturm y el teorema de comparación de Picone.

11.2 VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

El problema de determinar una solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden

(1) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) , \qquad a < x < b ,$$

†Otros sistemas de coordenadas utilizados para ciertas regiones geométricas especiales se analizan en el texto de G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 4a. edición (Academic Press, Nueva York, 1995), capítulo 2.

que satisface las condiciones en la frontera

(2)
$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = c_1 ,$$
$$a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = c_2 ,$$

es un **problema con valores en la frontera en dos puntos.** Las condiciones en (2) son ejemplos de condiciones lineales en la frontera. Cuando $c_1 = c_2 = 0$, decimos que las condiciones en la frontera son **homogéneas**; en caso contrario, son **no homogéneas**.

Ciertas condiciones en la frontera aparecen con frecuencia en las aplicaciones; estas condiciones son

Separadas: $a_1y(a) + a_2y'(a) = c_1$, $b_1y(b) + b_2y'(b) = c_2$.

De Dirichlet:† $y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2$.

De Neumann:†† $y'(a) = c_1, \quad y'(b) = c_2$.

Periódicas: $y(-T) = y(T)$, $y'(-T) = y'(T)$, o $y(0) = y(2T)$, $y'(0) = y'(2T)$,

donde el periodo es $2T$.

Observe que las condiciones de Dirichlet y de Neumann son tipos especiales de condiciones separadas en la frontera.

Para los problemas con valores en la frontera que implican ecuaciones de tercer o mayor orden, por lo general se especifica un número de condiciones en la frontera igual al orden de la ecuación. Cuando el orden es par, estas condiciones en la frontera se separan por lo general, de modo que la mitad de las condiciones se imponen en el extremo $x = a$ y la otra mitad en $x = b$. Más adelante, en esta sección daremos un ejemplo de un problema de cuarto orden.

Para la ecuación homogénea con condiciones homogéneas en la frontera

(3)
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 , \qquad a < x < b ;$$

(4)
$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 ,$$
$$a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 ,$$

es fácil verificar que si $\phi(x)$ es una solución no trivial de (3)-(4), entonces también lo es $A\phi$ para cualquier elección de la constante A. Esto proporciona una *familia a un parámetro* de soluciones. Si (3)-(4) tiene dos soluciones linealmente independientes $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, entonces $A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x)$ también es solución para cualquier elección de A_1 y A_2; por lo tanto, tenemos una *familia a dos parámetros* de soluciones. La otra posibilidad es que $\phi(x) \equiv 0$ sea la única solución de (3)-(4), en cuyo caso existe una única solución. En consecuencia, pueden surgir tres situaciones: el problema con valores en la frontera (3)-(4) tiene una única solución, una familia a un parámetro de soluciones, o una familia a dos parámetros de soluciones (véase el problema 31).

---

†***Nota histórica:*** Lleva este nombre en honor del matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) como resultado de su trabajo en cálculo de variaciones. Además, él fue el primero en dar una demostración rigurosa de la convergencia de las series de Fourier.

††***Nota histórica:*** Lleva este nombre en honor del matemático alemán Karl Gottfried Neumann (1832-1925), quien estudió ecuaciones diferenciales e integrales, así como variables complejas.

La situación para el problema no homogéneo (1)-(2) es similar. Sin embargo, existe una posibilidad adicional: *el problema no homogéneo puede no tener soluciones*. Los siguientes ejemplos ilustran las diversas posibilidades.

EJEMPLO 1 Determinar todas las soluciones del problema con valores en la frontera

(5) $$y'' + 2y' + 5y = 0 \; ;$$

(6) $$y(0) = 2 \; , \qquad y(\pi/4) = 1 \; .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar para (5) es $r^2 + 2r + 5 = 0$, que tiene las raíces $r = -1 \pm 2i$. Por lo tanto, una solución general de (5) es $y(x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x}$ sen $2x$. Ahora trataremos de determinar c_1 y c_2 de modo que se cumplan las condiciones en la frontera en (6). Al hacer $x = 0$ y $\pi/4$, vemos que

$$y(0) = c_1 = 2 \; , \qquad y(\pi/4) = c_2 e^{-\pi/4} = 1 \; .$$

Por consiguiente, $c_1 = 2$ y $c_2 = e^{\pi/4}$, de modo que el problema (5)-(6) tiene la solución única

$$y(x) = 2e^{-x} \cos 2x + e^{\pi/4} e^{-x} \operatorname{sen} 2x \; . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Determinar todas las soluciones del problema con valores en la frontera

(7) $$y'' + y = \cos 2x \; ;$$

(8) $$y'(0) = 0 \; , \qquad y'(\pi) = 0 \; .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar para (7) es $r^2 + 1 = 0$, de modo que una solución general para la ecuación homogénea correspondiente es $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2$ sen x. Como sabemos por el método de coeficientes indeterminados, una solución particular de (7) tiene la forma $y_p(x) = A$ cos $2x + B$ sen $2x$. Al sustituir y_p en (7) y despejar A y B, vemos que $A = -1/3$ y $B = 0$. Por lo tanto, $y_p(x) = -(1/3)$ cos $2x$. Así, una solución general de (7) es

(9) $$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - (1/3) \cos 2x \; .$$

Para determinar los valores c_1 y c_2, sustituimos la solución general (9) en (8) y obtenemos

$$y'(0) = c_2 = 0 \; , \qquad y'(\pi) = -c_2 = 0 \; .$$

Así, $c_2 = 0$ y c_1 es arbitrario. Así, el problema (7)-(8) tiene una familia a un parámetro de soluciones; a saber,

$$y(x) = c_1 \cos x - (1/3) \cos 2x \; ,$$

donde c_1 es cualquier número real. ■

EJEMPLO 3 Determinar las soluciones de

(10) $$y'' + 4y = 0 \; ;$$

(11) $$y(-\pi) = y(\pi) \; , \qquad y'(-\pi) = y'(\pi) \; .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar para (10) es $r^2 + 4 = 0$, de modo que una solución general es

(12) $$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x \; .$$

Como cos $2x$ y sen $2x$ son funciones con periodo π (y por tanto con periodo 2π), tenemos que $y(-\pi) = y(\pi)$. Además, $y'(x) = -2c_1$ sen $2x + 2c_2$ cos $2x$ también tiene periodo π, de modo que $y'(-\pi) = y'(\pi)$. Así, (10)-(11) tiene una familia a dos parámetros de soluciones dadas por (12), donde c_1 y c_2 son parámetros. ■

Veamos qué ocurre si, en el ejemplo anterior, reemplazamos la ecuación (10) por la ecuación no homogénea

(13) $$y'' + 4y = 4x .$$

Una solución general para (13) es

(14) $$y(x) = x + c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x .$$

Como $y(-\pi) = -\pi + c_1$ y $y(\pi) = \pi + c_1$, vemos que no existen soluciones de (13) que satisfagan $y(-\pi) = y(\pi)$. Así, el problema no homogéneo con valores en la frontera (13)-(11) *no tiene soluciones*.

Los problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera presentados en la sección anterior son ejemplos de problemas con valores en la frontera en dos puntos que implican un parámetro λ. Nuestro objetivo es determinar para qué valores de λ ocurre que el problema con valores en la frontera

(15) $$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 , \qquad a < x < b ,$$

(16) $$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 , \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 ,$$

tiene soluciones no triviales. Tales problemas se llaman **problemas de valores propios**. Las soluciones no triviales se llaman **funciones propias** y el número correspondiente λ es un **valor propio**.[†]

Una razón para la importancia de los problemas de valores propios es que surgen al usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales (véase la sección 10.2). Por lo tanto, es importante recordar algunos ejemplos sencillos de estos problemas, resueltos en el capítulo 10.

Condiciones de Dirichlet en la frontera:

(17) $$y'' + \lambda y = 0 ; \qquad y(0) = y(L) = 0 ,$$

con los valores propios $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, y las funciones propias correspondientes

$$\phi_n(x) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ,$$

donde las a_n son constantes arbitrarias no nulas (véase la sección 10.2).

Condiciones de Neumann en la frontera:

(18) $$y'' + \lambda y = 0 ; \qquad y'(0) = y'(L) = 0 ,$$

[†]Los lectores familiarizados con el álgebra lineal reconocerán estos valores propios y funciones propias con los valores y vectores propios del operador lineal definido por $\mathscr{L}[y] := -(1/r)(py')' - (q/r)y$, donde el dominio de $\mathscr{L}$ consta de las funciones dos veces diferenciables que satisfacen (16).

con los valores propios $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y las funciones propias correspondientes

$$\phi_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ,$$

donde las c_n son constantes arbitrarias no nulas (véase el ejemplo 1 de la sección 10.5).

Condiciones periódicas en la frontera:

(19) $$y'' + \lambda y = 0 ; \quad y(-\pi) = y(\pi) , \quad y'(-\pi) = y'(\pi) ,$$

con los valores propios $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y las funciones propias correspondientes

$$\phi_0(x) = A_0 , \quad \phi_n(x) = A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx , \quad n \geq 1 ,$$

donde las A_n y las B_n son constantes arbitrarias, no ambas nulas (véase el ejemplo 2 de la sección 10.7). Observe que para el problema de valores propios (19) que implica condiciones periódicas en la frontera, tenemos dos funciones propias linealmente independientes para cada valor propio distinto de cero λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

En el siguiente ejemplo mostramos que incluso para la sencilla ecuación $y'' + \lambda y = 0$, podría ser difícil determinar con exactitud a los valores propios.

EJEMPLO 4 Determinar todos los valores propios reales y funciones propias correspondientes para

(20) $$y'' + \lambda y = 0 ;$$

(21) $$y(0) = 0 , \quad 3y(\pi) - y'(\pi) = 0 .$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar para (20) es $r^2 + \lambda = 0$. La naturaleza de las raíces varía para λ negativa, cero y positiva, de modo que consideraremos estos casos por separado.

Caso 1. $\boldsymbol{\lambda < 0}$. Sea $\lambda = -\mu^2$ para $\mu > 0$. Las raíces de la ecuación auxiliar son $r = \pm\mu$, de modo que una solución general de (20) es $y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$. Es más conveniente expresar la solución general en términos de funciones hiperbólicas, de modo que escribimos $y(x)$ en la forma equivalente $y(x) = C_1 \cosh \mu x + C_2 \operatorname{senh} \mu x$. Al sustituir en las condiciones en la frontera en (21) llegamos a

$$C_1 = 0 , \quad 3(C_1 \cosh \mu\pi + C_2 \operatorname{senh} \mu\pi) - (\mu C_1 \operatorname{senh} \mu\pi + \mu C_2 \cosh \mu\pi) = 0 .$$

Para $C_1 = 0$, la última ecuación se convierte en

$$C_2(3 \operatorname{senh} \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi) = 0 .$$

Para obtener una solución no trivial, debemos tener $C_2 \neq 0$, de modo que $3 \operatorname{senh} \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi = 0$; es decir, μ debe satisfacer

(22) $$\tanh \mu\pi = \frac{1}{3}\mu .$$

Es fácil ver que en el plano μy, la recta $y = \mu/3$ corta a la curva $y = \tanh \mu\pi$ sólo una vez para $\mu > 0$ (véase la figura 11.1 de la página 692). Por lo tanto, sólo existe una solución positiva de (22), que denotaremos μ_0.

En resumen, el problema con valores en la frontera (20)-(21) tiene un valor propio negativo $\lambda_0 = -\mu_0^2$, tal que $\tan \mu_0\pi = \mu_0/3$, y las funciones propias correspondientes son $y_0(x) = c_0 \operatorname{senh} \mu_0 x$, con $c_0 \neq 0$ arbitrario.

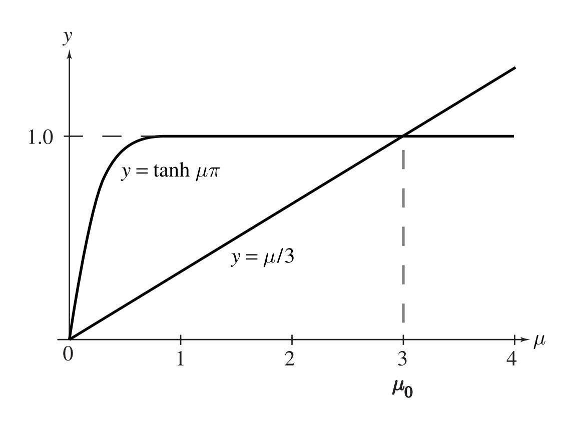


Figura 11.1 Gráficas de $y = \mu/3$ y $y = \tanh \mu\pi$

Caso 2. $\lambda = 0$. En este caso, cero es una raíz doble de la ecuación auxiliar, de modo que una solución general de (20) es $y(x) = c_1 x + c_2$. Al sustituir en (21) tenemos

$$c_2 = 0 \ , \qquad 3\pi c_1 + 3c_2 - c_1 = 0 \ ,$$

que tiene la solución $c_1 = c_2 = 0$. Así, sólo tenemos la solución trivial (y en particular, no tenemos funciones propias).

Caso 3. $\lambda > 0$. Sea $\lambda = \mu^2$ para $\mu > 0$. Las raíces de la ecuación auxiliar son $r = \pm\mu i$, y una solución general de (20) es $y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x$. Al sustituir en (21) tenemos

$$c_1 = 0 \ , \qquad 3(c_1 \cos \mu\pi + c_2 \operatorname{sen} \mu\pi) - (-\mu c_1 \operatorname{sen} \mu\pi + \mu c_2 \cos \mu\pi) = 0 \ .$$

Al hacer $c_1 = 0$ en la última ecuación, obtenemos

$$c_2(3 \operatorname{sen} \mu\pi - \mu \cos \mu\pi) = 0 \ .$$

Entonces c_2 es igual a cero o $3 \operatorname{sen} \mu\pi - \mu \cos \mu\pi = 0$. Es decir, para que existan soluciones no triviales, μ debe satisfacer la ecuación

$$\textbf{(23)} \qquad \tan \mu\pi = \frac{1}{3}\mu \ .$$

Para determinar si hay valores de $\mu > 0$ que satisfagan (23), examinamos las gráficas de $y = \mu/3$ y $y = \tan \mu\pi$. Para los valores de $\mu > 0$ donde se cortan las gráficas, tenemos una solución de (23). La figura 11.2 muestra que existe una infinidad de tales valores de μ. Sea μ_1 el menor de tales valores, μ_2 el siguiente, y así sucesivamente. Para cada μ_n, tenemos que $y_n(x) = c_2 \operatorname{sen} \mu_n x$, con $c_2 \neq 0$, es una solución no trivial de (20)-(21) con $\lambda = \mu_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Los tres casos anteriores muestran que los valores propios de (20)-(21) son $\lambda_0 = -\mu_0^2$, donde $\tanh \mu_0\pi = \mu_0/3$ y $\lambda_n = \mu_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde $\tan \mu_n\pi = \mu_n/3$. Las funciones propias correspondientes son $y_0 = c_0 \operatorname{senh} \mu_0 x$ y $y_n = c_n \operatorname{sen} \mu_n x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las c_n son constantes arbitrarias no nulas. Es interesante observar en la figura 11.2 que cuando n

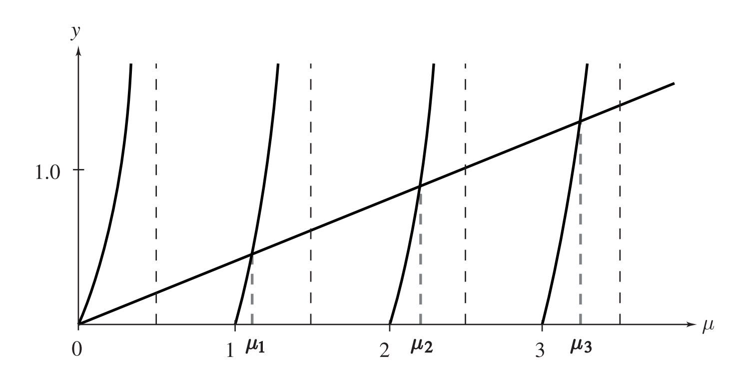


Figura 11.2 Gráficas de $y = \mu/3$ y $y = \tan \mu\pi$

crece, μ_n tiende a un múltiplo impar de $1/2$. Es decir, $\lambda_n \approx (2n + 1)^2/4$ cuando n es grande. Podemos usar un esquema numérico, como el método de Newton, para resolver $\tanh \mu_0\pi = \mu_0/3$ y $\tan \mu_1\pi = \mu_1/3$, para mostrar que $\lambda_0 \approx -9.00000$ y $\lambda_1 \approx 1.23897$. ■

En el ejemplo anterior sólo trabajamos con los valores propios *reales*. En la siguiente sección mostraremos que los valores propios de los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera son necesariamente reales, y no complejos.

EJEMPLO 5 Determinar todos los valores propios y funciones propias para

(24) $$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 , \qquad 1 < x < e ,$$

(25) $$y(1) = 0 , \qquad y(e) = 0 .$$

SOLUCIÓN Podemos escribir la ecuación (24) como la ecuación de Cauchy-Euler

(26) $$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 .$$

(En las secciones 4.5 y 8.5 estudiamos las ecuaciones de Cauchy-Euler.) Al sustituir $y = x^r$ obtenemos $r^2 + \lambda = 0$ como ecuación auxiliar de (26). De nuevo consideramos los tres casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.

Caso 1. $\boldsymbol{\lambda < 0}$. Sea $\lambda = -\mu^2$ para $\mu > 0$. Las raíces de la ecuación auxiliar son $r = \pm\mu$, de modo que una solución general de (26) es $y(x) = c_1x^{\mu} + c_2x^{-\mu}$. Al sustituir en las condiciones en la frontera (25) llegamos a

$$c_1 + c_2 = 0 ,$$
$$c_1e^{\mu} + c_2e^{-\mu} = 0 ,$$

cuya única solución para $\mu > 0$ es $c_1 = c_2 = 0$. Así, no hay valores propios $\lambda < 0$.

Caso 2. $\boldsymbol{\lambda = 0}$. En este caso, cero es una raíz doble de la ecuación auxiliar y una solución general de (26) es $y(x) = c_1 + c_2 \ln x$. Al sustituir en (25) tenemos

$$c_1 = 0, \qquad c_1 + c_2 = 0 .$$

De nuevo, la solución es $c_1 = c_2 = 0$, de modo que $\lambda = 0$ no es un valor propio.

Caso 3. $\lambda > 0$. Sea $\lambda = \mu^2$ para $\mu > 0$. Las raíces de la ecuación auxiliar son ahora $r = \pm\mu i$, y una solución general de (26) es $y(x) = c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\mu \ln x)$. Al sustituir en (25) tenemos

$$c_1 = 0 , \qquad c_1 \cos \mu + c_2 \operatorname{sen} \mu = 0 .$$

Si $c_1 = 0$, la última ecuación se convierte en c_2 sen $\mu = 0$. Para $\mu = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sen $\mu =$ sen $n\pi = 0$ y obtenemos las soluciones no triviales $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi \ln x)$ de (24)-(25).

En resumen, el problema (24)-(25) tiene los valores propios $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, con las funciones propias correspondientes $y_n = c_n \operatorname{sen}(n\pi \ln x)$, donde c_n es una constante arbitraria no nula. ■

Los problemas de valores propios para ecuaciones lineales de orden superior aparecen en la mecánica del continuo y, en particular, en los problemas de vibración y doblamiento de vigas. Una de tales ecuaciones es

$$\textbf{(27)} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \lambda y = 0 , \qquad 0 < x < L ,$$

donde y es el desplazamiento transversal de una viga elástica uniforme de longitud L. Si la viga tiene densidad lineal ρ, momento de inercia en la sección transversal I, y módulo de elasticidad de Young E, entonces $\lambda = K\rho/EI$, donde K es una constante por determinar. Si la viga está apoyada de manera simple en sus extremos, entonces imponemos las condiciones en la frontera

$$y(0) = y''(0) = 0 , \qquad y(L) = y''(L) = 0$$

(véase la figura 11.3(a)). Si tenemos una viga voladiza, donde uno de los extremos está empotrado mientras que el otro se mueve libremente, entonces las condiciones en la frontera son

$$y(0) = y'(0) = 0 , \qquad y''(L) = y'''(L) = 0$$

(véase la figura 11.3(b)). En ambos casos se puede mostrar que los valores propios deben ser negativos. Dejaremos el cálculo de los valores propios y las funciones propias como ejercicios (véanse los problemas 28 y 29).



Figura 11.3 Viga apoyada de manera simple (a) y una viga voladiza (b)

Los problemas de valores propios para ecuaciones diferenciales estudiados aquí y los problemas de valores propios para matrices, analizados en el capítulo 9, son ejemplos de problemas de valores propios para operadores lineales. Tales problemas se estudian en el campo de las matemáticas llamado *teoría espectral*. En la siguiente sección veremos que hay una relación muy estrecha entre las propiedades de los valores y vectores propios para matrices reales simétricas (o hermitianas) y para problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera.

EJERCICIOS 11.2

En los problemas 1 a 12, determine las soluciones, si éstas existen del problema con valores en la frontera dado.

1. $y'' + 2y' + 26y = 0$;
$y(0) = 1$, $y(\pi) = -e^{-\pi}$.

2. $y'' + y = x + 1$; $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

3. $y'' - 4y' + 13y = 0$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

4. $y'' + 4y' + 8y = 0$;
$y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

5. $y'' + y = \operatorname{sen} 2x$;
$y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$.

6. $y'' - y = x$;
$y(0) = 3$, $y'(1) = 2e - e^{-1} - 1$.

7. $y'' + y = e^x$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) + y'(\pi) = 0$.

8. $y'' + 4y = 4$;
$y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$.

9. $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x$;
$y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$.

10. $y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

11. $x^2y'' + xy' + y = 4x^{-1}$;
$y(1) = 2$, $y(e^\pi) = 2e^{-\pi}$.

12. $y'' + y = x$; $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

En los problemas 13 a 20, determine todos los valores propios reales y funciones propias para el problema de valores propios dado.

13. $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

14. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(-3) = y(3)$, $y'(-3) = y'(3)$.

15. $y'' + 3y + \lambda y = 0$;
$y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

16. $y'' - 2y + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

17. $y'' + \lambda y = 0$;
$2y(0) + y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

18. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) - 2y'(\pi) = 0$.

19. $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$;
$y'(1) = 0$, $y(e^\pi) = 0$.

20. $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$;
$y'(1) = 0$, $y'(e) = 0$.

En los problemas 21 y 22, use el método de Newton (apéndice A) para determinar, con tres cifras decimales, los tres primeros valores propios para el problema de valores propios dado.

21. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(0) + 2y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

22. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$.

En los problemas 23 a 26, determine todos los valores reales de λ para los que el problema con valores en la frontera dado tenga una solución no trivial. Encuentre además las soluciones correspondientes.

23. $y'' + y' + \lambda(y' + y) = 0$;
$y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

24. $x^2y'' + \lambda(xy' - y) = 0$;
$y(1) = 0$, $y'(e) = 0$.

25. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y(1 + \lambda^2) = 0$.

26. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$; $\lambda y(\pi) - y'(\pi) = 0$.

En los problemas 27 a 29, determine todos los valores propios reales no positivos y las funciones propias de los problemas de cuarto orden con valores en la frontera dados. [*Sugerencia*: Sea $\lambda = -\mu^4$, $\mu > 0$ o $\lambda = 0$.]

27. $y^{(4)} + \lambda y = 0$;
$y(0) = y'(0) = 0$, $y(L) = y'(L) = 0$.

28. $y^{(4)} + \lambda y = 0$;
$y(0) = y'(0) = 0$, $y''(L) = y'''(L) = 0$.

29. $y^{(4)} + \lambda y = 0$;
$y(0) = y''(0) = 0$, $y(L) = y''(L) = 0$.

30. Demuestre que el problema no homogéneo con valores en la frontera (1)-(2) tiene una única solución para cada función continua f y números c_1 y c_2 si y sólo si el problema homogéneo con valores en la frontera correspondiente, con $f(x) \equiv 0$ y $c_1 = c_2 = 0$ tiene sólo la solución trivial $y(x) \equiv 0$.

31. Demuestre que el problema homogéneo con valores en la frontera (3)-(4) tiene sólo la solución trivial, una familia a un parámetro de soluciones, o una familia a dos parámetros de soluciones.

32. Demuestre que el problema no homogéneo con valores en la frontera (1)-(2) no tiene solución, tiene una única solución, una familia a un parámetro de soluciones, o una familia a dos parámetros de soluciones. [*Sugerencia*: Si y_p es una solución de (1)-(2) y y es otra solución de (1)-(2), use el principio de superposición para mostrar que $y - y_p$ es una solución del problema homogéneo (3)-(4). La conclusión se sigue del resultado en el problema 31.]

33. Ecuación diferencial parcial. Suponga que el problema

$$u_{tt} = u_{xx} + 2u_x \ ; \qquad 0 < x < \pi \ , \qquad t > 0 \ ,$$
$$u(0, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$
$$u(\pi, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

tiene una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$.

(a) Use el método de separación de variables analizado en la sección 10.2 para deducir el siguiente problema de valores propios para $X(x)$:

$$X''(x) + 2X'(x) + \lambda X(x) = 0 \ ;$$
$$X(0) = X(\pi) = 0 \ .$$

(b) Determine los valores propios λ y las funciones propias correspondientes para el problema de la parte (a).

34. Suponga que el problema

$$u_t = u_{xx} + u \ ; \qquad 0 < x < 1 \ , \qquad t > 0 \ ,$$
$$u_x(0, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$
$$u_x(1, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ ,$$

tiene una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$.

(a) Use el método de separación de variables analizado en la sección 10.2 para deducir el siguiente problema de valores propios para $X(x)$:

$$X''(x) + (1 + \lambda)X(x) = 0 \ ;$$
$$X'(0) = X'(1) = 0 \ .$$

(b) Determine los valores propios λ y las funciones propias correspondientes para el problema de la parte (a).

35. Ecuación de Helmholtz. Al resolver el problema de la membrana vibrante, aparece la ecuación de Helmholtz

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha^2 u = 0 \ ,$$
$$0 < x < a \ , \qquad 0 < y < b \ ,$$

con condiciones en la frontera

$$u(0, y) = u(a, y) = 0 \ , \qquad 0 < y < b \ ,$$
$$u(x, 0) = u(x, b) = 0 \ , \qquad 0 < x < a \ .$$

Use el método de separación de variables analizado en la sección 10.2 para hallar los valores propios α^2 y las funciones propias correspondientes.

11.3 PROBLEMAS REGULARES DE STURM-LIOUVILLE CON VALORES EN LA FRONTERA

En esta sección analizamos los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera, es decir, problemas de valores propios de la forma

$$\textbf{(1)} \qquad \big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \ , \qquad a < x < b \ ;$$

$$\textbf{(2)} \qquad \begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \ , \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \ , \end{aligned}$$

donde $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ con valores reales, $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$. Excluimos los casos en que $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$.

De inmediato surge la siguiente pregunta. ¿Podemos escribir una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden cualquiera en la forma de una ecuación de Sturm-Liouville? Es decir, ¿podemos convertir la ecuación

$$\textbf{(3)} \qquad A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$$

en una ecuación del mismo tipo que (1)? Para hacer esto, quisiéramos determinar p de modo que $(py')' = py'' + p'y' = A_2y'' + A_1+y'$. Esto significa que $p = A_2$ y $p' = A_1$. Pero en general, $A_2' \neq A_1$, de modo que este método directo no siempre es aplicable. Podemos remediar esta situación encontrando un *factor integrante* $\mu(x)$ tal que al multiplicar (3) por μ, realmente obtengamos $(\mu A_2)' = \mu A_1$. Al hacer $p = \mu A_2$, la última ecuación se convierte en $p' = \mu A_1 = pA_1/A_2$. Al resolver esta ecuación separable en términos de p, tenemos

$$p(x) = Ce^{\int A_1(x)/A_2(x)dx} ,$$

donde C es arbitraria. Al hacer $C = 1$ y recordar que $\mu = p/A_2$, obtenemos

(4) $$\mu(x) = [1/A_2(x)]e^{\int A_1(x)/A_2(x)dx} .$$

Al multiplicar (3) por esta elección de μ se tiene

$$\mu A_2 y'' + \mu A_1 y' + \mu A_0 y + \lambda\mu\rho y = 0 ,$$

lo que se simplifica como

(5) $$(py')' + qy + \lambda ry = 0 ,$$

donde $p = \mu A_2$, $q = \mu A_0$ y $r = \mu\rho$. Observe que necesitamos que los coeficientes sean continuos y que $A_2(x)$ no sea igual a cero. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Convertir la siguiente ecuación a la forma de una ecuación de Sturm-Liouville:

(6) $$3x^2y''(x) + 4xy'(x) + 6y(x) + \lambda y(x) = 0 , \qquad x > 0 .$$

SOLUCIÓN En este caso, $A_2(x) = 3x^2$ y $A_1(x) = 4x$. Usamos la fórmula (4) para tener

$$\mu(x) = \frac{1}{3x^2}e^{\int A_1(x)/A_2(x)dx} = \frac{1}{3x^2}e^{\int (4x)/(3x^2)dx}$$
$$= \frac{1}{3x^2}e^{(4/3)\int x^{-1}dx} = \frac{1}{3x^2}e^{(4/3)\ln x} = \frac{x^{4/3}}{3x^2} = \frac{1}{3x^{2/3}} .$$

Al multiplicar la ecuación (6) por $\mu(x) = 1/(3x^{2/3})$, obtenemos

$$x^{4/3}y''(x) + \frac{4}{3}x^{1/3}y'(x) + 2x^{-2/3}y(x) + \lambda(3x^{2/3})^{-1}y(x) = 0 ,$$

(7) $$\left(x^{4/3}y'(x)\right)' + 2x^{-2/3}y(x) + \lambda(3x^{2/3})^{-1}y(x) = 0 . \blacksquare$$

En esta sección haremos

(8) $$\boldsymbol{L[y](x) := \left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x)} ,$$

de modo que podamos escribir la ecuación (1) en la forma compacta

$$L[y](x) + \lambda r(x)y(x) = 0 .$$

Usaremos esta notación para expresar las diversas identidades que surgen en nuestro estudio de los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera.

IDENTIDAD DE LAGRANGE PARA $L[y] = (py')' + qy$

Teorema 1. Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Entonces,

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}\left(pW[u, v]\right) , \tag{9}$$

donde $W[u, v] = uv' - vu'$ es el wronskiano de u y v.

Demostración. Usamos la regla del producto y sumamos y restamos $pu'v'$ para tener

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u[(pv')' + qv] - v[(pu')' + qu] \\ &= u(pv')' + quv - v(pu')' - quv \\ &= u(pv')' + \mathbf{u'(pv') - v'(pu')} - v(pu')' \\ &= [u(pv')]' - [v(pu')]' \\ &= [p(uv' - vu')]' \\ &= \frac{d}{dx}[pW[u, v]] . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Al integrar la identidad de Lagrange, obtenemos la siguiente ecuación llamada **fórmula de Green**.

FÓRMULA DE GREEN PARA $L[y] = (py')' + qy$

Corolario 1. Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b \left(uL[v] - vL[u]\right)(x)dx = \left(pW[u, v]\right)(x)\Big|_a^b . \tag{10}$$

Si además u y v satisfacen las condiciones en la frontera en (2), la fórmula de Green se simplifica a

$$\int_a^b \left(uL[v] - vL[u]\right)(x)dx = 0 . \tag{11}$$

Para ver esto, observe que cuando $a_2 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ en (2), entonces

$$\begin{aligned} u'(a) &= -(a_1/a_2)u(a) , \qquad & u'(b) &= -(b_1/b_2)u(b) , \\ v'(a) &= -(a_1/a_2)v(a) , \qquad & v'(b) &= -(b_1/b_2)v(b) . \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en el lado derecho de (10) tenemos

$$\begin{aligned} &p(b)W[u, v](b) - p(a)W[u, v](a) \\ &\quad = p(b)[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] - p(a)[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] \\ &\quad = p(b)[u(b)(-b_1/b_2)v(b) - (-b_1/b_2)u(b)v(b)] \\ &\qquad\quad - p(a)[u(a)(-a_1/a_2)v(a) - (-a_1/a_2)u(a)v(a)] \\ &\quad = 0 . \end{aligned}$$

Cuando $a_2 = 0$ (de modo que $a_1 \neq 0$), la ecuación (2) implica que $u(a)$ y $v(a)$ se anulan. Por lo tanto, $[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] = 0$. De manera análoga, cuando $b_2 = 0$, obtenemos $[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] = 0$. Por lo tanto, si u y v satisfacen cualquier instancia de las condiciones en la frontera en (2), entonces se cumple (11).

La ecuación (11) asume una forma particularmente útil y elegante al ser expresada en términos de un producto punto. Si hacemos

$$\textbf{(12)} \qquad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \ ,$$

entonces $(\cdot, \cdot)$ es un **producto interior** en el conjunto de funciones con valores reales definidas en $[a, b]$.† Con esta notación, podemos escribir (11) como

$$\textbf{(13)} \qquad (u, L[v]) = (L[u], v) \ .$$

Un operador diferencial lineal L que satisface (13) para todas las funciones u y v en su dominio se llama un **operador autoadjunto**. Hemos mostrado que si L está dada por (8) y el dominio de L es el conjunto de funciones que tienen segundas derivadas continuas en $[a, b]$ y satisfacen las condiciones en la frontera en (2), entonces L es un operador autoadjunto. Los operadores autoadjuntos son como las matrices simétricas, en el sentido de que sus valores propios son reales. Ahora demostraremos esto para los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera.

LOS VALORES PROPIOS Y LAS FUNCIONES PROPIAS ASUMEN VALORES REALES

Teorema 2. Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2) son reales y tienen funciones propias con valores reales.

Demostración. Suponga que λ es un valor propio posiblemente complejo de (1)-(2), con función propia $\phi(x)$, la que puede asumir valores complejos. Es decir,

$$\textbf{(14)} \qquad L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x) = 0 \ ,$$

y $\phi(\not\equiv 0)$ satisface las condiciones en la frontera en (2). Al calcular el conjugado complejo de ambos lados de (14) y usar el hecho de que p, q y r asumen valores reales, obtenemos

$$\textbf{(15)} \qquad \overline{L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x)} = L[\bar{\phi}](x) + \bar{\lambda} r(x)\bar{\phi}(x) = 0 \ .$$

Además, como a_1, a_2, b_1 y b_2 son reales, un argumento similar muestra que $\bar{\phi}$ también satisface las condiciones en la frontera en (2). Por lo tanto, $\bar{\lambda}$ es un valor propio con función propia $\bar{\phi}$.

De la ecuación (14) obtenemos

$$\textbf{(16)} \qquad \int_a^b L[\phi](x)\bar{\phi}(x)\,dx = -\lambda \int_a^b r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)\,dx = -\lambda \int_a^b r(x)\,|\phi(x)|^2 dx \ .$$

†Para más detalles acerca de los productos interiores, véase el texto de B. Kolman, *Elementary Linear Algebra*, 6a. edición (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996), capítulo 3.

Por otro lado, si usamos la identidad (11) y el hecho de que $\bar{\lambda}$ sea un valor propio con función propia $\bar{\phi}$, vemos que

$$\textbf{(17)} \qquad \int_a^b L[\phi](x)\bar{\phi}(x)\,dx = \int_a^b \phi(x)L[\bar{\phi}](x)\,dx = -\bar{\lambda}\int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx\ .$$

Pero los lados izquierdos de (16) y (17) son los mismos, de modo que al igualar los lados derechos llegamos a

$$-\lambda\int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx = -\bar{\lambda}\int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx\ .$$

Como $r(x) > 0$ y ϕ es una solución no trivial de (1)-(2), entonces $\int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx > 0$. Así, podemos cancelar esta integral para obtener $\lambda = \bar{\lambda}$, lo que significa que λ es un número real.

Si ϕ no asume valores reales, podemos obtener funciones propias con valores reales correspondientes a λ, considerando simplemente las partes real e imaginaria de ϕ (véase el problema 16). Esto concluye la demostración del teorema 2. ■

Si todas las funciones propias asociadas a un valor propio particular son sólo múltiplos escalares entre sí, entonces el valor propio se llama **simple**.

LOS VALORES PROPIOS SON SIMPLES

Teorema 3. Todos los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2) son simples.

Demostración. Suponga que $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son dos funciones propias correspondientes al valor propio λ (así, ϕ y ψ son soluciones de la misma ecuación diferencial). Ellas satisfacen (2), de modo que

$$a_1\phi(a) + a_2\phi'(a) = 0\ , \qquad a_1\psi(a) + a_2\psi'(a) = 0\ .$$

Supongamos que $a_2 \neq 0$. (Aplicamos un argumento similar si $a_2 = 0$ y $a_1 \neq 0$.) Al determinar $\phi'(a)$ y $\psi'(a)$ se tiene

$$\phi'(a) = (-a_1/a_2)\phi(a)\ , \qquad \psi'(a) = (-a_1/a_2)\psi(a)\ .$$

Si ahora calculamos el wronskiano de ϕ y ψ en $x = a$, vemos que

$$\textbf{(18)} \qquad \begin{aligned} W[\phi,\psi](a) &= \phi(a)\psi'(a) - \phi'(a)\psi(a) \\ &= \phi(a)(-a_1/a_2)\psi(a) - (-a_1/a_2)\phi(a)\psi(a) = 0\ . \end{aligned}$$

Recuerde que en la sección 4.3 demostramos que si el wronskiano de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden se anula en un punto, entonces las dos soluciones son linealmente dependientes. En consecuencia, ϕ y ψ son linealmente dependientes, de modo que una debe ser múltiplo de la otra. Así, λ es un valor propio simple. ■

Ahora mostraremos que las funciones propias asociadas a valores propios distintos cumplen la propiedad de ortogonalidad. Recuerde que en el análisis de los desarrollos ortogonales en la sección 10.3 dijimos que dos funciones con valores reales f y g son **ortogonales** con respecto de una función de ponderación positiva $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$ si

(19) $$\int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx = 0 \ .$$

ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES PROPIAS

Teorema 4. Las funciones propias que corresponden a valores propios distintos del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2) son ortogonales con respecto de la función de ponderación $r(x)$ en $[a, b]$.

Demostración. Sean λ y μ valores propios distintos con funciones propias correspondientes ϕ y ψ, respectivamente; es decir, $L[\phi] = -\lambda r\phi$ y $L[\psi] = -\mu r\psi$. Por el teorema 2, podemos suponer que ϕ y ψ tienen valores reales. Al hacer $u = \phi$ y $v = \psi$ en (11) y sustituir $L[\phi]$ y $L[\psi]$, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\phi L[\psi] - \psi L[\phi])(x)\,dx \\ &= \int_a^b (-\phi\mu r\psi + \psi\lambda r\phi)(x)\,dx \\ &= (\lambda - \mu)\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)\,dx \ . \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \mu$, tenemos

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)\,dx = 0 \ .$$

Por lo tanto, las funciones propias ϕ y ψ son ortogonales con respecto de $r(x)$ en $[a, b]$. ■

Para ilustrar las propiedades de los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera, consideremos el problema

(20) $$y'' + \lambda y = 0 \ ; \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \ .$$

En la sección 11.2 mencionamos que los valores propios de (20) son $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, con funciones propias correspondientes $\phi_n(x) = c_n \operatorname{sen} nx$. Observe que los valores propios son reales y simples, como lo predicen los teoremas 2 y 3. Además, en el ejemplo 2 de la sección 10.3 demostramos que

(21) $$\int_0^\pi \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx = 0 \ , \qquad \text{para } m \neq n.$$

Así, las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con respecto de $r(x) \equiv 1$ en $[0, \pi]$, lo que ilustra el teorema 4.

Observe además que los valores propios para el problema (20) forman una sucesión creciente

$$\lambda_1 = 1^2 < \lambda_2 = 2^2 < \lambda_3 = 3^2 < \cdots ,$$

donde $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Tenemos un orden similar para cualquier problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera.

SUCESIÓN DE VALORES PROPIOS

Teorema 5. Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2) forman una sucesión numerable y creciente

(22) $$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots ,$$

con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

Este teorema nos dice que un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera tiene una infinidad de valores propios y que estos se pueden ordenar en una sucesión que crece hacia infinito. La demostración de este hecho está más allá de los objetivos de este libro, de modo que el lector puede consultar textos más avanzados.†

Desarrollos en términos de funciones propias

Si disponemos de una sucesión de funciones ortogonales, podemos usarlas para construir desarrollos en serie para una clase amplia de funciones. Por ejemplo, las funciones propias $\phi_n(x) = \operatorname{sen} nx$ del problema (20) conducen a los desarrollos en serie de senos de Fourier analizados en la sección 10.4:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \; .$$

En efecto, si f es continua en $[0, \pi]$, f' es continua por partes en $[0, \pi]$ y $f(0) = f(\pi)$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \; , \qquad 0 \le x \le \pi \; ,$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \; , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \; .$$

†Véanse por ejemplo los textos de G. Birkhoff y G. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4a. edición (John Wiley & Sons, Nueva York, 1989), capítulo 10, o E. Coddington y N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations* (Krieger, Nueva York, 1984), capítulo 8.

En la sección 10.3 analizamos de manera general los desarrollos ortogonales. Ahí mostramos que si el conjunto $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal con respecto de una función de ponderación positiva $w(x)$ en $[a, b]$, es decir,

$$\textbf{(23)} \qquad \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n\ , \\ 1, & m = n\ , \end{cases}$$

entonces podemos asociar a cada función continua por partes f un desarrollo ortogonal

$$\textbf{(24)} \qquad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)\ ,$$

donde

$$\textbf{(25)} \qquad c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)dx\ .$$

Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con respecto de $r(x)$ para un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Por lo tanto, podemos usar las funciones propias para formar un sistema *ortonormal* con respecto de $r(x)$, simplemente normalizando (cambiando la escala) a cada función propia ϕ_n, de modo que

$$\textbf{(26)} \qquad \int_a^b \phi_n^2(x)r(x)\,dx = 1\ .$$

EJEMPLO 2 Construir un sistema ortonormal de funciones propias correspondiente al problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$\textbf{(27)} \qquad y'' + \lambda y = 0\ ; \qquad y(0) = 0\ , \qquad y'(\pi) = 0\ .$$

SOLUCIÓN En el problema 9 de los ejercicios 10.2 vimos que los valores propios de (27) son $\lambda_n = (2n-1)^2/4$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, con funciones propias correspondientes

$$\phi_n(x) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\ .$$

Las funciones propias son ortogonales con respecto de $r(x) \equiv 1$ en $[0, \pi]$, de modo que sólo debemos elegir las a_n de modo que se cumpla (26). Calculamos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} a_n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx &= a_n^2 \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2n-1)x\right]dx \\ &= a_n^2\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2(2n-1)}\operatorname{sen}(2n-1)x\right]\Bigg|_0^{\pi} \\ &= a_n^2(\pi/2)\ .\end{aligned}$$

Por tanto, podemos hacer $a_n = \sqrt{2/\pi}$, lo que da

$$\textbf{(28)} \qquad \left\{\sqrt{2/\pi}\ \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

como sistema ortonormal de funciones propias. ■

Si $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal de funciones propias, entonces podemos usar (24) y (25) para obtener un desarrollo para una función f en términos de funciones propias. Pero, ¿converge tal desarrollo? En tal caso, ¿a qué función converge? Estas cuestiones se contestan de manera parcial en el siguiente teorema.

CONVERGENCIA UNIFORME DE DESARROLLOS EN TÉRMINOS DE FUNCIONES PROPIAS

Teorema 6. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2). Sea f una función continua en $[a, b]$, con f' continua por partes[†] en $[a, b]$. Si f satisface las condiciones en la frontera en (2), entonces

$$\textbf{(29)} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) , \qquad a \le x \le b ,$$

donde c_n está dada por la fórmula (25), con $w(x) = r(x)$. Además, el desarrollo en términos de funciones propias en (29) converge uniformemente en $[a, b]$.

La demostración del teorema 6 aparece en textos más avanzados.[††]

EJEMPLO 3 Expresar

$$f(x) = \begin{cases} 2x/\pi , & 0 \le x \le \pi/2 , \\ 1 , & \pi/2 \le x \le \pi , \end{cases}$$

mediante un desarrollo en términos de funciones propias, usando el sistema ortonormal de funciones propias dado en (28).

SOLUCIÓN Para obtener el desarrollo en términos de funciones propias para $f(x)$, usamos la fórmula (25). Así,

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\pi} f(x)\sqrt{2/\pi}\,\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{\pi/2}^{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\left[\frac{-2x}{2n-1}\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) + \frac{4}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} \\ &\quad - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{2}{2n-1}\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right]\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} , \end{aligned}$$

[†]Una función $g(x)$ es continua por partes en $[a, b]$ si es continua excepto por un número finito de puntos donde g tiene discontinuidades de salto (véase la sección 7.2).

[††]Véase por ejemplo el texto de E. Coddington y N. Levinson mencionado en la nota de pie de la página 678.

y así, para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

(30) $$c_n = \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n-1)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) .$$

Por lo tanto,

(31) $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{2/\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \\ &= \frac{2^{7/2}}{\pi^2}\operatorname{sen}(x/2) + \frac{2^{7/2}}{9\pi^2}\operatorname{sen}(3x/2) - \frac{2^{7/2}}{25\pi^2}\operatorname{sen}(5x/2) - \frac{2^{7/2}}{49\pi^2}\operatorname{sen}(7x/2) + \cdots , \end{aligned}$$

donde las c_n están dadas en la ecuación (30). Como $f(0) = 0$ y $f'(\pi) = 0$, f satisface las condiciones en la frontera en (27). Además, f es continua y f' es continua por partes en $[0, \pi]$. Por lo tanto, el teorema 6 implica que la serie en (31) converge uniformemente a f en $[0, \pi]$. ■

Existen otros resultados relativos a la convergencia puntual de los desarrollos en términos de funciones propias, similares a los resultados para series de Fourier (véase el teorema 2 de la sección 10.3). Estableceremos uno de estos resultados sin demostración.

CONVERGENCIA PUNTUAL DE DESARROLLOS EN TÉRMINOS DE FUNCIONES PROPIAS

Teorema 7. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2). Sean f y f' continuas por partes en $[a, b]$. Entonces, para cualquier x en (a, b),

(32) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] ,$$

donde las c_n están dadas por la fórmula (25), con $w(x) = r(x)$.

Problemas periódicos de Sturm-Liouville

Los problemas periódicos de Sturm-Liouville tienen propiedades similares a los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Por ejemplo, el problema periódico de Sturm-Liouville

(33) $$y'' + \lambda y = 0 ; \qquad y(0) = y(2\pi) , \qquad y'(0) = y'(2\pi) ,$$

tiene valores propios $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ y funciones propias

$$\phi_0 = a_0/2 , \quad \phi_{n,1}(x) = a_n \cos nx \qquad \text{y} \qquad \phi_{n,2}(x) = b_n \operatorname{sen} nx$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

El conjunto de funciones propias

$$\{1/2, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots\}$$

forma un conjunto ortogonal. Los desarrollos usuales en términos de series de Fourier, analizados en la sección 10.3, no son más que desarrollos en términos de funciones propias usando este conjunto; es decir,

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right] .$$

La principal diferencia entre las propiedades de los problemas regulares y periódicos de Sturm-Liouville es que los valores propios para el problema periódico de Sturm-Liouville no tienen que ser simples. Por ejemplo, cos nx y sen nx son funciones propias correspondientes al valor propio $\lambda_n = n^2$ para el problema periódico (33). En el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración, proporcionamos las propiedades del **problema periódico de Sturm-Liouville**:

$$\textbf{(34)} \qquad (py')' + qy + \lambda ry = 0 \ ; \qquad y(0) = y(2T) \ , \qquad y'(0) = y'(2T) \ ,$$

donde p, p', q y r son funciones continuas con periodo $2T$, p y r positivas.

PROPIEDADES DE LOS PROBLEMAS PERIÓDICOS DE STURM-LIOUVILLE

Teorema 8. Para el problema periódico de Sturm-Liouville (34):

1. Los valores propios son reales y forman una sucesión numerable y creciente $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$ con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.
2. Las funciones propias se pueden elegir de modo que asuman valores reales.
3. Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con respecto de $r(x)$ en $[0, 2T]$.
4. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal de todas las funciones propias y sea f una función con periodo $2T$, continua y tal que f' es continua por partes. Entonces,

$$\textbf{(35)} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x) \ ,$$

donde

$$\textbf{(36)} \qquad a_n = \int_0^{2T} f(x)\phi_n(x)r(x)\,dx \ .$$

Además, la serie en (35) converge uniformemente en $[0, 2T]$ (y por tanto en $(-\infty, \infty)$).

El lector habrá notado en los ejemplos que las funciones propias parecen oscilar; por ejemplo, sen nx y sen$(2n - 1)x/2$. Al observar con más detalle, vemos que la cantidad de oscilaciones en $[a, b]$ aumenta al crecer n. Este comportamiento, típico de las soluciones a ecuaciones de Sturm-Liouville, se analiza en la sección 11.8.

EJERCICIOS 11.3

En los problemas 1 a 6, convierta la ecuación dada a la forma de una ecuación de Sturm-Liouville.

1. $y'' + 6y' + \lambda y = 0$.

2. $xy'' + \lambda y = 0$, $\quad x > 0$.

3. $x(1 - x)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, $\quad 0 < x < 1$.

4. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$, $\quad x > 0$.

5. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $\quad x > 0$.

6. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, $\quad -1 < x < 1$.

En los problemas 7 a 11, determine si el operador diferencial lineal dada $L[y]$, *cuyo dominio consta de todas las funciones que tienen segundas derivadas continuas*

en el intervalo [0, π] *y satisfacen las condiciones en la frontera dadas, es autoadjunto.*

7. $L[y] := y'' + 2y' + 5y$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

8. $L[y] := y'' + \lambda y$;
$y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

9. $L[y] := y'' + \lambda y$;
$y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$.

10. $L[y] := y'' + \lambda y$;
$y(0) + y'(\pi) = 0$, $y(\pi) + y'(0) = 0$.

11. $L[y] := (1 + x^2)y'' + 2xy' + \lambda ry$;
$y'(0) = 0$, $y(\pi) - (1 + \pi^2)y'(\pi) = 0$.

12. Producto interior. El concepto de producto interior $(\cdot, \cdot)$ es importante en el estudio de los espacios vectoriales generales y generaliza el producto punto de vectores en $\mathbf{R}^n$. Recuerde que encontramos algunos productos interiores al estudiar las series de Fourier y los desarrollos ortogonales en la sección 10.3. Verifique que (f, g) definido en (12) es un producto interior para f y g continuas en $[a, b]$; es decir, muestre que para f, g y h continuas en $[a, b]$ y c un número real, se satisface lo siguiente:

(a) $(f, f) \geq 0$ y es igual a cero sólo cuando $f \equiv 0$.
(b) $(f, g) = (g, f)$.
(c) $(f + h, g) = (f, g) + (h, g)$.
(d) $(cf, g) = c(f, g)$.

13. Sea $L[y] := y^{(4)}$. Considere que el dominio de L es el conjunto de funciones que tienen cuartas derivadas continuas en [0, π] y que satisfacen

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{y} \quad y(\pi) = y'(\pi) = 0 .$$

(a) Muestre que L es autoadjunto.
(b) Use el resultado de la parte (a) para mostrar que las funciones propias correspondientes a valores propios distintos del problema

$$\textbf{(37)} \qquad y^{(4)} + \lambda y = 0 ; \quad y(0) = y'(0) = 0 , \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0 ,$$

son ortogonales con respecto de $w(x) \equiv 1$ en [0, π].

14. Sea λ un valor propio y ϕ una función propia correspondiente para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2).

(a) Muestre que

$$\textbf{(38)} \qquad \lambda \int_a^b r(x)\phi^2(x)\,dx = \int_a^b \{p(x)[\phi'(x)]^2 - q(x)\phi^2(x)\}\,dx - [p(x)\phi(x)\phi'(x)]\Big|_a^b .$$

(b) Use la ecuación (38) para mostrar que si $q(x) \leq 0$ y $a_1 = b_1 = 0$ en (2), entonces λ es no negativa.
(c) Muestre que si $q(x) \leq 0$ y $a_2 = b_2 = 0$ en (2), entonces λ es no negativa.
(d) Muestre que si $q(x) \leq 0$, $a_1/a_2 < 0$ y $b_1/b_2 > 0$, entonces λ es no negativa.

15. Muestre que los valores propios del problema de valores propios (37) en el problema 13 son no positivos. [*Sugerencia*: Deduzca una ecuación similar a la ecuación (38) del problema 14.]

16. Muestre que si $\phi = u + iv$ es una función propia correspondiente a λ para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1)-(2), entonces la parte real u y la parte imaginaria v satisfacen (1)-(2).

En los problemas 17 a 24, (a) determine las funciones propias normalizadas para el problema dado y (b) use los resultados de la parte (a) para expresar $f(x) = x$ mediante un desarrollo en términos de funciones propias. (Éstas son las mismas ecuaciones que las de los problemas 13 a 20 en los ejercicios 11.2.)

17. $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

18. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(-3) = y(3)$, $y'(-3) = y'(3)$.

19. $y'' + 3y + \lambda y = 0$;
$y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

20. $y'' - 2y + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

21. $y'' + \lambda y = 0$;
$2y(0) + y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

22. $y'' + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) - 2y'(\pi) = 0$.

23. $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$;
$y'(1) = 0$, $y(e^{\pi}) = 0$.

24. $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$;
$y'(1) = 0$, $y'(e) = 0$.

25. Desigualdad de Bessel. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal con respecto de una función de ponderación positiva $w(x)$ en $[a, b]$ y sea f continua en $[a, b]$. Muestre que si

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \ ,$$

entonces

(39) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \le \int_a^b f^2(x) w(x) dx \ .$$

[*Sugerencia*: Imite la demostración de la desigualdad de Bessel para series de Fourier, problema 38 de los ejercicios 10.3.]

26. Demuestre que el operador diferencial lineal asociado con el problema periódico de Sturm-Liouville (34) es autoadjunto.

11.4 PROBLEMAS NO HOMOGÉNEOS CON VALORES EN LA FRONTERA Y LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM

A diferencia de los problemas homogéneos con valores en la frontera (que siempre tienen a $y \equiv 0$ como solución), los problemas no homogéneos no necesariamente tienen solución. En esta sección queremos desarrollar un criterio para determinar si el problema no homogéneo

(1) $$L[y](x) := A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = h(x) \ ; \qquad a < x < b \ ;$$

(2) $$\begin{aligned} B_1[y] &:= a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \ , \\ B_2[y] &:= a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \ , \end{aligned}$$

tiene una solución. Antes de proceder, debemos presentar el concepto de un adjunto.

ADJUNTO FORMAL

Definición 1. Sea L el operador diferencial dado por el lado izquierdo de la ecuación (1); es decir, $L[y] = A_2y'' + A_1y' + A_0y$. El **adjunto formal** (o adjunto de Lagrange) de L es el operador diferencial L^+ definido como

(3) $$L^+[y] := (A_2y)'' - (A_1y)' + A_0y \ ,$$

siempre que A_2'', A_1' y A_0 sean continuas en $[a, b]$.

Aunque en este momento no hemos motivado la peculiar definición de L^+, pronto descubriremos su relación con el operador L. El lector debe ocupar unos minutos para verificar que si $A_1 = A_2'$, es decir, si la ecuación (1) tiene la forma de Sturm-Liouville, entonces $L^+ = L$. En los siguientes ejemplos calcularemos el operador adjunto formal para un operador con coeficientes constantes y para un operador de tipo Cauchy-Euler.

EJEMPLO 1 Determinar el adjunto formal de

(4) $$L[y] = y'' + 2y' + 2y \ .$$

SOLUCIÓN En este caso, $A_0 = A_1 = 2$ y $A_2 = 1$. Al sustituir en la fórmula (3) tenemos

(5) $$L^+[y] = y'' - 2y' + 2y\ . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Determinar el adjunto formal de

(6) $$L[y](x) = x^2y''(x) + xy'(x) + 4y(x)\ .$$

SOLUCIÓN En este caso, $A_2(x) = x^2$, $A_1(x) = x$ y $A_0(x) = 4$. Al sustituir en la fórmula (3) y simplificar tenemos

(7) $$\begin{aligned} L^+[y](x) &= [x^2y(x)]'' - [xy(x)]' + 4y(x) \\ &= x^2y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x)\ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El operador diferencial L y su adjunto formal están relacionados mediante una identidad de Lagrange, que es una generalización de la identidad de Lagrange que demostramos para operadores de Sturm-Liouville (véase la página 674).

IDENTIDAD DE LAGRANGE

Teorema 9. Sea L el operador diferencial definido en (1) y sea L^+ su adjunto formal. Entonces,

(8) $$L[u]v - uL^+[v] = \frac{d}{dx}[P(u, v)]\ ,$$

donde $P(u, v)$, la **concomitante bilineal** asociada a L, se define como

(9) $$P(u, v) := uA_1v - u(A_2v)' + u'A_2v\ .$$

Demostración. Al desarrollar el lado izquierdo de (8), obtenemos

(10) $$\begin{aligned} L[u]v - uL^+[v] &= (A_2u'' + A_1u' + A_0u)v - u[(A_2v)'' - (A_1v)' + A_0v] \\ &= A_2u''v + A_1u'v - A_2uv'' - 2A_2'uv' - A_2''uv + A_1'uv + A_1uv'\ . \end{aligned}$$

De la definición de $P(u, v)$ en (9), calculamos

(11) $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[P(u, v)] &= (u'A_1v + uA_1'v + uA_1v') - (uA_2v' + uA_2'v)' \\ &\quad + (u''A_2v + u'A_2'v + u'A_2v') \\ &= A_2u''v + A_1u'v - A_2uv'' - 2A_2'uv' - A_2''uv + A_1'uv + A_1uv'\ , \end{aligned}$$

que es igual al lado derecho de (10). $\blacksquare$

Al integrar la identidad de Lagrange obtenemos la fórmula de Green.

FÓRMULA DE GREEN†

Corolario 2. Sea L el operador diferencial definido en (1) y sea L^+ su adjunto formal. Entonces,

$$\textbf{(12)} \qquad \int_a^b \left(L[u]v - uL^+[v]\right)(x)dx = P(u, v)(x)\Big|_a^b .$$

En la sección 11.3 definimos un producto interior para funciones continuas en $[a, b]$ con valores reales, como

$$\textbf{(13)} \qquad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx .$$

Con esta notación, la fórmula de Green se convierte en

$$\textbf{(14)} \qquad \left(L[u], v\right) = \left(u, L^+[v]\right) + P(u, v)\Big|_a^b .$$

La elegancia de la fórmula (14) sirve como justificación de las definiciones peculiares de L^+ y $P(u, v)$. En efecto, nos muestra la forma de transferir el operador L de la función u a la otra función v, al calcular los productos interiores.

Aunque los operadores L y L^+ se pueden aplicar a cualquier función y que tenga segunda derivada continua en $[a, b]$ (es decir, para y en $C^2[a, b]$), en las aplicaciones debemos restringir aún más las colecciones de funciones y donde actúan L y L^+. Por ejemplo, al resolver problemas con valores en la frontera, nos interesa aplicar L sólo a aquellas funciones en $C^2[a, b]$ que satisfagan las condiciones en la frontera. Por lo tanto, al considerar los operadores L y L^+, en adelante supondremos que sus dominios respectivos $D(L)$ y $D(L^+)$ son ciertos subespacios de $C^2[a, b]$.

Dado el operador diferencial lineal L con dominio $D(L)$, veremos las ventajas de restringir el adjunto formal L^+ a un dominio $D(L^+)$ de modo que

$$\textbf{(15)} \qquad \left(L[u], v\right) = \left(u, L^+[v]\right)$$

se cumpla para toda u en $D(L)$ y toda v en $D(L^+)$. Por supuesto, bastaría que $D(L^+)$ constara de la única función $v \equiv 0$, pero esto no es interesante. Lo que realmente queremos es elegir a $D(L^+)$ como el conjunto más grande posible de funciones en $C^2[a, b]$ para el que se cumpla (15). Con esta elección óptima de $D(L^+)$, decimos que L^+ es el **operador adjunto**††

†***Nota histórica:*** George Green (1793-1841) fue un matemático inglés que hizo un primer intento de teoría matemática del electromagnetismo (1828).

††El adjunto de un operador se estudia por lo general relacionado con un espacio de Hilbert. Para un análisis más detallado de los espacios de Hilbert y los operadores adjuntos, véase un texto de análisis funcional, como *Functional Analyisis*, 2a. edición, por W. Rudin (McGraw-Hill, Nueva York, 1991).

de L (es decir, eliminamos el adjetivo "formal"). Para los casos especiales en que $L^+ = L$ y (15) se cumple con $D(L^+) = D(L)$, decimos que L es **autoadjunto**. Por ejemplo, en la sección anterior mostramos que para un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera, el operador asociado L es autoadjunto (el dominio de L consta de aquellas funciones en $C^2[a, b]$ que satisfacen las condiciones en la frontera).

Gracias a la fórmula de Green, el adjunto será simplemente la restricción de L^+ a una clase adecuada de funciones v de modo que

$$P(u, v)\Big|_a^b = 0 \ , \qquad \text{para } u \text{ en } D(L) \ , \quad v \text{ en } D(L^+) \ .$$

EJEMPLO 3 Determinar el operador adjunto de

$$\textbf{(16)} \qquad L[y] = y'' + 2y' + 2y \ ,$$

donde el dominio de L consta de aquellas funciones que tienen segundas derivadas continuas en $[0, \pi]$ y satisfacen las condiciones en la frontera

$$\textbf{(17)} \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \ .$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 vimos que $L^+[v] = v'' - 2v' + 2v$. Ahora, debemos determinar el dominio de L^+. Primero observamos que v'' debe ser continua en $[0, \pi]$. Además, para que se cumpla (15), debemos tener

$$\textbf{(18)} \qquad P(u, v)(x)\Big|_0^\pi = 0$$

para toda u en $D(L)$ y v en $D(L^+)$. La fórmula para $P(u, v)$ en (9), con $A_1 = 2$ y $A_2 = 1$ implica sobre la condición (18) que

$$\{2u(\pi)v(\pi) - u(\pi)v'(\pi) + u'(\pi)v(\pi)\}$$
$$- \{2u(0)v(0) - u(0)v'(0) + u'(0)v(0)\} = 0 \ .$$

Como u está en $D(L)$, sabemos que $u(0) = u(\pi) = 0$. Así, la ecuación anterior se simplifica a

$$\textbf{(19)} \qquad u'(\pi)v(\pi) - u'(0)v(0) = 0 \ .$$

Observemos ahora que $u'(\pi)$ y $u'(0)$ pueden asumir cualquier valor, de modo que debemos tener $v(0) = v(\pi) = 0$ para que se cumpla la ecuación (19) para toda u en $D(L)$. Por lo tanto, el dominio de L^+ consta de aquellas funciones v que tienen segundas derivadas continuas en $[0, \pi]$ y que satisfacen las condiciones en la frontera

$$\textbf{(20)} \qquad v(0) = v(\pi) = 0 \ . \ \blacksquare$$

PROBLEMA ADJUNTO CON VALORES EN LA FRONTERA

Definición 2. Si $B[u] = 0$ representa las condiciones en la frontera necesarias para que una función esté en el dominio de L y $B^+[u] = 0$ representa las condiciones en la frontera necesarias para que una función esté en el dominio de su operador adjunto L^+. Entonces el **problema adjunto con valores en la frontera** para

(21) $$L[u] = 0 \ , \qquad B[u] = 0$$

es el problema con valores en la frontera

(22) $$L^+[u] = 0 \ , \qquad B^+[u] = 0 \ .$$

Por ejemplo, como vimos en el ejemplo 3, el problema adjunto con valores en la frontera para

(23) $$y'' + 2y' + 2y = 0 \ ; \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \ ,$$

es el problema con valores en la frontera

(24) $$y'' - 2y' + 2y = 0 \ ; \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \ .$$

A continuación damos dos ejemplos más.

EJEMPLO 4 Determinar el problema adjunto con valores en la frontera para

(25) $$x^2y''(x) + xy'(x) + 4y(x) = 0 \ ; \qquad y(1) = y(e^{\pi}) = 0 \ .$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 vimos que el operador adjunto formal para $L[\,y\,](x) = x^2y''(x) + xy'(x) + 4y(x)$ es

(26) $$L^+[y](x) = x^2y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x) \ .$$

Para determinar las condiciones adjuntas en la frontera $B^+(y) = 0$, usamos la fórmula de Green y pedimos que

$$P(u, v)(x)\Big|_1^{e^{\pi}} = 0 \ ,$$

para u en $D(L)$ y v en $D(L^+)$. Como $A_2(x) = x^2$ y $A_1(x) = x$, esta condición se convierte en

$$\left[xu(x)v(x) - x^2u(x)v'(x) - 2xu(x)v(x) + x^2u'(x)v(x)\right]\Big|_1^{e^{\pi}} = 0 \ ,$$

es decir,

$$e^{\pi}u(e^{\pi})v(e^{\pi}) - e^{2\pi}u(e^{\pi})v'(e^{\pi}) - 2e^{\pi}u(e^{\pi})v(e^{\pi}) + e^{2\pi}u'(e^{\pi})v(e^{\pi})$$
$$- u(1)v(1) + u(1)v'(1) + 2u(1)v(1) - u'(1)v(1) = 0 \ .$$

Para u en $D(L)$, tenemos que $u(1) = u(e^{\pi}) = 0$, de modo que la ecuación anterior se simplifica como

(27) $$e^{2\pi}u'(e^{\pi})v(e^{\pi}) - u'(1)v(1) = 0 \ .$$

Como $u'(e^{\pi})$ y $u'(1)$ pueden asumir valores arbitrarios, debemos tener $v(e^{\pi}) = v(1) = 0$ para que se cumpla la ecuación (27) para toda u en $D(L)$. Por lo tanto, el problema adjunto con valores en la frontera es

(28) $$x^2y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x) = 0 \; ; \qquad y(1) = y(e^{\pi}) = 0 \; . \; \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Determinar el problema adjunto con valores en la frontera para

(29) $$y'' + y = 0 \; ; \qquad y(0) + y(\pi) = 0 \; , \qquad y'(0) = 0 \; .$$

SOLUCIÓN En este caso, $L^+[y] = L[y] = y'' + y$. Para determinar las condiciones adjuntas en la frontera, de nuevo pedimos que

$$P(u, v)\Big|_0^{\pi} = 0$$

para u en $D(L)$ y v en $D(L^+)$. Como $A_1 = 0$ y $A_2 = 1$, queremos que

$$u'(\pi)v(\pi) - u(\pi)v'(\pi) - u'(0)v(0) + u(0)v'(0) = 0 \; .$$

Si u está en $D(L)$, tenemos $u(\pi) = -u(0)$ y $u'(0) = 0$. Así, la ecuación anterior se reduce a

(30) $$u'(\pi)v(\pi) + u(0)\left[v'(\pi) + v'(0)\right] = 0 \; .$$

Como $u'(\pi)$ y $u(0)$ son arbitrarios, pedimos que $v(\pi) = 0$ y $v'(0) + v'(\pi) = 0$, de modo que se cumpla la ecuación (30) para toda u en $D(L)$. Por lo tanto, el problema adjunto con valores en la frontera es

(31) $$y'' + y = 0 \; ; \qquad y'(0) + y'(\pi) = 0 \; , \qquad y(\pi) = 0 \; . \; \blacksquare$$

Regresemos al problema de saber cuándo el problema no homogéneo con valores en la frontera

(32) $$L[y] = h \; , \qquad B[y] = 0 \; ,$$

tiene una solución. Si tiene una solución u, entonces

$$\left(L[u], v\right) = (h, v)$$

para toda v. Si elegimos v como una solución del problema adjunto (homogéneo)

(33) $$L^+[v] = 0 \; , \qquad B^-[v] = 0 \; ,$$

vemos que

$$\left(L[u], v\right) = \left(u, L^+[v]\right) = (u, 0) = 0 \; .$$

Por lo tanto, una condición necesaria para la existencia de una solución de (32) es que

$$(h, v) = 0 \; ,$$

para toda v que satisfaga (33). En otras palabras, para que el problema no homogéneo tenga una solución, el término no homogéneo h debe ser ortogonal a todas las soluciones del pro-

blema adjunto. Se puede ver que esta condición también es suficiente para la existencia de soluciones.† Este criterio se conoce como la alternativa de Fredholm.††

ALTERNATIVA FREDHOLM

Teorema 10. Sea L un operador diferencial lineal y B un conjunto de condiciones lineales en la frontera. El problema no homogéneo con valores en la frontera

(34)
$$L[y](x) = h(x) , \qquad a < x < b ,$$
$$B[y] = 0$$

tiene una solución si y sólo si

(35)
$$\int_a^b h(x)z(x)dx = 0$$

para cada solución z del problema adjunto con valores en la frontera

(36)
$$L^+[z](x) = 0 , \qquad a < x < b ,$$
$$B^+[z] = 0 .$$

Observación. De acuerdo con el teorema 10, si el problema adjunto con valores en la frontera (36) tiene sólo la solución trivial, entonces el problema no homogéneo con valores en la frontera (34) tiene una solución para cada h. En ese caso, si las condiciones en la frontera en (2) están separadas o son periódicas, entonces es posible mostrar que existe una *única* solución para cada h. Para condiciones en la frontera más generales, es posible tener una familia a un parámetro de soluciones (véase el problema 28).

En los siguientes ejemplos ilustraremos la forma de usar la alternativa de Fredholm para determinar si un problema no homogéneo con valores en la frontera tiene una solución.

EJEMPLO 6 Determinar condiciones sobre h que garanticen que el problema

(37)
$$y'' + 2y' + 2y = h ; \qquad y(0) = y(\pi) = 0 ,$$

tiene una solución.

SOLUCIÓN El operador $L[y] = y'' + 2y' + 2y$ es el mismo que en el ejemplo 3. Por lo tanto (véanse (23) y (24)), el problema adjunto es

(38)
$$y'' - 2y' + 2y = 0 ; \qquad y(0) = y(\pi) = 0 .$$

---

†Para una demostración de que la condición es suficiente, el lector puede consultar el capítulo 11 del texto de E. Coddington y N. Levinson citado en la nota de pie de la página 678.

††***Nota histórica:*** I. Fredholm (1866-1927), en su estudio de las ecuaciones integrales lineales (aprox. 1900), se dio cuenta de la existencia de una analogía entre las ecuaciones integrales lineales y los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Esta analogía también se extiende a las ecuaciones diferenciales y, más en general, a los operadores lineales.

La ecuación auxiliar para (38) es $r^2 - 2r + 2 = 0$, cuyas raíces son $r = 1 \pm i$. Por lo tanto, una solución general para la ecuación diferencial en (38) es

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x \ .$$

Usamos las condiciones en la frontera en (38) para determinar c_1 y c_2, y vemos que

$$y(0) = c_1 = 0 \quad \text{y} \quad y(\pi) = -c_1 e^{\pi} = 0 \ .$$

Así, $c_1 = 0$ y c_2 es arbitraria. Por lo tanto, cada solución del problema adjunto (38) tiene la forma

$$z(x) = c_2 e^x \operatorname{sen} x \ .$$

La alternativa de Fredholm implica entonces que si h es continua, entonces el problema no homogéneo (37) tiene una solución si y sólo si

$$\int_0^{\pi} h(x) e^x \operatorname{sen} x \, dx = 0 \ . \ \blacksquare$$

Recuerde de la sección 11.2 que si (37) tiene realmente una solución, digamos cuando $h(x) = e^{-x} \cos x$, entonces tiene una familia a un parámetro de soluciones, pues el problema homogéneo correspondiente ((37) con $h = 0$) tiene una familia a un parámetro de soluciones, $y(x) = ce^{-x} \operatorname{sen} x$.

EJEMPLO 7 Determinar condiciones sobre h que garanticen que el problema

(39) $$x^2 y''(x) + xy'(x) + 4y(x) = h(x) \ ; \qquad y(1) = y(e^{\pi}) = 0 \ ,$$

tiene una solución.

SOLUCIÓN En el ejemplo 4 determinamos que el problema adjunto correspondiente es

(40) $$x^2 y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x) = 0 \ ; \qquad y(1) = y(e^{\pi}) = 0 \ .$$

La ecuación auxiliar para la ecuación de Cauchy-Euler en (40) es $r(r - 1) + 3r + 5 = 0$, con raíces $r = -1 \pm 2i$. Por lo tanto, una solución general de la ecuación diferencial en (40) es

$$y(x) = c_1 x^{\;1} \cos(2 \ln x) + c_2 x^{\;1} \operatorname{sen}(2 \ln x) \ .$$

Usamos las condiciones en la frontera en (40) para determinar c_1 y c_2, y vemos que

$$y(1) = c_1 = 0 \quad \text{y} \quad y(e^{\pi}) = e^{-\pi} c_1 = 0 \ .$$

Por lo tanto, $c_1 = 0$ y c_2 es arbitraria. Por lo tanto, cualquier solución del problema adjunto (40) tiene la forma

$$z(x) = c_2 x^{-1} \operatorname{sen}(2 \ln x) \ .$$

La alternativa de Fredholm implica que para h continua, el problema no homogéneo (39) tiene una solución si y sólo si

(41) $$\int_1^{e^{\pi}} h(x) x^{-1} \operatorname{sen}(2 \ln x) \, dx = 0 \ . \ \blacksquare$$

La aplicación de la alternativa de Fredholm a un problema regular no homogéneo de Sturm-Liouville con valores en la frontera es sencillo, pues el operador es autoadjunto.

EJEMPLO 8 Dar condiciones sobre h que garanticen que el problema regular no homogéneo de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$\textbf{(42)} \qquad y'' + \mu y = h \; ; \qquad y(0) = 0 \; , \qquad y'(\pi) = 0 \; ,$$

tiene una solución.

SOLUCIÓN Como (42) es autoadjunto, h debe ser ortogonal a cada solución del problema homogéneo correspondiente. Por el ejemplo 2 de la sección 11.3 (página 703), sabemos que este problema homogéneo tiene soluciones no triviales sólo cuando $\mu = \lambda_n = (2n - 1)^2/4$ para alguna $n = 1, 2, 3, \ldots$; es decir, μ es un valor propio. Por lo tanto, debemos considerar dos casos.

Caso 1. Si $\mu \neq (2n - 1)^2/4$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces la única solución del problema homogéneo es la solución trivial. La alternativa de Fredholm implica entonces que el problema no homogéneo (42) tiene una única solución para cada h.

Caso 2. Si $\mu = (2n - 1)^2/4$ para alguna $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces las soluciones del problema homogéneo (funciones propias) tienen la forma $\phi_n(x) = b_n \operatorname{sen}((2n - 1)x/2)$, donde b_n es arbitraria. La alternativa de Fredholm nos dice que el problema no homogéneo (42) tiene una solución si y sólo si

$$\textbf{(43)} \qquad \int_0^{\pi} h(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n - 1}{2}x\right) dx = 0 \; .$$

Además, si esta condición se satisface, existe una familia a un parámetro de soluciones, pues siempre podemos sumar un múltiplo de $\operatorname{sen}((2n - 1)x/2)$ a una solución existente para obtener una nueva solución. ■

En las dos secciones siguientes daremos procedimientos para resolver problemas no homogéneos con valores en la frontera. El primer procedimiento produce un desarrollo de la solución en términos de funciones propias. El segundo procedimiento implica las funciones de Green y expresa la solución como una integral definida.

EJERCICIOS 11.4

En los problemas 1 a 6, calcule el operador adjunto formal del operador diferencial lineal L dado.

1. $L[y](x) = xy''(x) + (2 - x^2)y'(x) + 3y(x)$.

2. $L[y](x) = x^2y''(x) + (\operatorname{sen} x)y'(x) + 2xy(x)$.

3. $L[y](x) = (1 + x^2)y''(x) + 2xy'(x) + y(x)$.

4. $L[y](x) = x^2y''(x) - 2xy'(x) + 3y(x)$.

5. $L[y](x) = 2x^2y''(x) + xy'(x) - 5y(x)$.

6. $L[y](x) = (\operatorname{sen} x)y''(x) - e^xy'(x) + y(x)$.

En los problemas 7 a 10, determine el operador adjunto y su dominio para el operador diferencial lineal L dado, cuyo dominio consta de las funciones con segunda derivada continua y que satisfacen las condiciones indicadas en la frontera.

7. $L[y] = y'' - 2y' + 10y$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

8. $L[y] = y'' - 4y' + 5y$;
$y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$.

9. $L[y](x) = 2x^2y''(x) + 3xy'(x) - y(x)$;
$y(1) = 0$, $y(4) = 0$.

10. $L[y](x) = x^2y''(x) + 2xy'(x) + (5/4)y(x)$;
$y(1) = 0$, $y(e^{\pi}) = 0$.

En los problemas 11 a 16, determine el problema adjunto con valores en la frontera para el problema con valores en la frontera dado.

11. $y'' + 6y' + 10y = 0$;
$y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

12. $y'' + y' + y = 0$;
$y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

13. $y'' + 4y = 0$;
$y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

14. $y'' = 0$;
$y(0) = y(\pi/2)$, $y'(0) = y'(\pi/2)$.

15. $x^2y''(x) + 3xy'(x) + 2y(x) = 0$;
$y'(1) = 0$, $y'(e^{\pi}) = 0$.

16. $x^2y''(x) + 2xy'(x) = 0$;
$y(1) = y(2)$, $y'(1) = y'(2)$.

En los problemas 17 a 26, determine condiciones sobre h que garanticen la existencia de una solución para el problema no homogéneo con valores en la frontera dado. (Estos son problemas no homogéneos asociados a los problemas homogéneos 7 a 16.)

17. $y'' - 2y' + 10y = h$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

18. $y'' - 4y' + 5y = h$;
$y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$.

19. $2x^2y''(x) + 3xy'(x) - y(x) = h(x)$;
$y(1) = 0$, $y(4) = 0$.

20. $x^2y''(x) + 2xy'(x) + (5/4)y(x) = h(x)$;
$y(1) = 0$, $y(e^{\pi}) = 0$.

21. $y'' + 6y' + 10y = h$;
$y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

22. $y'' + y' + y = h$;
$y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

23. $y'' + 4y = h$;
$y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

24. $y'' = h$;
$y(0) = y(\pi/2)$, $y'(0) = y'(\pi/2)$.

25. $x^2y''(x) + 3xy'(x) + 2y(x) = h(x)$;
$y'(1) = 0$, $y'(e^{\pi}) = 0$.

26. $x^2y''(x) + 2xy'(x) = h(x)$;
$y(1) = y(2)$, $y'(1) = y'(2)$.

27. Demuestre la fórmula de Green partiendo de que

$$\left(L[u], v\right) = \int_a^b (A_2u'' + A_1u' + A_0u)v\,dx$$

integre después por partes para obtener

$$\left(L[u], v\right) = \left(u, L^+[v]\right) + P(u, v)\Big|_a^b .$$

28. Muestre que el "problema con valores en la frontera"

$$y'' + y = h(x) ; \quad 0 < x < \pi ,$$
$$y(0) = 0 ,$$

tiene una familia a un parámetro de soluciones para cada h continua en $[0, \pi]$. [*Sugerencia*: Muestre que la ecuación homogénea tiene una familia a un parámetro de soluciones, mientras que el problema adjunto sólo tiene la solución trivial.]

29. Muestre que el problema con valores en la frontera

$$y'' + y = h(x) ;$$
$$y(0) = 0 , \quad y(\pi) = 0 , \quad y'(\pi) = 0 ,$$

tiene una única solución para cada h que sea continua en $[0, \pi]$ y que satisfaga

$$\int_0^{\pi} h(x) \operatorname{sen} x\,dx = 0 .$$

[*Sugerencia*: Muestre que la ecuación homogénea sólo tiene la solución trivial.]

11.5 SOLUCIÓN MEDIANTE UN DESARROLLO CON FUNCIONES PROPIAS

En la sección anterior vimos que la alternativa de Fredholm proporciona un criterio para determinar si un problema no homogéneo con valores en la frontera tiene una solución. Pero ¿cómo encontramos esa solución? Por supuesto, si podemos encontrar una solución general

para la ecuación no homogénea, entonces basta sustituir las condiciones en la frontera y determinar una solución (véase el ejemplo 2 de la sección 11.2). Sin embargo, la mayor parte de los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera no son ecuaciones con coeficientes constantes, por lo que podría ser difícil hallar una solución general.

En esta sección aprovecharemos el hecho de que las funciones propias asociadas a un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera forman un sistema ortogonal. Nuestro objetivo es encontrar un **desarrollo en términos de funciones propias** para una solución del problema regular no homogéneo de Sturm-Liouville con valores en la frontera

(1) $$L[y] + \mu r y = f \; ;$$

(2) $$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \; , \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \; ,$$

donde μ es un número real fijo y

(3) $$L[y] := (py')' + qy \; .$$

Sean $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ los valores propios con funciones propias correspondientes $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ para el problema homogéneo de valores propios asociado a (1)-(2), con μ en vez del parámetro λ; es decir, $L[\phi_n] + \lambda_n r\phi_n = 0$, donde ϕ_n satisface (2). Sabemos (recuerde el teorema 4 de la sección 11.3) que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ forma un sistema ortogonal con respecto de la función de ponderación $r(x)$ en $[a, b]$.

Sea

(4) $$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \; .$$

Queremos determinar los coeficientes c_n de modo que ϕ sea una solución de (1)-(2).

Por el momento, ignoraremos los aspectos importantes de convergencia y diferenciabilidad de esta serie; es decir, consideraremos a ϕ como un desarrollo *formal* en serie. Primero observemos que, como cada ϕ_n satisface las condiciones en la frontera en (2), también lo hace ϕ. Además, al sustituir el desarrollo para ϕ en el lado izquierdo de (1) y usar el hecho de que $L[\phi_n] = -\lambda_n r\phi_n$, vemos que

(5) $$\begin{aligned} L[\phi] + \mu r\phi &= L\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n\right] + \mu r \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n L[\phi_n] + \mu r \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(-\lambda_n r\phi_n) + \mu r \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \\ &= r\sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda_n)c_n\phi_n \; . \end{aligned}$$

Si expresamos f como el producto $r(f/r)$ en un desarrollo mediante funciones propias

$$f/r = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\phi_n \; , \qquad \gamma_n = \frac{\int_a^b (f/r)\phi_n r\,dx}{\int_a^b \phi_n^2 r\,dx} = \frac{\int_a^b f\phi_n\,dx}{\int_a^b \phi_n^2 r\,dx} \; ,$$

entonces el lado derecho de (1) se convierte en

$$\text{(6)} \qquad r\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n \ .$$

Al igualar los lados izquierdo y derecho de (1) dados en (5) y (6), vemos que

$$\text{(7)} \qquad r\sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda_n) c_n \phi_n = r\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n \ .$$

Como $r > 0$, podemos simplificar (7) como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(\mu - \lambda_n) c_n - \gamma_n \right] \phi_n = 0 \ .$$

La suma de este desarrollo es igual a cero si y sólo si todos los coeficientes se anulan. Por lo tanto, hacemos

$$\text{(8)} \qquad (\mu - \lambda_n) c_n - \gamma_n = 0 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Ahora consideramos dos casos.

Caso 1. $\mu \neq \lambda_n$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$. En este caso, podemos despejar c_n en (8):

$$c_n = \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \ .$$

Así, la única solución de (1)-(2) está dada formalmente por

$$\text{(9)} \qquad \phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n \ .$$

Nos referimos a ϕ como la única solución, pues si $\mu \neq \lambda_n$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, la ecuación homogénea correspondiente sólo tiene la solución trivial y por lo tanto el problema no homogéneo con valores en la frontera tiene una única solución.

Case 2. $\mu = \lambda_N$ para alguna N. Si $n = N$, la ecuación (8) se reduce a

$$\gamma_N = 0 \ .$$

Ahora tenemos dos posibilidades. Si $\gamma_N \neq 0$, tenemos una contradicción y entonces la ecuación no homogénea no tiene una solución que pueda expresarse mediante un desarrollo con funciones propias. Si $\gamma_N = 0$, entonces no hay restricciones sobre c_N. Así, obtenemos una familia a un parámetro de soluciones del problema no homogéneo con valores en la frontera (1)-(2), donde c_N es el parámetro.

Pero ¿qué significa que $\gamma_N = 0$? De la definición de γ_N, vemos que como

$$\gamma_N = \int_a^b f(x)\phi_N(x)\,dx \Bigg/ \int_a^b \phi_N^2(x) r(x)\,dx \ ,$$

la función f debe ser ortogonal a ϕ_N cuando $\gamma_N = 0$. Pero esto es justamente la condición de la alternativa de Fredholm para el problema no homogéneo (1)-(2).

MÉTODO DE DESARROLLOS EN TÉRMINOS DE FUNCIONES PROPIAS

Para obtener un desarrollo en términos de funciones propias para la solución ϕ del problema regular no homogéneo de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$L[y] + \mu r y = f \ , \qquad B[y] = 0 \ :$$

(a) Determine un sistema ortogonal de funciones propias $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ y los valores propios correspondientes $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ para

$$L[y] + \lambda r y = 0 \ , \qquad B[y] = 0 \ .$$

(b) Calcule el desarrollo en términos de funciones propias para f/r; es decir, determine los coeficientes γ_n de modo que

$$f/r = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n \ .$$

(c) Si $\mu \neq \lambda_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces la solución ϕ está dada por

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n \ .$$

(d) Si $\mu = \lambda_N$ para alguna N y $\gamma_N \neq 0$, entonces no hay soluciones.
(e) Si $\mu = \lambda_N$ para alguna N y $\gamma_N = 0$, entonces

$$\phi = c_N \phi_N + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n$$

es una solución para cualquier elección del parámetro c_N.

En los siguientes ejemplos ilustramos este procedimiento.

EJEMPLO 1 Determinar un desarrollo en términos de funciones propias para la solución del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$\textbf{(10)} \qquad y'' + 3y = 5 \operatorname{sen} 3x + 2 \operatorname{sen} 8x \ ; \qquad y(0) = 0 \ , \qquad y(\pi) = 0 \ .$$

SOLUCIÓN Recordemos de la sección 11.2 que el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0 \ ; \qquad y(0) = 0 \ , \qquad y(\pi) = 0 \ ,$$

tiene valores propios $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, con funciones propias correspondientes

$$\phi_n(x) = \operatorname{sen} nx \ , \qquad n = 1, 2, \ldots \ .$$

En este caso, $r(x) \equiv 1$, de modo que debemos determinar los coeficientes γ_n tales que

$$f(x)/r(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \operatorname{sen} nx$$
$$= 5 \operatorname{sen} 3x + 2 \operatorname{sen} 8x \ .$$

Es claro que $\gamma_3 = 5$, $\gamma_8 = 2$ y que los demás γ_n se anulan. Como $\mu = 3 \neq n^2 = \lambda_n$ para $n = 1, 2, \ldots$, tenemos que la única solución de (10) es

$$\textbf{(11)} \qquad \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n}\phi_n(x) = \frac{5}{3-9}\operatorname{sen} 3x + \frac{2}{3-64}\operatorname{sen} 8x$$

$$= -\frac{5}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{2}{61}\operatorname{sen} 8x \ . \ \blacksquare$$

Como verificación de nuestros cálculos y de la teoría, invitamos al lector a que muestre mediante una sustitución directa que la función ϕ dada en (11) es la solución del problema (10).

EJEMPLO 2 Determinar un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$\textbf{(12)} \qquad y'' + y = f \ ; \qquad y(0) = y'(\pi) = 0 \ ,$$

donde

$$\textbf{(13)} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & 0 \leq x \leq \pi/2 \ , \\ 1, & \pi/2 \leq x \leq \pi \ . \end{cases}$$

SOLUCIÓN En los ejemplos 2 y 3 de la sección 11.3 determinamos que la sucesión

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es un sistema ortonormal de funciones propias para el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0 \ ; \qquad y(0) = y'(\pi) = 0 \ ,$$

donde los valores propios asociados son $\lambda_n = (2n - 1)^2/4$. También vimos que $f(x)$ $(= f(x)/r(x)$, pues $r(x) \equiv 1)$ dada en (13) tiene el desarrollo en términos de funciones propias

$$\textbf{(14)} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \ ,$$

donde

$$\textbf{(15)} \qquad \gamma_n = \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Como $\mu = 1$ *no* es un valor propio, el problema no homogéneo (12) tiene una única solución ϕ dada formalmente por el desarrollo

$$\textbf{(16)} \qquad \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{1 - \lambda_n}\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{1 - \dfrac{(2n-1)^2}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \ ,$$

donde las γ_n están dadas por la ecuación (15). $\blacksquare$

También podemos obtener una solución del problema no homogéneo con valores en la frontera en (12) encontrando dos soluciones generales de la ecuación diferencial en (12); una de ellas válida en el intervalo $[0, \pi/2]$ y la otra en $[\pi/2, \pi]$. Elegimos las *cuatro* constantes arbitrarias en estas soluciones generales de modo que se cumplan las condiciones en la frontera en (12) y que la solución y su derivada sean continuas en $[0, \pi]$. Dejaremos que el lector realice este procedimiento y obtenga la solución

$$\textbf{(17)} \qquad \phi(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}x \ , & 0 \le x \le \pi/2 \ , \\ 1 - \dfrac{2}{\pi}\cos x \ , & \pi/2 \le x \le \pi \ . \end{cases}$$

En textos avanzados se demuestra que si f es continua en $[a, b]$, entonces la solución formal en (9) converge uniformemente a la solución genuina. Por ejemplo, el desarrollo en (16) converge uniformemente a la función ϕ en (17).

Si se tiene un desarrollo en términos de funciones propias para la solución de un problema no homogéneo con valores en la frontera, entonces se puede obtener una *solución aproximada* truncando el desarrollo después de N términos. Este desarrollo truncado es un ejemplo de **aproximación de Galerkin** para la solución. El método de Galerkin y la **colocalización** † son dos procedimientos ampliamente utilizados para aproximar la solución de un problema con valores en la frontera.

EJERCICIOS 11.5

En los problemas 1 a 8, determine un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución del problema no homogéneo con valores en la frontera dado, si éste existe.

1. $y'' + 2y = 5 \operatorname{sen} x - 7 \operatorname{sen} 3x$;
$y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0$.

2. $y'' - y = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 11x$;
$y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0$.

3. $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 8x$;
$y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0$.

4. $y'' + \pi y = \cos 7x + 5 \cos 10x$;
$y'(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = 0$.

5. $y'' + y = \cos 4x + \cos 7x$;
$y'(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = 0$.

6. $y'' + 6y = \cos 4x - \cos 5x$;
$y'(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = 0$.

7. $y'' + y = x^2 - 2\pi x$;
$y(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = 0$.

8. $y'' + 2y = \pi x - x^2$;
$y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0$.

En los problemas 9 a 14, determine un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución del problema no homogéneo con valores en la frontera dado. Suponga que f satisface las conclusiones de la alternativa de Fredholm.

9. $y'' + y = f$; $\quad y'(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0$.

10. $y'' + 7y = f$; $\quad y(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) = 0$.

†Para más información acerca de los métodos numéricos para resolver problemas con valores en la frontera, véase *Numerical Methods for Two-Point Boundary value Problems*, por H. B. Keller (Dover Publications, Nueva York, 1992). En particular, el **método de tiro** se ilustra en el proyecto D.

11. $(xy')' + 5x^{-1}y = f$;
$y'(1) = 0$, $y(e^{\pi}) = 0$.

12. $xy'' + y' + x^{-1}y = f$;
$y(1) = 0$, $y(e^{\pi}) = 0$.

13. $y'' + 6y = f$;
$y(0) = 0$, $3y(\pi) - y'(\pi) = 0$.

[*Sugerencia*: Véase el ejemplo 4 de la sección 11.2.]

14. $(xy')' - x^{-1}y = f$;
$y'(1) = 0$, $y'(e) = 0$.

15. Deduzca la solución del problema (12) dada en la ecuación (17).

11.6 FUNCIONES DE GREEN

En esta sección obtendremos una representación integral para la solución de un problema no homogéneo con valores en la frontera. A saber, mostraremos que la solución se puede expresar en la forma

$$\textbf{(1)} \qquad y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds \ ,$$

donde la función núcleo, $G(x, s)$, es llamada *función de Green* o *función de influencia*. Se sabe que esta representación existe para problemas muy generales.† Sin embargo, aquí sólo consideraremos los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$\textbf{(2)} \qquad L[y](x) = -f(x) \ , \qquad a < x < b \ ,$$

$$\textbf{(3)} \qquad a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \ ,$$

$$\textbf{(4)} \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \ ,$$

donde

$$\textbf{(5)} \qquad L[y] := \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy$$

y p, p' y q son continuas en $[a, b]$, con $p(x) > 0$ en $[a, b]$. Supondremos que f es continua en $[a, b]$. Aunque no es necesario, en este contexto escribiremos el término no homogéneo en la ecuación (2) como $-f(x)$ en vez de $f(x)$.

En esta sección **supondremos que el problema homogéneo correspondiente** ($f(x) \equiv 0$) **tiene sólo la solución trivial** o, en forma equivalente, supondremos que $\lambda = 0$ no es un valor propio. La alternativa de Fredholm implica entonces que el problema no homogéneo (2)-(4) tiene una solución. Esta solución es única, pues el problema homogéneo correspondiente tiene una única solución.

Usaremos el método de separación de variables para obtener una representación integral para la solución de (2)-(4) (véase la sección 4.9). Para comenzar, elegimos dos soluciones no triviales z_1 y z_2 de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Elegimos z_1 de modo que sa-

†Para un análisis de las funciones de Green para problemas con valores en la frontera relativos a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden n, véase el texto de E. Coddington y N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations* (Krieger, Nueva York, 1984), capítulo 7.

tisfaga (3) y z_2 que satisfaga (4). La existencia de z_1 y z_2 es consecuencia del teorema de existencia y unicidad para problemas con valores iniciales (véase el teorema 2 de la sección 4.2), ya que uno puede elegir las condiciones iniciales en a (respectivamente, en b) de modo que la condición en la frontera (3) (respectivamente (4)) se satisfaga y la solución no sea trivial.

Antes de poder utilizar z_1 y z_2 con el método de variación de parámetros, debemos verificar que z_1 y z_2 sean linealmente independientes. Observe que si z_1 y z_2 fuesen linealmente *dependientes*, entonces una tendría que ser un múltiplo constante de la otra, digamos, $z_1 = cz_2$. Como z_2 satisface (4), entonces z_1 también satisface (4). Recuerde que z_1 satisface (3). Así, z_1 satisface $L[z_1] = 0$ y (3)-(4). Pero hemos supuesto que el problema homogéneo correspondiente tiene *sólo* la solución trivial. Esta contradicción implica que z_1 y z_2 son linealmente independientes.

Para aplicar las fórmulas del método de variación de parámetros, primero debemos escribir la ecuación no homogénea (2) en la forma canónica

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = -\frac{f}{p} .$$

Entonces, una solución particular de esta ecuación está dada por (véanse las fórmulas (4) y (12) de la sección 4.9)

$$\textbf{(6)} \qquad y(x) = c_1(x)z_1(x) + c_2(x)z_2(x) ,$$

donde

$$\textbf{(7)} \qquad c_1'(x) = \frac{f(x)z_2(x)}{p(x)W[z_1, z_2](x)} , \qquad c_2'(x) = \frac{-f(x)z_1(x)}{p(x)W[z_1, z_2](x)} ,$$

y $W[z_1, z_2] = z_1z_2' - z_1'z_2$ es el wronskiano de z_1 y z_2. Como podemos elegir libremente las constantes en las antiderivadas de c_1' y c_2', veremos que es conveniente elegir

$$\textbf{(8)} \qquad c_1(x) = \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{p(s)W[z_1, z_2](s)}ds$$

y

$$\textbf{(9)} \qquad c_2(x) = \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{p(s)W[z_1, z_2](s)}ds .$$

Al sustituir en (6), obtenemos la siguiente solución de (2):

$$\textbf{(10)} \qquad y(x) = z_1(x)\int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{p(s)W[z_1, z_2](s)}ds + z_2(x)\int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{p(s)W[z_1, z_2](s)}ds$$
$$= \int_a^b G(x, s)f(s)ds ,$$

donde

$$G(x, s) := \begin{cases} \dfrac{-z_1(s)z_2(x)}{p(s)W[z_1, z_2](s)} , & a \le s \le x , \\ \dfrac{-z_1(x)z_2(s)}{p(s)W[z_1, z_2](s)} , & x \le s \le b . \end{cases}$$

Usamos el hecho de que z_1 y z_2 satisfacen la ecuación $L[y] = 0$ para mostrar que

$$\textbf{(11)} \qquad p(x)W[z_1, z_2](x) = C \,, \qquad x \text{ en } [a, b] \,,$$

donde C es una constante (véase el problema 31). Por lo tanto, $G(x, s)$ tiene la forma más sencilla

$$\textbf{(12)} \qquad G(x, s) = \begin{cases} -z_1(s)z_2(x)/C \,, & a \leq s \leq x \,, \\ -z_1(x)z_2(s)/C \,, & x \leq s \leq b \,, \end{cases}$$

donde C está dada por la ecuación (11). La función $G(x, s)$ es la **función de Green** para el problema (2)-(4).

REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LA SOLUCIÓN

Teorema 11. Sea $G(x, s)$ la función de Green para un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Entonces la función

$$\textbf{(13)} \qquad y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)\, ds$$

es la solución del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera con $L[y](x) = -f(x)$ para cualquier función f continua en $[a, b]$.

Demostración. Usamos el método de variación de parámetros para deducir $y(x)$, de modo que sabemos que satisface (2). Por lo tanto, basta mostrar que $y(x)$ dada en (13) satisface las condiciones en la frontera (3) y (4). Primero calculamos $y'(x)$ a partir de la ecuación (10) (con $pW[z_1, z_2] = C$):

$$\begin{aligned} \textbf{(14)} \qquad y'(x) &= z_1'(x) \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds + \frac{z_1(x)z_2(x)f(x)}{C} \\ &\quad + z_2'(x) \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{C} ds - \frac{z_1(x)z_2(x)f(x)}{C} \\ &= z_1'(x) \int_x^b \big(-z_2(s)f(s)/C\big) ds + z_2'(x) \int_a^x \big(-z_1(s)f(s)/C\big) ds \,. \end{aligned}$$

Usamos las ecuaciones (10) y (14) para obtener

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= a_1 z_1(a) \int_a^b \big(-z_2(s)f(s)/C\big) ds + a_2 z_1'(a) \int_a^b \big(-z_2(s)f(s)/C\big) ds \\ &= \big[a_1 z_1(a) + a_2 z_1'(a)\big] \int_a^b \big(-z_2(s)f(s)/C\big) ds \\ &= 0 \,, \end{aligned}$$

pues z_1 satisface (3). Así, la función y dada en (13) satisface (3). Un cálculo similar muestra que y también satisface (4). Por lo tanto, y resuelve el problema (2)-(4). ■

Ahora resumiremos el procedimiento anterior para resolver el problema no homogéneo con valores en la frontera (2)-(4) cuando el problema homogéneo sólo tiene la solución trivial.

SOLUCIÓN MEDIANTE FUNCIONES DE GREEN

Para obtener la solución de

$$L[y] = -f\ ; \qquad B_1[y] = 0\ , \qquad B_2[y] = 0\ ,$$

donde $L[y] = (py')' + qy$ y f es continua en $[a, b]$:

(a) Halle dos soluciones linealmente independientes z_1 y z_2 de $L[y] = 0$ que satisfagan $B_1[z_1] = 0$ y $B_2[z_2] = 0$.
(b) Calcule $C = p(x)W[z_1, z_2](x)$, donde $W[z_1, z_2] = z_1z_2' - z_1'z_2$.
(c) Construya la función de Green:

(15) $$G(x, s) = \begin{cases} -z_1(s)z_2(x)/C\ , & a \le s \le x\ , \\ -z_1(x)z_2(s)/C\ , & x \le s \le b\ . \end{cases}$$

La solución deseada está dada por

(16) $$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds\ .$$

EJEMPLO 1 Determinar la función de Green $G(x, s)$ para el problema con valores en la frontera

(17) $$y''(x) = -f(x)\ ; \qquad y(0) = 0\ , \qquad y(\pi) = 0\ .$$

Usar la función de Green para obtener la solución cuando $f(x) = x$.

SOLUCIÓN Una solución general del problema homogéneo $y'' = 0$ es $y_h(x) = Ax + B$, de modo que $z_1(x)$ y $z_2(x)$ deben tener esta forma. Para obtener $z_1(x)$, elegimos A y B de modo que $z_1(0) = B = 0$. Como A es arbitrario, podemos hacerlo igual a 1. Por lo tanto, hacemos $z_1(x) = x$. Para obtener $z_2(x)$, queremos elegir A y B de modo que $z_2(\pi) = A\pi + B = 0$. Así, $B = -A\pi$. Al hacer $A = -1$, obtenemos $z_2(x) = \pi - x$.

Ahora calculamos

$$C = p(x)W[z_1, z_2](x) = (1)[(x)(-1) - (1)(\pi - x)] = -\pi\ .$$

(Este paso también sirve para verificar nuestro trabajo, pues todas las apariciones de la variable x deben cancelarse para obtener una constante.) Así, la función de Green es

(18) $$G(x, s) = \begin{cases} -z_1(s)z_2(x)/C\ , & 0 \le s \le x\ , \\ -z_1(x)z_2(s)/C\ , & x \le s \le \pi\ , \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s(\pi - x)/\pi\ , & 0 \le s \le x\ , \\ x(\pi - s)/\pi\ , & x \le s \le \pi\ . \end{cases}$$

Cuando $f(x) = x$, la solución de (17) está dada por la ecuación (16). Al sustituir $f(x)$ y $G(x, s)$, tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G(x, s) f(s) ds \\ &= \int_0^x [s(\pi - x)s/\pi] ds + \int_x^\pi [x(\pi - s)s/\pi] ds \\ &= \frac{(\pi - x)}{\pi}\left[\frac{s^3}{3}\right]\Bigg|_0^x + \frac{x}{\pi}\left[\frac{\pi s^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right]\Bigg|_x^\pi \\ &= x(\pi^2 - x^2)/6 \ . \ \blacksquare \end{aligned}$$

En el siguiente teorema damos algunas propiedades básicas de las funciones de Green.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE GREEN

Teorema 12. Sea $G(x, s)$ la función de Green definida por la ecuación (12) para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (2)-(4). Entonces

(a) $G(x,s)$ es continua en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$. Para cada s fija, las derivadas parciales $(\partial G/\partial x)(x, s)$ y $(\partial^2 G/\partial x^2)(x, s)$ son funciones continuas de x, para $x \neq s$.

(b) En $x = s$, la derivada parcial $\partial G/\partial x$ tiene una discontinuidad de salto:

$$\textbf{(19)} \qquad \lim_{x\to s^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) - \lim_{x\to s^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) = \frac{-1}{p(s)} \ .$$

(c) Para cada s fija, la función $G(x, s)$ satisface el problema homogéneo correspondiente para $x \neq s$; es decir,†

$$\textbf{(20)} \qquad L[G(\cdot, s)](x) = 0 \ , \qquad \text{para } x \neq s \ ;$$

$$\textbf{(21)} \qquad a_1 G(a, s) + a_2 \frac{\partial G}{\partial x}(a, s) = 0 \ , \qquad b_1 G(b, s) + b_2 \frac{\partial G}{\partial x}(b, s) = 0 \ .$$

(d) Sólo existe una función que satisface las propiedades (a)-(c).

(e) $G(x, s)$ es simétrica; es decir,

$$G(x, s) = G(s, x) \ .$$

Demostración.

(a) Como z_1 y z_2 son ambas soluciones de $L[y] = 0$ en $[a, b]$, son continuas y tienen primeras y segundas derivadas continuas. Por lo tanto, la fórmula para $G(x, s)$ im-

†Para $L[y] = (py')' + qy$, la notación $L[G(\cdot, s)](x)$ representa $\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x, s)\right] + q(x)G(x, s)$.

plica que $G(x, s)$ es continua en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$. Además, para s fija, tenemos que $\partial G/\partial x$ y $\partial^2 G/\partial x^2$ son funciones continuas de x para $x \neq s$.

(b) Usamos el hecho de que $C = p(s)W[z_1, z_2](s)$ para ver que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to s^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) - \lim_{x \to s^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) &= \frac{-z_1(s)z_2'(s)}{C} - \frac{-z_1'(s)z_2(s)}{C} \\
&= -\frac{z_1(s)z_2'(s) - z_1'(s)z_2(s)}{C} \\
&= -\frac{W[z_1, z_2](s)}{C} = \frac{-1}{p(s)} .
\end{aligned}$$

(c) Para s fija, la función $G(x, s)$ es un múltiplo constante de $z_1(x)$ cuando $x < s$ y un múltiplo constante de $z_2(x)$ cuando $s < x$. Como z_1 y z_2 satisfacen $L[y] = 0$, entonces lo mismo ocurre con $G(\cdot, s)$ para $x \neq s$. A continuación verificaremos (21). Cuando $x < s$, tenemos $G(x, s) = (-z_2(s)/C)z_1(x)$. Como $z_1(x)$ satisface (3), tenemos

$$a_1 G(a, s) + a_2 \frac{\partial G}{\partial x}(a, s) = (-z_2(s)/C)[a_1 z_1(a) + a_2 z_1'(a)] = 0 .$$

Además, cuando $s < x$, tenemos $G(x, s) = (-z_1(s)/C)z_2(x)$. Como $z_2(x)$ satisface (4), vemos que

$$b_1 G(b, s) + b_2 \frac{\partial G}{\partial x}(b, s) = (-z_1(s)/C)[b_1 z_2(b) + b_2 z_2'(b)] = 0 .$$

Así, para cada s fija, $G(\cdot, s)$ satisface (20)-(21).

(d) Suponga que $G(x, s)$ y $H(x, s)$ satisfacen las propiedades (a), (b) y (c). Mostraremos que

$$K(x, s) := G(x, s) - H(x, s)$$

es idénticamente cero en $[a, b] \times [a, b]$. Para esto, fijemos $s = s_0$. Por la propiedad (a), $K(x, s_0)$ es continua en $[a, b]$, y $(\partial K/\partial x)(x, s_0)$ y $(\partial^2 K/\partial x^2)(x, s_0)$ son continuas para $x \neq s_0$. Además, como la propiedad (b) dice que $(\partial G/\partial x)(x, s_0)$ y $(\partial H/\partial x)(x, s_0)$ tienen los mismos saltos en $x = s_0$, vemos que $(\partial K/\partial x)(x, s_0) = (\partial G/\partial x)(x, s_0) - (\partial H/\partial x)(x, s_0)$ existe y es continua (no tiene salto) en $x = s_0$. Por lo tanto, $K(x, s_0)$ y $(\partial K/\partial x)(x, s_0)$ son continuas en $[a, b]$. Por la propiedad (c), ecuación (20), tenemos que para $x \neq s_0$, $L[K(\cdot, s_0)] = 0$. Al despejar $(\partial^2 K/\partial x^2)(x, s_0)$ en esta ecuación, vemos que $(\partial^2 K/\partial x^2)(x, s_0)$ es igual a una función continua en $x = s_0$. En consecuencia, $(\partial^2 K/\partial x^2)(x, s_0)$ es continua en $[a, b]$. Así, $K(x, s_0)$ es una solución del problema homogéneo con valores en la frontera en todo el intervalo $[a, b]$. Pero este problema *sólo* tiene la solución trivial, de modo que $K(x, s_0) \equiv 0$. Por último, como s_0 es arbitrario, $K(x, s) \equiv 0$ en $[a, b] \times [a, b]$; es decir, la función de Green es única.

(e) La simetría es obvia a partir de la definición de $G(x, s)$ en (12); basta intercambiar x y s en las fórmulas. ■

Las funciones de Green que satisfacen las propiedades (a)-(d) también existen para los problemas generales no autoadjuntos con valores en la frontera. Además, se puede mostrar que la existencia de una función de Green *simétrica* es equivalente al hecho de que el operador lineal L sea autoadjunto.[†]

Debido a la unicidad de la función de Green, podríamos haber definido a $G(x, s)$ como la función que satisface las propiedades (a)-(c) en el teorema 12 y usar luego estas propiedades para deducir la fórmula (12). Dejaremos esta deducción como ejercicio (véase el problema 32).

La función de Green también se puede caracterizar mediante la función delta de Dirac (véase la sección 7.8). Si suponemos que existe una función $G(x, s)$ tal que

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds$$

sea la solución de (2)−(4), entonces podemos operar con L a ambos lados, suponiendo que podemos intercambiar la derivación y la integración, para obtener

$$L[y](x) = \int_a^b L[G(\cdot, s)](x) f(s) ds = -f(x) \ .$$

Es decir, $L[G(\cdot, s)](x)$ debe actuar como la delta de Dirac $-\delta(x - s)$. Además, $G(\cdot, s)$ debe satisfacer las condiciones en la frontera (3) y (4). Si definimos $G(x, s)$ como la solución de

(22) $$L[G(\cdot, s)](x) = -\delta(x - s) \ ,$$

(23) $$a_1 G(a, s) + a_2 \frac{\partial G}{\partial x}(a, s) = 0 \ ,$$

(24) $$b_1 G(b, s) + b_2 \frac{\partial G}{\partial x}(b, s) = 0 \ ,$$

entonces podemos usar las propiedades de la función delta de Dirac para mostrar formalmente que $G(x, s)$ satisface las propiedades (a)-(c) del teorema 12 (véase el problema 33).

La caracterización de la función de Green dada en (22)-(24) apoya la siguiente interpretación física. Vemos a $G(x, s)$ como la deflexión de una cuerda (viga, etc.) en un punto x como resultado de la acción de una fuerza puntual de intensidad unitaria en algún otro punto s. Es decir, $G(x, s)$ representa la *influencia* de la fuerza en s sobre la cuerda en el punto x. De aquí el nombre de **función de influencia**. Además, $G(x, s)f(s)$ es la influencia de la fuerza puntual de intensidad $f(s)$. Al sobreponer *todas* las fuerzas puntuales para s entre a y b, obtenemos

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds$$

como deflexión resultante de una cuerda bajo una fuerza externa de $-f(x)$.

[†]Véase E. Coddington y N. Levinson, *Ibídem*.

EJERCICIOS 11.6

En los problemas 1 a 10, determine la función de Green $G(x, s)$ para el problema con valores en la frontera dado.

1. $y'' = -f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

2. $y'' - y = -f(x)$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

3. $y'' = -f(x)$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) + y'(\pi) = 0$.

4. $y'' + y = -f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

5. $y'' + 4y = -f(x)$;
$y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

6. $y'' + y = -f(x)$;
$y(0) + y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

7. $(x^2y')' - 2y = -f(x)$;
$y(1) = 0$, $y'(2) = 0$.

8. $(xy')' - (4/x)y = -f(x)$;
$y'(1) = 0$, $y(2) = 0$.

9. $(e^{2x}y')' + e^{2x}y = -f(x)$;
$y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

10. $(e^{-4x}y')' - 5e^{-4x}y = -f(x)$;
$y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

En los problemas 11 a 20, use funciones de Green para resolver el problema con valores en la frontera dado.

11. $y'' = -e^x$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

12. $y'' = x^2$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

13. $y'' = -x$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) + y'(\pi) = 0$.

14. $y'' = -x^2$; $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

15. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

16. $y'' + y = -12$; $y(0) = 0$, $y(2) = 0$.

17. $y'' - y = x$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

18. $y'' - y = 24$; $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

19. $(xy')' - (4/x)y = -x$;
$y(1) = 0$, $y(2) = 0$.

20. $(x^2y')' = 1$; $y(1) = 0$, $y(2) = 0$.

21. Deduzca una fórmula que implique una función de Green para la solución de la siguiente ecuación no homogénea con condiciones no homogéneas en la frontera

$$y''(x) = -f(x) \; ; \qquad y(0) = \alpha \; , \qquad y(1) = \beta \; . \tag{25}$$

[*Sugerencia*: Sea $y = u + v$, donde $u'' = 0$ y u satisface las condiciones no homogéneas en la frontera en (25), mientras que $v'' = -f$ y v satisface las condiciones homogéneas en la frontera correspondientes, donde $\alpha = \beta = 0$.]

22. Ecuaciones no autoadjuntas. Suponga que el problema homogéneo asociado con el problema con valores en la frontera

$$A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = -f(x) \; , \quad a < x < b \; ,$$
$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \quad \text{y} \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0$$

sólo tiene la solución trivial. Use el método de variación de parámetros y proceda de manera similar a lo realizado en esta sección, para mostrar que la solución de este problema está dada por la fórmula

$$y(x) = \int_a^b K(x, s)f(s)ds \; ,$$

donde

$$K(x, s) = \begin{cases} \dfrac{-z_1(s)z_2(x)}{W[z_1, z_2](s)A_2(s)} \; , & a \le s \le x \; , \\ \dfrac{-z_1(x)z_2(s)}{W[z_1, z_2](s)A_2(s)} \; , & x \le s \le b \; . \end{cases}$$

La función $K(x, s)$ es la **función de Green** para este problema autoadjunto.

En los problemas 23 a 26, use los resultados del problema 22 para (a) determinar la función de Green $K(x, s)$ para el problema (no autoadjunto) con valores en la frontera dado y (b) resuelva el problema con valores en la frontera dado usando funciones de Green.

23. $y'' + 3y' + 2y = -x$;
$y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

24. $y'' - 2y' + y = 1$;
$y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

25. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x$;
$y(1) = 0$, $y(2) = 0$.

26. $x^2y'' + 3xy' - 3y = x$;
$y(1) = 0$, $y'(2) = 0$.

En los problemas 27 a 30, determine la función de Green $H(x, s)$ para la ecuación de cuarto orden

$$y^{(4)}(x) = -f(x) \ ,$$

con las condiciones en la frontera dadas. [*Sugerencia*: *Resuelva el problema con valores en la frontera para* $f(x) = \delta(x - s)$. *Observe que la condición de salto es*

$$\lim_{x\to s^+} \frac{\partial^3 H(x, s)}{\partial x^3} - \lim_{x\to s^-} \frac{\partial^3 H(x, s)}{\partial x^3} = -1.]$$

27. $y(0) = y'(0) = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.

28. $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$.

29. $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(\pi) = y'''(\pi) = 0$.

30. $y(0) = y'(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$.

31. Sean y_1 y y_2 soluciones de

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = 0 \ ,$$

en (a, b). Use la identidad de Abel (ecuación (17) en la sección 4.3) para mostrar que

$$p(x)W[y_1, y_2](x) = C$$

para toda x en $[a, b]$, donde C es una constante.

32. Defina $G(x, s)$ como la (única) función que satisface las propiedades (a)-(c) en el teorema 12. Para mostrar que $G(x, s)$ está dada por la fórmula (12), proceda como sigue:

(i) Use la propiedad (c) para mostrar que $G(x, s)$ tiene la forma

$$G(x, s) = \begin{cases} u(s)z_1(x) \ , & a \le x < s \ , \\ v(s)z_2(x) \ , & s < x \le b \ , \end{cases}$$

donde $L[z_1] = 0$ y z_1 satisface las condiciones en la frontera (21) en $x = a$, mientras que $L[z_2] = 0$ y z_2 satisface las condiciones en la frontera (21) en $x = b$.

(ii) Imponga las condiciones (a) y (b) sobre $G(x, s)$ y muestre que u y v deben satisfacer el sistema

$$v(s)z_2(s) - u(s)z_1(s) = 0 \ ,$$
$$v(s)z_2'(s) - u(s)z_1'(s) = -\frac{1}{p(s)} \ .$$

(iii) Determine u y v a partir de este sistema y deduzca la fórmula (12) para $G(x, s)$.

33. Defina $G(x, s)$ como la solución de las ecuaciones (22)-(24). Para mostrar formalmente que $G(x, s)$ tiene las propiedades (a)-(c) del teorema 12, proceda como sigue:

(i) Use el hecho de que $\delta(x - s) = 0$ para $x \neq s$ para mostrar que $G(x, s)$ satisface la propiedad (c). Además, para cada s fija, las derivadas parciales $(\partial G/\partial x)(x, s)$ y $(\partial^2 G/\partial x^2)(x, s)$ son funciones continuas de x para $x \neq s$.

(ii) Para mostrar que $G(x, s)$ es continua en $[a, b] \times [a, b]$ y concluir la demostración de la propiedad (a), use el hecho de que

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds \ ,$$

la solución de (2)-(4), es continua, y por tanto, para cada f,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [y(s + \varepsilon) - y(s - \varepsilon)] \\ &= \int_a^b \lim_{\varepsilon\to 0^+} [G(s + \varepsilon, s) - G(s - \varepsilon, s)]f(s)ds \ . \end{aligned}$$

(iii) Fije s y haga $x_1 < s < x_2$. Integre formalmente ambos lados de (22) con respecto de x desde $x = x_1$ hasta $x = x_2$, para obtener

$$p(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x, s)\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} q(x)G(x, s)dx = -\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - s)dx \ .$$

Partiendo de esta ecuación, use la continuidad de p, q y G y la siguiente propiedad de la función delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - s)dx = 1$$

para deducir la propiedad (b).

34. Sea $G(x, s)$ la función de Green para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$L[y] + \mu y = -f \ ; \quad B[y] = 0 \ .$$

Sea $f(x) = \delta(x - s)$. Use el método de desarrollos en términos de funciones propias analizado en la sección 11.5 para deducir la siguiente fórmula en términos de funciones propias para $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(s)}{\lambda_n - \mu} \ ,$$

donde $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal de funciones propias con valores propios correspondientes $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ para

$$L[y] + \lambda y = 0 ; \quad B[y] = 0 .$$

Suponga que μ *no* es un valor propio.

35. Muestre que la propiedad (b) del teorema 12 es equivalente a

$$\lim_{s \to x^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) - \lim_{s \to x^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) = \frac{1}{p(x)} .$$

11.7 PROBLEMAS SINGULARES DE STURM-LIOUVILLE CON VALORES EN LA FRONTERA

En las aplicaciones al flujo de calor en un cilindro, aparecen problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera que no satisfacen *todas* las condiciones necesarias para que el problema sea regular (véase la sección 1.13).

Sea

$$\textbf{(1)} \qquad L[y](x) := \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y$$

y consideremos la ecuación

$$\textbf{(2)} \qquad L[y](x) + \lambda r(x)y(x) = 0 , \qquad a < x < b .$$

Suponemos que $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ con funciones continuas en (a, b) con valores reales, y además $p(x)$ y $r(x)$ son positivas en (a, b). Observe que nuestras hipótesis sólo se aplican en el intervalo *abierto* (a, b) y *no* en el intervalo cerrado $[a, b]$, como en el caso de un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Llamamos a la ecuación (2) una **ecuación singular de Sturm-Liouville**† si una o más de las siguientes situaciones ocurren:

(a) $\lim_{x \to a^+} p(x) = 0$ o $\lim_{x \to b^-} p(x) = 0$.

(b) $p(x)$, $q(x)$ o $r(x)$ se vuelven no acotadas cuando x tiende a a o a b.

(c) El intervalo (a, b) no está acotado (por ejemplo, (a, ∞), $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$).

Tres ejemplos importantes de ecuaciones singulares de Sturm-Liouville son la ecuación de Bessel, la ecuación de Legendre y la ecuación de Hermite. La ecuación de Bessel describe la variable radial cuando la ecuación del calor, de onda o de Laplace se separa en coordenadas cilíndricas; los coeficientes no están acotados cuando la coordenada radial tiende a cero, cerca del eje z. La ecuación de Legendre controla la variable de ángulo longitudinal cuando estas ecuaciones diferenciales parciales se separan en coordenadas esféricas; los coeficientes no están acotados cuando el ángulo tiende a 0 o a π (cerca de los polos). La ecuación de Hermite surge al separar la ecuación de Schrödinger para un oscilador masa-resorte en mecánica cuántica; la variable independiente x va de $-\infty$ a $+\infty$.

†Para un tratamiento más riguroso de los problemas singulares generales de Sturm-Liouville, véase "Orthogonal Polynomials and Singular Sturm-Liouville Systems, I", por Lance L. Littlejohn y Allan M. Krall, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 16, núm. 3, 1986, páginas 435-479.

Ecuación de Bessel de orden ν

(3) $$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2 - \nu^2)y = 0 \ , \qquad 0 < t < \sqrt{\lambda}b$$

se puede transformar mediante la sustitución $t = \sqrt{\lambda}x$ en la ecuación singular de Sturm-Liouville

(4) $$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0 \ , \qquad 0 < x < b \ .$$

En este caso, $p(x) = x$, que se anula para $x = 0$. Además, para $\nu \neq 0$, la función $q(x) = -\nu^2/x$ no está acotada cuando $x \to 0^+$.

Ecuación de Legendre

(5) $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \ , \qquad -1 < x < 1$$

se puede escribir como la ecuación singular de Sturm-Liouville

(6) $$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0 \ , \qquad -1 < x < 1 \ ,$$

donde $\lambda = n(n + 1)$. En este caso, $p(x) = 1 - x^2$ se anula en los dos extremos ± 1.

Ecuación de Hermite[†]

(7) $$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \ , \qquad -\infty < x < \infty \ ,$$

al ser multiplicada por e^{-x^2}, se convierte en la ecuación singular de Sturm-Liouville

(8) $$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right] + \lambda e^{-x^2}y = 0 \ , \qquad -\infty < x < \infty \ ,$$

donde $\lambda = 2n$. En este caso, el intervalo $(-\infty, \infty)$ no está acotado.

En la sección 11.3 observamos que el operador lineal asociado con un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera era un operador *autoadjunto*. Como muchas de las propiedades de los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera son consecuencia de este hecho, es útil saber cuáles condiciones en la frontera convierten a una ecuación singular de Sturm-Liouville en un problema autoadjunto. Para investigar esta cuestión, regresemos a la fórmula de Green (véase la ecuación (10) en la sección 11.3). Como p y q son continuas en (a, b), el único cambio posible en la fórmula de Green para una ecuación singular de Sturm-Liouville es que la integral sea impropia en uno o ambos extremos. En este caso, tenemos

(9) $$\int_a^b \big(uL[v] - vL[u]\big)(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} p(x)W[u, v](x) - \lim_{x \to a^+} p(x)W[u, v](x) \ .$$

[†]***Nota histórica:*** Recibe este nombre en honor del matemático francés Charles Hermite (1822-1901), quien contribuyó de manera significativa al álgebra y el análisis.

El operador L será autoadjunto si el lado derecho de (9) se anula (véase la ecuación (13) en la sección 11.3). Esto ocurriría si cada límite, considerado por separado, fuese igual a cero. Así, consideremos uno de los límites del lado derecho de (9) y veamos qué condiciones en la frontera sobre u y v garantizan que

(10) $$\lim_{x\to a^+} p(x)\left[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\right] = 0 \ .$$

Un tipo de condición en la frontera para el que vale (10) es la condición separada en la frontera. Éste es el tipo de condición en la frontera que imponemos sobre un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Además, aparece de manera natural en aplicaciones tales como el flujo de calor en un alambre (véase la sección 11.1). Otro tipo de condición en la frontera que encontramos en nuestro estudio de la ecuación de Laplace es pedir que $y(x)$ y $y'(x)$ permanezcan acotadas cuando x tiende al punto extremo (véanse los ejemplos 2 y 3 de la sección 10.7). Esta condición es más general que la condición separada en la frontera. Una tercera condición que surge en las aplicaciones consiste en pedir que $\sqrt{p(x)}y(x)$ y $\sqrt{p(x)}y'(x)$ tienden a cero cuando x tiende a la frontera (véase el proyecto A). Estos tres tipos de condiciones en la frontera, junto con hipótesis adecuadas sobre $p(x)$, garantizan que la ecuación (10) se cumple en el punto extremo a, como mostraremos a continuación.

CONDICIONES SINGULARES EN LA FRONTERA

Lema 1. Cualquiera de las tres condiciones siguientes garantiza que se cumple la ecuación (10):

(i) $\lim_{x\to a^+} p(x) = p(a)$ existe y u, v satisfacen la condición en la frontera

(11) $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$, con a_1, a_2 no ambos nulos.

(ii) $\lim_{x\to a^+} p(x) = 0$ y u, v satisfacen la condición en la frontera

(12) $y(x), y'(x)$ permanecen acotados cuando $x \to a^+$.

(iii) Las funciones u, v satisfacen la condición en la frontera

(13) $$\lim_{x\to a^+} \sqrt{p(x)}\, y(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} \sqrt{p(x)}\, y'(x) = 0 \ .$$

Demostración.

(i) Sin pérdida de generalidad, suponemos que $a_1 \neq 0$, Entonces, (11) implica que $u(a) = -(a_2/a_1)u'(a)$ y $v(a) = -(a_2/a_1)v'(a)$. Al sustituir en el lado izquierdo de (10) llegamos a

(14) $$\begin{aligned} p(a)\left[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)\right] &= p(a)\left[-(a_2/a_1)u'(a)v'(a) + (a_2/a_1)u'(a)v'(a)\right] \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

(ii) Si u, u', v y v' permanecen acotadas cuando x tiende a a por la derecha, entonces el factor entre corchetes en el lado izquierdo de (10) permanece acotado. Como $\lim_{x\to a^+} p(x) = 0$, el lado izquierdo no es más que un factor acotado, por un factor que tiende a cero. Por lo tanto, el lado izquierdo tiende a cero y se cumple (10).

(iii) Si u y v satisfacen (13), entonces al sustituir en el lado izquierdo de (10) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] &= \left(\lim_{x\to a^+} \sqrt{p(x)}u(x)\right)\left(\lim_{x\to a^+} \sqrt{p(x)}v'(x)\right)\\ &\quad - \left(\lim_{x\to a^+} \sqrt{p(x)}u'(x)\right)\left(\lim_{x\to a^+} \sqrt{p(x)}v(x)\right)\\ &= 0 - 0 = 0 .\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la ecuación (10). ■

Aunque el lema 1 se refiere al punto a, se puede establecer un lema similar para el punto b que garantice

$$\textbf{(15)} \qquad \lim_{x\to b^-} p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] = 0 .$$

Si (10) y (15) se cumplen, el operador L será autoadjunto (recuerde la ecuación (9)). Por ejemplo, si la condición (i) del lema 1 se cumple para a y el análogo para la condición (ii) se cumple para b, entonces L es autoadjunto.

Aunque las condiciones en la frontera impuestas sobre la ecuación singular de Sturm-Liouville impliquen que el operador lineal sea autoadjunto, pueden surgir otras dificultades. Por ejemplo, los valores propios pueden *no* ser discretos (aislados). En efecto, puede existir todo un intervalo I tal que si λ es un número en I, entonces el problema tenga una solución no trivial (véase el proyecto B). En tal caso, se dice que el problema tiene un **espectro continuo**. También es posible que haya valores propios discretos y un espectro continuo (véase la figura 11.4). Cuando el problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera no tiene espectros continuos sino un número infinito de valores propios discretos, podemos modificar los argumentos dados en la sección 11.3 para problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera y mostrar que los valores propios deben ser reales y que las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con respecto de $r(x)$ en (a, b) (véase el problema 7). Además, las fórmulas para los coeficientes de un desarrollo en términos de funciones propias son los mismos. Sin embargo, la convergencia del desarrollo mediante funciones propias debe analizarse de manera individual. Para un análisis más profundo de los problemas singulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera, el lector puede consultar un texto avanzado sobre la materia.†

Para ilustrar el comportamiento de las soluciones de problemas singulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera, estudiaremos por separado los problemas con valores en la frontera asociados con la ecuación de Bessel, la ecuación de Legendre y la ecuación de Hermite.

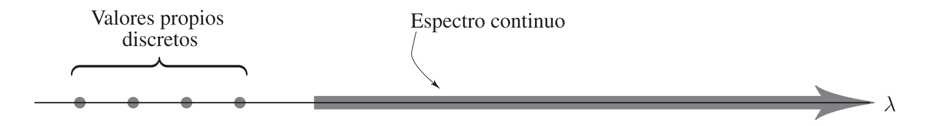


Figura 11.4 Conjunto de valores propios que contiene puntos discretos al igual que un intervalo

†Véase por ejemplo el libro de K. Yosida, *Lectures on Differential and Integral Equations* (Dover, Nueva York, 1991).

Ecuación de Bessel

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera típico asociado a la ecuación de Bessel de orden ν es

$$\textbf{(16)} \qquad \frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0 , \qquad 0 < x < 1 ,$$

$$\textbf{(17)} \qquad y(x), y'(x) \text{ permanecen acotadas cuando } x \to 0^+ ,$$

$$\textbf{(18)} \qquad y(1) = 0 .$$

Este problema es autoadjunto, pues la condición (ii) del lema 1 se cumple en $a = 0$ y el análogo de la condición (i) del lema 1 se cumple en $b = 1$.

Si $\lambda > 0$, la sustitución $t = \sqrt{\lambda}x$ transforma (16) en la ecuación de Bessel usual

$$\textbf{(19)} \qquad t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$$

(¡verifíquelo!). En la sección 8.8 usamos los métodos de series de potencias para mostrar que una solución general de (19) es

$$y(t) = c_1J_\nu(t) + c_2Y_\nu(t) ,$$

o

$$y(x) = c_1J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2Y_\nu(\sqrt{\lambda}x) .$$

El desarrollo en serie de potencias para $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ implica que para $\nu = 0$ o $\nu \geq 1$, $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ y $\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda}x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 0^+$ (véase el problema 9). Sin embargo, la función $Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ no está acotada. Por lo tanto, $c_2 = 0$ para que se cumpla (17). (El caso en que $0 < \nu < 1$ se analiza en el problema 10.)

Para que se cumpla (18) con $y(x) = c_1J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$, necesitamos que $c_1 = 0$ o

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}x) = 0 .$$

Es decir, $\sqrt{\lambda}$ debe ser un cero de J_ν para que $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ sea una solución no trivial de (16)-(18). Se sabe que la función de Bessel J_ν tiene una sucesión creciente de ceros reales:

$$0 < \alpha_{\nu 1} < \alpha_{\nu 2} < \alpha_{\nu 3} < \cdots .$$

Por lo tanto, $\lambda_n = \alpha_{\nu n}{}^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son valores propios de (16)-(18) con funciones propias correspondientes

$$\textbf{(20)} \qquad y_n(x) = c_1J_\nu(\alpha_{\nu n}x) .$$

Éstos son los únicos valores propios positivos. Además, se puede mostrar que no existen valores propios no positivos de (16)-(18) (véase el problema 11).

Las funciones propias en (20) son ortogonales con respecto de la función de ponderación $r(x) = x$:

$$\textbf{(21)} \qquad \int_0^1 J_\nu(\alpha_{\nu n}x)J_\nu(\alpha_{\nu m}x)x\,dx = 0 , \qquad n \neq m .$$

Si $f(x)$ es una función dada, entonces un desarrollo mediante funciones propias asociado a f es

(22) $$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(\alpha_{\nu n} x) \ ,$$

donde

$$a_n = \frac{\int_0^1 f(x) J_\nu(\alpha_{\nu n} x) x\, dx}{\int_0^1 J_\nu^2(\alpha_{\nu n} x) x\, dx} \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Cuando f y f' son continuas por partes en [0, 1], el desarrollo en (22) converge a $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ para cada x en (0, 1).

Ecuación de Legendre

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera típico asociado a la ecuación de Legendre es

(23) $$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0 \ , \qquad -1 < x < 1 \ ,$$

(24) $y(x), y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm 1$.

Este problema es autoadjunto, pues la condición (ii) del lema 1 se cumple en cada extremo. En la sección 8.8 vimos que (23) tiene soluciones polinomiales para $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Estas soluciones son múltiplos constantes de los polinomios de Legendre

(25) $$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2n - 2m)!}{(n - m)! m! (n - 2m)!} x^{n-2m} \ ,$$

donde $[n/2]$ es el máximo entero menor o igual que $n/2$ (véase (43) en la página 491, sección 8.8). Los cuatro primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1 \ , \qquad P_1(x) = x \ , \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ , \qquad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \ .$$

Dejaremos que el lector muestre que los únicos valores propios para (23)-(24) son $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y que las funciones propias correspondientes son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ (véase el problema 12). El hecho de que los polinomios de Legendre sean (salvo múltiplos constantes) las únicas funciones propias correspondientes a estos valores propios es consecuencia de que una segunda solución linealmente independiente de (23) implica un término $\ln(1 - x)$ que no está acotado cuando $x \to 1^-$ (véase el problema 13).

Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son ortogonales en $[-1, 1]$ con respecto de $r(x) = 1$:

(26) $$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \ , \qquad n \neq m \ .$$

Si $f(x)$ es una función dada, entonces un desarrollo mediante funciones propias para $f(x)$, en términos de los polinomios de Legendre es

(27) $$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \ ,$$

donde

$$a_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx} \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Los resultados de convergencia similares a los dados para series de Fourier se cumplen para el desarrollo en (27) (véase la sección 10.3).

Ecuación de Hermite

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera asociado a la ecuación de Hermite es

(28) $$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right] + \lambda e^{-x^2} y = 0 \ , \qquad -\infty < x < \infty \ ,$$

(29) $$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2/2} y(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2/2} y'(x) = 0 \ .$$

Por la condición (iii) del lema 1, el operador lineal asociado a (28)-(29) es autoadjunto.

En la sección 8.8 notamos que la ecuación de Hermite

(30) $$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

(que es equivalente a (28)) tiene soluciones polinomiales que son múltiplos constantes de los polinomios de Hermite $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Como las soluciones polinomiales satisfacen las condiciones en la frontera (29), vemos que el problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (28)-(29) tiene valores propios $\lambda_n = 2n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, con funciones propias correspondientes $H_n(x)$. Se puede mostrar que éstos son los únicos valores propios. Los cuatro primeros polinomios de Hermite son

$$H_0(x) = 1 \ , \qquad H_1(x) = 2x \ , \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2 \ , \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

(véase el problema 37 de los ejercicios 8.8).

Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ son ortogonales en $(-\infty, \infty)$ con respecto de la función de ponderación $r(x) = e^{-x^2}$:

(31) $$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\,dx = 0 \ , \qquad n \neq m \ .$$

Si f es una función dada, entonces un desarrollo con funciones propias asociado a f está dado por

(32) $$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \ ,$$

donde

$$a_n = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)e^{-x^2}\,dx}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Un estudio detallado de los valores propios y las funciones propias para el problema de Hermite con valores en la frontera (28)-(29) junto con las condiciones para la convergencia del desarrollo en términos de funciones propias en (32) queda fuera de los objetivos de este libro. El lector puede consultar estos temas en un libro avanzado.†

EJERCICIOS 11.7

En los problemas 1 a 6, verifique primero si el problema homogéneo correspondiente es autoadjunto. Luego determine un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución del problema no homogéneo con valores en la frontera dado, donde f es una función continua y μ no es un valor propio del problema homogéneo correspondiente.

1. $(xy')' \quad \frac{4}{x}y + \mu xy = f(x)$, $\quad 0 < x < 1$,
$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 0^+$, $y(1) = 0$.

2. $(xy')' - \frac{9}{x}y + \mu xy = f(x)$, $\quad 0 < x < 1$,
$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 0^+$, $y(1) = 0$.

3. $(xy')' + \mu xy = f(x)$, $\quad 0 < x < 1$,
$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 0^+$, $y'(1) = 0$.

4. $[(1 - x^2)y']' + \mu y = f(x)$, $\quad -1 < x < 1$,
$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm 1$.

5. $[(1 - x^2)y']' + \mu y = f(x)$, $\quad 0 < x < 1$,
$y(0) = 0$, $y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 1^-$.
[*Sugerencia*: Las funciones propias son polinomios de Legendre de grado impar.]

6. $[(1 - x^2)y']' + \mu y = f(x)$, $\quad 0 < x < 1$,
$y'(0) = 0$, $y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 1^-$.
[*Sugerencia*: Las funciones propias son polinomios de Legendre de grado par.]

7. Sea (2) una ecuación singular de Sturm-Liouville. Supongamos que $B[y] = 0$ representa condiciones lineales homogéneas en la frontera tales que junto con (1) dan lugar a un operador autoadjunto L. Suponga que este problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera no tiene espectros continuos, pero sí un número infinito de valores propios discretos λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Use argumentos similares a los de la sección 11.3 para problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera y:
(a) Muestre que los valores propios deben ser reales.
(b) Muestre que las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con respecto de $r(x)$ en (a, b).

8. Verifique que el cambio de variable $t = \sqrt{\lambda}x$ transforma la ecuación (3) en la ecuación (4).

9. El desarrollo en serie de potencias de $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ tiene la forma $(\sqrt{\lambda}x)^\nu g(\sqrt{\lambda}x)$, donde g es analítica en torno de $x = 0$. Muestre que para $\nu = 0$ o $\nu \geq 1$, $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ y $J_\nu'(\sqrt{\lambda}x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 0^+$.

10. Para la ecuación de Bessel de orden ν, $0 < \nu < 1$, reemplazamos la condición en la frontera (17) por

(33) $$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} xy'(x) = 0 .$$

(a) Muestre que si u y v satisfacen las condiciones en la frontera en (33), entonces la ecuación (10) se cumple en $a = 0$ y por tanto el problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (16), (18) y (33) da lugar a un operador autoadjunto.

†Véanse, por ejemplo, los libros de F. V. Atkinson, *Discrete and Continuous Boundary Value Problems* (Academic Press, Orlando, Florida, 1964) y E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*, volúmenes I y II (Clarendon, Oxford, 1962).

(b) Use la representación de $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ dada en el problema (9) para mostrar que $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ satisface las condiciones en la frontera en (33).

11. Para mostrar que los valor propios para la ecuación de Bessel deben ser positivos, proceda como sigue:

(a) Sea $\phi(x)$ una función propia para (16)-(18), con valor propio correspondiente λ. Sustituya $\phi(x)$ en (16). Ahora, multiplique ambos lados de (16) por $\phi(x)$ e integre de 0 a 1. Use integración por partes para obtener

(34)
$$-\int_0^1 x[\phi'(x)]^2dx - \nu^2\int_0^1 x^{-1}[\phi(x)]^2dx + \lambda\int_0^1 x[\phi(x)]^2dx = 0 \ .$$

(b) Para $\nu > 0$, use la ecuación (34) para concluir que $\lambda > 0$.

(c) Para $\nu = 0$, use la ecuación (34) para concluir que $\lambda \geq 0$. Para demostrar que $\lambda = 0$ no es un valor propio para $\nu = 0$, halle una solución general de $xy'' + y' = 0$ y muestre que sólo la solución trivial satisface las condiciones en la frontera en (17)-(18).

12. **(a)** Muestre que los únicos valores propios no negativos para (23)-(24) son $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. [*Sugerencia*: Determine un desarrollo en serie de potencias para una solución general de (23).]

(b) Muestre que (23)-(24) no tiene valores propios negativos. [*Sugerencia*: Use un procedimiento similar al bosquejado en el problema 11.]

13. Muestre que las únicas funciones propias de (23)-(24) correspondientes a los valores propios $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, son múltiplos de los polinomios de Legendre $P_n(x)$. [*Sugerencia*: En la sección 8.8 mostramos que los exponentes de la singularidad $x_0 = 1$ para la ecuación de Legendre se anulaban. Use el teorema 7 de la sección 8.7 para mostrar que cualquier otra solución tiene un término logarítmico que se vuelve no acotado cuando $x \to 1^-$.]

14. **(a)** Use la fórmula (25) para mostrar que $P_n(x)$ es una función impar cuando n es impar y que es una función par cuando n es par.

(b) Muestre que los polinomios de Legendre de orden impar son ortogonales en (0, 1); es decir,

$$\int_0^1 P_{2m+1}(x)P_{2n+1}(x)\,dx = 0 \ , \qquad m \neq n \ .$$

(c) Muestre que los polinomios de Legendre de orden par son ortogonales en (0, 1); es decir,

$$\int_0^1 P_{2m}(x)P_{2n}(x)dx = 0 \ , \qquad m \neq n \ .$$

15. Ecuación de Chebyshev (Tchebichef).

(a) Muestre que la ecuación de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0 \ ,$$
$$-1 < x < 1 \ ,$$

se puede escribir en la forma de Sturm-Liouville

(35)
$$[(1 - x^2)^{1/2}y']' + \lambda(1 - x^2)^{-1/2}y = 0 \ ,$$
$$-1 < x < 1 \ .$$

(b) Se puede mostrar que la ecuación de Chebyshev (35) con las condiciones en la frontera

$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm 1$

tiene valores propios $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Las funciones propias correspondientes son los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$. Los cuatro primeros son

$$T_0(x) = 1 \ , \qquad T_1(x) = x \ ,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \ , \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x \ .$$

Muestre que

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{(1 - x^2)^{1/2}}dx = 0 \ , \qquad m \neq n \ .$$

(c) Encuentre un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución del problema no homogéneo con valores en la frontera

$$[(1 - x^2)^{1/2}y']' + \mu(1 - x^2)^{-1/2}y = f(x) \ ,$$
$$-1 < x < 1 \ ,$$

$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm 1$,

donde f es continua en $[-1, 1]$ y μ no es un valor propio del problema homogéneo correspondiente.

16. Ecuación de Laguerre.

(a) Muestre que la ecuación de Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0 \ ,$$
$$0 < x < \infty$$

se puede escribir en la forma de Sturm-Liouville

(36) $(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0 \ ,$

$0 < x < \infty \ .$

(b) Se puede mostrar que la ecuación de Laguerre (36) con las condiciones en la frontera

$y(x), y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 0^+$,

$x^{1/2}e^{-x/2}y(x)$ y $x^{1/2}e^{-x/2}y'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$

tiene valores propios $\lambda_n = n, n = 0, 1, 2, \ldots$. Las funciones propias correspondientes son los polinomios de Laguerre $L_n(x)$. Los cuatro primeros son

$L_0(x) = 1 \ , \quad L_1(x) = 1 - x \ ,$

$L_2(x) = (2 - 4x + x^2)/2 \ ,$

$L_3(x) = (6 - 18x + 9x^2 - x^3)/6 \ .$

Muestre que

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = 0 \ , \qquad m \neq n \ .$$

(c) Encuentre un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución de la ecuación no homogénea

$(xe^{-x}y')' + \mu e^{-x}y = f(x) \ ,$

$0 < x < \infty \ ,$

que satisface las condiciones en la frontera de la parte (b), donde μ no es un valor propio del problema homogéneo correspondiente, f es continua en $[0, \infty)$ y satisface

$\lim_{s \to \infty} f(s)e^{-s/2} = 0 \ .$

11.8 OSCILACIÓN Y TEORÍA DE COMPARACIÓN

En el capítulo 4 desarrollamos un modelo para un sistema sencillo masa-resorte que implicaba una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Encontramos que cuando la constante de amortiguamiento es suficientemente pequeña, la masa vibra de un lado a otro, u **oscila**. Más precisamente, la solución era un producto de un factor de amortiguamiento $Ae^{-(b/2m)t}$ y una función seno $\operatorname{sen}(\beta t + \theta)$ (véase la ecuación (17) de la sección 4.11).

Por lo general, las funciones que oscilan no se pueden expresar de esta manera. En realidad, el concepto de oscilación es difícil de capturar en forma matemática. Es claro que las funciones periódicas (no constantes) oscilan, pero muchos otros tipos de funciones también exhiben lo que llamaríamos comportamiento oscilatorio. Para nuestros fines, identificaremos el comportamiento oscilatorio de $y = f(x)$ con el contacto repetido con el eje x. Así, si la gráfica de una función corta al eje x con más frecuencia, entonces oscilará más. Si una función tiene un número *infinito* de ceros en un intervalo $[a, \infty)$, decimos que la función es **oscilatoria**. Por lo tanto, el estudio del comportamiento oscilatorio de una función significa que estamos investigando el número y posición de sus ceros.

En esta sección estudiaremos los ceros de las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0 \ , \qquad a < x < b \ ,$$

donde p, p' y q son continuas en $[a, b]$ y p es positiva en $[a, b]$.[†] Lo primero que nos preguntamos es: ¿puede una solución tener una infinidad de ceros en (a, b)? El siguiente teorema muestra que sólo la solución trivial puede tener una infinidad de ceros.

NÚMERO FINITO DE CEROS

Teorema 13. Sea ϕ una solución de (1) en (a, b). Si ϕ tiene una infinidad de ceros en *cualquier* intervalo cerrado y acotado $[a', b'] \subset (a, b)$, entonces $\phi(x) \equiv 0$ en (a, b).

[†] Para un intervalo no acotado, como $(0, \infty)$, suponemos que las condiciones sobre p y q se cumplen en el intervalo abierto $(0, \infty)$.

Demostración. Para demostrar este teorema, necesitamos un resultado del análisis real llamado teorema de *Bolzano-Weierstrass*, el cual afirma que un conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite. Es decir, existe una sucesión de puntos distintos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el conjunto y un punto x_0 tal que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x_0$. Aquí estamos suponiendo que una infinidad de ceros de ϕ están en $[a', b']$, un intervalo acotado. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de ceros (distintos) de ϕ que convergen a cierto punto x_0. Como $[a', b']$ es un intervalo cerrado, el punto x_0 debe estar en $[a', b']$. Afirmamos que:

El punto x_0 es un cero de ϕ. Como x_n es un cero de ϕ (es decir, $\phi(x_n) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$), la continuidad de ϕ implica que

$$\phi(x_0) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ .$$

El punto x_0 es un cero de ϕ'. Por hipótesis, ϕ' existe para x en $[a', b']$ y tenemos que

$$\phi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} \ .$$

Como este límite debe existir para *cualquier* sucesión de puntos distintos que tienden a x_0, podemos elegir la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de ceros de ϕ. Así,

$$\phi'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(x_n)}{x_n - x_0} = 0 \ .$$

Por último, como $\phi(x_0) = 0$ y $\phi'(x_0) = 0$, el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales de segundo orden implica que $\phi(x) \equiv 0$ en (a, b) (véase el teorema 2 en la sección 4.2). ■

Observación. El teorema 13 muestra que las soluciones con una infinidad de ceros sólo pueden ocurrir en un intervalo no acotado si p es positiva en todo punto.

Otra cuestión que puede surgir es: ¿pueden dos soluciones de la ecuación (1) tener un cero común en $[a, b]$? La respuesta es afirmativa, pero en ese caso, una función debe ser un múltiplo constante de la otra.

CEROS COMUNES

Teorema 14. Si ϕ y ψ son dos soluciones de (1) y $\phi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ para algún x_0 en $[a, b]$, entonces ϕ y ψ son linealmente dependientes en $[a, b]$.

Demostración. Al calcular el wronskiano de ϕ y ψ y usar el hecho de que $\phi(x_0) = \psi(x_0) = 0$, tenemos

(2) $$W[\phi, \psi](x_0) = \phi(x_0)\psi'(x_0) - \phi'(x_0)\psi(x_0) = 0 \ .$$

Pero cuando el wronskiano de dos soluciones se anula en algún punto de $[a, b]$, estas soluciones deben ser linealmente dependientes en $[a, b]$, de acuerdo con el corolario 1 de la sección 4.3. Así, ϕ y ψ son linealmente dependientes. ■

Una consecuencia inmediata del teorema 4 es que si ϕ y ψ son dos soluciones linealmente independientes, entonces deben tener *ceros distintos*. Pero en ese caso, ¿existe alguna relación entre sus ceros respectivos? Una respuesta viene dada por el teorema de separación de Sturm.

Figura 11.5 Entrelazado de ceros de soluciones linealmente independientes

TEOREMA DE SEPARACIÓN DE STURM

Teorema 15. Sean ϕ y ψ dos soluciones linealmente independientes de (1). Entonces, entre cualesquiera dos ceros consecutivos de ϕ en $[a, b]$, existe precisamente un cero de ψ (véase la figura 11.5).

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos ceros consecutivos de ϕ en $[a, b]$. Como ϕ y ψ son linealmente independientes, el teorema anterior muestra que $\psi(x_1) \neq 0$ y $\psi(x_2) \neq 0$.

Supongamos que la condición es falsa, es decir, que $\psi(x) \neq 0$ en $[x_1, x_2]$. Entonces la función $f(x) := \phi(x)/\psi(x)$ está bien definida y es continua en $[x_1, x_2]$ y continuamente diferenciable en (x_1, x_2). Como $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 0$, tenemos que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. El teorema de Rolle implica que existe un número z en (x_1, x_2) tal que $f'(z) = 0$.

Al calcular $f'(z)$, tenemos

$$\textbf{(3)} \qquad 0 = f'(z) = \frac{\phi'(z)\psi(z) - \phi(z)\psi'(z)}{[\psi(z)]^2} = \frac{W[\psi, \phi](z)}{[\psi(z)]^2} \, .$$

Pero esto significa que el wronskiano de ϕ y ψ se anula en z, lo que contradice el hecho de que ϕ y ψ sean linealmente independientes. Así, $\psi(x)$ debe tener un cero en (x_1, x_2).

Al intercambiar los papeles de ϕ y ψ, vemos también que entre dos ceros consecutivos cualesquiera de ψ hay un cero de ϕ. Por lo tanto, no puede haber más de un cero de ψ entre dos ceros consecutivos de ϕ. ■

Una consecuencia de este teorema es que entre dos ceros consecutivos de una función de Bessel del primer tipo J_ν hay un cero de la función de Bessel del segundo tipo Y_ν (y viceversa). Esto se debe a que estas dos funciones son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Sturm-Liouville

$$\textbf{(4)} \qquad \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0 \, , \qquad x > 0 \, .$$

Como J_ν tiene una infinidad de ceros en $(0, \infty)$, concluimos de esta propiedad de entrelazado de los ceros que Y_ν también tiene una infinidad de ceros. Esto ilustra un fenómeno general.

SOLUCIONES OSCILATORIAS

Corolario 3. Sea $[a, \infty)$ el intervalo del teorema 15. Si una solución (no trivial) de (1) es oscilatoria, entonces todas las soluciones de (1) son oscilatorias.

Demostración. Sea ϕ una solución no trivial de (1), con una infinidad de ceros en $[a, \infty)$. Por el teorema de separación de Sturm, cualquier otra solución debe tener un cero entre cada pareja sucesiva de ceros de ϕ y por tanto debe tener también una infinidad de ceros en $[a, \infty)$. ■

Al aplicar el teorema 15 a la ecuación de Hermite en la forma de Sturm-Liouville

$$\textbf{(5)} \qquad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right) + 2ne^{-x^2}y = 0 \ , \qquad -\infty < x < \infty \ ,$$

donde n es un entero no negativo, vemos que como una solución es el polinomio de Hermite $H_n(x)$ de grado n y sabemos que éste tiene n ceros reales, entonces las otras soluciones deben tener sólo un cero entre los ceros consecutivos de $H_n(x)$, para un mínimo de $n - 1$ ceros. Además, cualquier otra solución (no trivial) no puede tener más de $n + 1$ ceros, pues de lo contrario, $H_n(x)$ tendría más ceros de lo permitido por su grado.

Hasta ahora hemos comparado los ceros de dos soluciones de la *misma* ecuación. También es posible tener una relación entre los ceros de soluciones de dos ecuaciones distintas. Por ejemplo, para las ecuaciones

$$y'' + m^2y = 0 \quad \text{y} \quad y'' + n^2y = 0 \ ,$$

vemos que la primera tiene una solución general de la forma $\phi_1(x) = A_1 \operatorname{sen}(m(x - \theta_1))$ y la segunda, $\phi_2(x) = A_2 \operatorname{sen}(n(x - \theta_2))$. La distancia entre los ceros consecutivos de la primera es π/m y para la segunda es π/n. Por lo tanto, cuando $m < n$, la distancia entre los ceros de ϕ_1 es mayor que la distancia entre los ceros de ϕ_2. En otras palabras, para $n^2 > m^2$, entre dos ceros cualesquiera de $\phi_1(x)$ existe un cero de $\phi_2(x)$. Un resultado similar es válido cuando las constantes m^2 y n^2 se reemplazan por funciones de x. El siguiente resultado es una versión del teorema fundamental de Sturm.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE STURM

Teorema 16. Sea ϕ_1 una solución no trivial de

$$\textbf{(6)} \qquad y'' + q_1(x)y = 0 \ , \qquad a < x < b \ ,$$

y ϕ_2 una solución no trivial de

$$\textbf{(7)} \qquad y'' + q_2(x)y = 0 \ , \qquad a < x < b \ .$$

Suponga que $q_2(x) \geq q_1(x)$ para x en (a, b). Si x_1 y x_2 son dos ceros consecutivos de $\phi_1(x)$ en (a, b), entonces existe un cero de ϕ_2 entre x_1 y x_2 a menos que $q_2(x) = q_1(x)$ en $[x_1, x_2]$ y ϕ_1 y ϕ_2 sean linealmente dependientes en $[x_1, x_2]$.

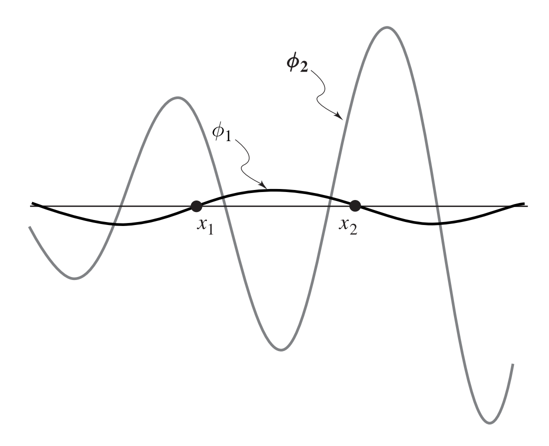


Figura 11.6 Teorema fundamental de Sturm: los ceros de ϕ_2 separan a los ceros de ϕ_1

Observe que la conclusión nos dice que ϕ_2 tiene un cero entre x_1 y x_2 o $\phi_2(x_1) = \phi_2(x_2) = 0$. Véase la figura 11.6.

Demostración del teorema 16. Sean x_1 y x_2 dos ceros sucesivos de ϕ_1. Suponga que $\phi_2(x) \neq 0$ en (x_1, x_2). Queremos mostrar que $q_2 = q_1$ y que ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes en $[x_1, x_2]$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\phi_1(x) > 0$ y $\phi_2(x) > 0$ en (x_1, x_2). Al combinar esto con el hecho de que $q_2(x) \geq q_1(x)$, vemos que

$$\textbf{(8)} \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(W[\phi_2, \phi_1]\right) &= \frac{d}{dx}(\phi_2\phi_1' - \phi_2'\phi_1) = \phi_2'\phi_1' + \phi_2\phi_1'' - \phi_2'\phi_1' - \phi_1\phi_2'' \\ &= \phi_2\phi_1'' - \phi_2''\phi_1 = \phi_2(-q_1\phi_1) - (-q_2\phi_2)\phi_1 \\ &= \phi_1\phi_2(q_2 - q_1) \geq 0 \end{aligned}$$

para x en (x_1, x_2). Por lo tanto, $W[\phi_2, \phi_1](x)$ es no decreciente en (x_1, x_2). Sin embargo, como $\phi_1(x_1) = \phi_1(x_2) = 0$ y ϕ_1 es positiva en (x_1, x_2), debemos tener $\phi'_1(x_1) \geq 0$ y $\phi'_1(x_2) \leq 0$. Por lo tanto, como $\phi_2(x) \geq 0$,

$$W[\phi_2, \phi_1](x_1) = \phi_2(x_1)\phi_1'(x_1) \geq 0$$

y

$$W[\phi_2, \phi_1](x_2) = \phi_2(x_2)\phi_1'(x_2) \leq 0 \ .$$

Como $W[\phi_2, \phi_1]$ es no decreciente, la única forma para que sea no negativa en x_1 y no positiva en x_2 es que

$$\textbf{(9)} \qquad W[\phi_2, \phi_1](x) \equiv 0 \ , \qquad x \text{ en } [x_1, x_2] \ .$$

Es claro que la ecuación (9) implica que $\dfrac{d}{dx} W[\phi_2, \phi_1](x) = 0$ en $[x_1, x_2]$. La ecuación (8) implica que $q_2 = q_1$ en $[x_1, x_2]$. Pero en ese caso, ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen la misma ecuación diferencial en $[x_1, x_2]$ y su wronskiano se anula en ese intervalo. Por lo tanto, ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes en $[x_1, x_2]$. ■

Una consecuencia inmediata del teorema fundamental de Sturm es la siguiente.

SOLUCIONES NO OSCILATORIAS

Corolario 4. Si $q(x) \leq 0$ en $[a, b]$, entonces una solución no trivial ϕ de la ecuación

$$\textbf{(10)} \qquad y'' + q(x)y = 0 \;, \qquad a < x < b \;,$$

puede tener a lo más un cero en $[a, b]$.

Demostración. Como $\psi(x) \equiv 1$ es una solución de la ecuación $y'' + 0 \cdot y = 0$ y $q(x) \leq 0$, el teorema fundamental de Sturm implica (con $q_1 = q$, $q_2 \equiv 0$) que si ϕ tiene dos o más ceros en $[a, b]$, entonces ψ debe tener un cero entre ellos. Como ψ nunca se anula, ϕ puede tener a lo más un cero en $[a, b]$. ■

El teorema fundamental de Sturm nos dice que el comportamiento oscilatorio de una solución para la ecuación (10) queda determinado por el signo y magnitud de $q(x)$. Por ejemplo, cuando $q(x) \leq 0$, una solución puede tener a lo más un cero o, cuando $q(x) > m^2$, una solución debe tener un cero entre cualesquiera dos ceros de una solución de $y'' + m^2y = 0$. En el último caso, los ceros de las soluciones de (10) deben estar a menos de una distancia π/m entre sí, pues $y'' + m^2y = 0$ tiene una solución con ceros que está a una distancia de π/m entre sí (véase el problema 12).

En el siguiente ejemplo, consideremos la distancia entre ceros consecutivos de la solución para la ecuación de Bessel.

EJEMPLO 1 Para $a > 0$, analizar el número de ceros en el intervalo $[a, a + \pi)$ de las soluciones para la ecuación de Bessel de orden ν:

$$\textbf{(11)} \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \;, \qquad x > 0 \;.$$

SOLUCIÓN La sustitución $y = ux^{-1/2}$ transforma la ecuación (11) en

$$\textbf{(12)} \qquad u'' + \left[1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right]u = 0 \;, \qquad x > 0 \;,$$

(véase el problema 13). Ahora compararemos las soluciones de (12) con las de $u'' + u = 0$. Observe que $\phi(x) = A\,\mathrm{sen}(x - a)$ es una solución de $u'' + u = 0$ y que tiene ceros en a y $a + \pi$.

Caso 1. $\boldsymbol{\nu > 1/2}$. En este caso, $4\nu^2 - 1 > 0$, de modo que

$$1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2} < 1$$

para x en $[a, a + \pi)$. Así, por el teorema fundamental de Sturm, una solución de (12) no puede tener más de un cero en $[a, a + \pi)$, pues ϕ no tiene ceros en $(a, a + \pi)$. Como $y =$

$ux^{-1/2}$, hemos mostrado que cuando $\nu > 1/2$, cualquier solución de la ecuación de Bessel (11) *a lo más* puede tener un cero en $[a, a + \pi)$.

Caso 2. $\mathbf{0 \le \nu < 1/2}$. En este caso, $4\nu^2 - 1 < 0$, de modo que

$$1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2} > 1$$

para x en $[a, a + \pi)$. De nuevo, por el teorema fundamental de Sturm, una solución de (12) debe tener un cero en $(a, a + \pi)$, pues a y $a + \pi$ son ceros consecutivos de $\phi(x) = A\ \text{sen}(x - a)$. Como $y = ux^{-1/2}$, hemos mostrado que cuando $0 \le \nu < 1/2$, toda solución de la ecuación de Bessel (11) *debe tener un cero* en $[a, a + \pi)$.

Caso 3. $\boldsymbol{\nu = 1/2}$. En este caso, (12) se reduce a $u'' + u = 0$, que tiene la solución general $u(x) = c_1 \cos x + c_2\ \text{sen}\ x$. Así,

$$y(x) = c_1 x^{-1/2} \cos x + c_2 x^{-1/2}\ \text{sen}\ x = Ax^{-1/2}\ \text{sen}(x - \theta)$$

para una θ constante adecuada. Por tanto, cualquier solución de la ecuación de Bessel (11) con $\nu = 1/2$ tiene *exactamente un cero* en $[a, a + \pi)$.

En resumen, hemos mostrado que una solución de la ecuación de Bessel (11) tiene

(a) a lo más un cero en $[a, a + \pi)$ cuando $\nu > 1/2$;

(b) al menos un cero en $[a, a + \pi)$ cuando $0 \le \nu < 1/2$, y

(c) exactamente un cero en $[a, a + \pi)$ cuando $\nu = 1/2$. ■

El teorema fundamental de Sturm fue extendido a ecuaciones de Sturm-Liouville más generales por M. Picone.

TEOREMA DE COMPARACIÓN DE PICONE

Teorema 17. Sea $\phi_1(x)$ una solución no trivial de la ecuación de Sturm-Liouville

(13) $$\frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{dy}{dx}\right) + q_1 y = 0\ , \qquad a < x < b\ ,$$

y sea $\phi_2(x)$ una solución no trivial de

(14) $$\frac{d}{dx}\left(p_2 \frac{dy}{dx}\right) + q_2 y = 0\ , \qquad a < x < b\ .$$

Suponga que $p_1(x) \ge p_2(x) > 0$ y $q_1(x) \le q_2(x)$ para x en $[a, b]$. Entonces, entre cualesquiera dos ceros consecutivos x_1 y x_2 de ϕ_1 en $[a, b]$, existe un cero de ϕ_2, a menos que ϕ_1 y ϕ_2 sean linealmente dependientes en $[x_1, x_2]$, en cuyo caso $q_1(x) \equiv q_2(x)$ en $[x_1, x_2]$.

En el proyecto C se bosqueja una demostración del teorema de comparación de Picone usando la **identidad de Picone**. También se puede demostrar usando la sustitución de Prüfer.[†]

Si aplicamos el teorema de comparación de Picone a una ecuación de Sturm-Liouville, podemos obtener estimaciones de la distancia entre los ceros consecutivos de sus soluciones. En el siguiente corolario, sean f_M y f_m los valores máximo y mínimo, respectivamente, de f en el intervalo $[a, b]$.

DISTANCIA ENTRE CEROS

Corolario 5. Sea

(15) $$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy + \lambda ry = 0\,, \qquad a < x < b\,,$$

una ecuación de Sturm-Liouville, donde p, p', q y r son continuas en $[a, b]$ y p y r son positivas en $[a, b]$. Sea ϕ una solución no trivial de (15) con ceros consecutivos x_1 y x_2 en $[a, b]$. Si

$$\lambda > \text{máx}\left\{\frac{-q_M}{r_M}, \frac{-q_m}{r_m}, 0\right\}\,,$$

entonces $x_2 - x_1$, la distancia entre los ceros de ϕ, está acotada por

(16) $$\pi\sqrt{\frac{p_m}{q_M + \lambda r_M}} \leq x_2 - x_1 \leq \pi\sqrt{\frac{p_M}{q_m + \lambda r_m}}\,.$$

Demostración. La ecuación con coeficientes constantes

(17) $$p_M y'' + (q_m + \lambda r_m)y = 0$$

tiene la solución $\psi(x) = \text{sen}[K(x - x_1)]$, donde $K^2 = (q_m + \lambda r_m)/p_M$ (aquí usamos la hipótesis $\lambda > -q_m/r_m$ de modo que $q_m + \lambda r_m > 0$). Además, $\psi(x)$ tiene un cero en $x = x_1$ y su siguiente cero está en $x_1 + (\pi/K)$, es decir, la distancia a su siguiente cero es

$$\pi\sqrt{\frac{p_M}{q_m + \lambda r_m}}\,.$$

Como $p_M \geq p(x)$, $\lambda > 0$ y $q_m + \lambda r_m \leq q(x) + \lambda r(x)$ para toda x en (a, b), el teorema de comparación de Picone implica que ϕ debe tener un cero entre cualesquiera dos ceros consecutivos de $\psi(x)$ (o $\phi(x_1 + (\pi/K)) = 0$ si ϕ y ψ son linealmente dependientes). Por lo tanto, $x_2 \leq x_1 + (\pi/K)$, de modo que

$$x_2 - x_1 \leq \pi\sqrt{\frac{p_M}{q_m + \lambda r_m}}$$

(véase la figura 11.7).

[†]Para un análisis de la sustitución de Prüfer y una demostración del teorema de comparación de Picone, también conocido como el teorema de comparación de Sturm, véase el texto de G. Birkhoff y G. C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4a. edición (John Wiley & Sons, Nueva York, 1989), capítulo 10.

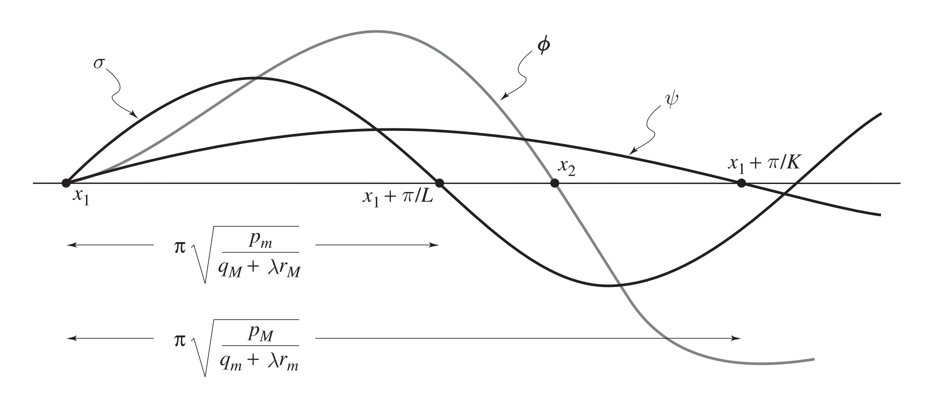


Figura 11.7 Estimación de la distancia entre ceros consecutivos de ϕ

Para obtener una estimación por abajo para la distancia entre ceros consecutivos, comparamos la ecuación dada con la ecuación con coeficientes constantes

$$\textbf{(18)} \qquad p_m y'' + (q_M + \lambda r_M)y = 0 \ ,$$

con la solución $\sigma(x) = \text{sen}[L(x - x_1)]$, donde $L^2 = (q_M + \lambda r_M)/p_m$. Observe que $\sigma(x)$ tiene ceros consecutivos x_1 y $x_1 + (\pi/L)$. Como $p(x) \geq p_m$ y $q(x) + \lambda r(x) \leq q_M + \lambda r_M$ para x en (a, b), el teorema de comparación de Picone implica que $\sigma(x)$ debe tener un cero entre cualesquiera dos ceros consecutivos de ϕ o tener los mismos ceros (véase la figura 11.7). Así, $x_1 + (\pi/L) \leq x_2$, y

$$\pi\sqrt{\frac{p_m}{q_M + \lambda r_M}} \leq x_2 - x_1 \ . \quad \blacksquare$$

Una consecuencia inmediata del corolario 5 es que cuando $\lambda \to +\infty$, la distancia entre los ceros de una solución a una ecuación de Sturm-Liouville tiende a cero. Esto significa que como los valores propios λ_n asociados a un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera crecen hacia infinito, el número de ceros en (a, b) de una función propia ϕ_n crece cuando n crece. Podemos usar la sustitución de Prüfer para mostrar que si un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera tiene valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, entonces la función propia ϕ_n correspondiente a λ_n tiene *exactamente* $n - 1$ ceros en el intervalo abierto (a, b).[†]

EJERCICIOS 11.8

1. Sea $\phi(x)$ una solución de la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(e^x \frac{dy}{dx}\right) + xy = 0$$

en $(-\infty, \infty)$. Dado que $\phi(1/n) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, determine $\phi(x)$.

2. La función $\phi(x) = \text{sen}\, x$ es una solución de $y'' + y = 0$ en $(-\infty, \infty)$ y tiene una infinidad de ceros. ¿Contradice esto el teorema 13? Explique.

3. Sea $\phi(x)$ una solución en $(-\infty, \infty)$ de

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2 + 1)\frac{dy}{dx}\right] - 2y = 0 \ .$$

[†]Para una demostración de este resultado, léase el texto de G. Birkhoff y G. C. Rota, *Ibídem*.

Si $\phi(0) = 0$, demuestre que $\phi(x) = cx$ para cierta constante c.

4. ¿Podría la función $\phi(x) = x^4 \operatorname{sen}(1/x)$ ser solución en $(-1, 1)$ de cierta ecuación diferencial de la forma (1), donde p, p' y q son continuas en $[-1, 1]$ y p es positiva en $[-1, 1]$? Justifique su respuesta.

5. Use el teorema fundamental de Sturm para demostrar que cualquier solución no trivial de $y'' + (1 - e^x)y = 0$ tiene a lo más un cero en $(0, \infty)$ pero una infinidad de ceros en $(-\infty, 0)$.

6. Use el teorema fundamental de Sturm para demostrar que cualquier solución no trivial de $y'' + (x^2 - 1)y = 0$ tiene a lo más un cero en $(-1, 1)$ pero una infinidad de ceros en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$.

7. El polinomio de Legendre $P_n(x)$ de grado n satisface la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n + 1)y = 0 ,$$

$$-1 < x < 1 ,$$

y tiene n ceros distintos en $(-1, 1)$. Use el teorema de comparación de Picone para mostrar que entre cualesquiera dos ceros de $P_{m-1}(x)$ hay un cero de $P_m(x)$ para $m > 2$.

8. Sea $\phi(x)$ una solución no trivial de

$$y'' + 9y + e^{-3x}y = 0$$

en $(0, \infty)$. Use el teorema fundamental de Sturm para estimar la distancia entre los ceros consecutivos de $\phi(x)$ cuando x es grande.

9. Sea $\phi(x)$ una solución no trivial de

$$y'' + x^{-2}y' + (4 - e^{-x})y = 0$$

en $(0, \infty)$. Use el teorema de comparación de Picone para estimar la distancia entre los ceros consecutivos de $\phi(x)$ cuando x es grande. [*Sugerencia*: Exprese primero la ecuación en la forma de Sturm-Liouville.]

10. Use el corolario 5 para estimar la distancia entre ceros consecutivos en [0, 5] de una solución no trivial de

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right] + (\operatorname{sen} x)y + \lambda(1 + x^2)^{-1}y = 0 .$$

11. Use el corolario 5 para estimar la distancia entre ceros consecutivos en [0, 5] de una solución no trivial de

$$\frac{d}{dx}\left[(1 + x)\frac{dy}{dx}\right] + e^{-x}y + \lambda y = 0 .$$

12. En la ecuación (10), suponga que $q(x) \geq m^2$ en $[a, b]$. Demuestre que la distancia entre dos ceros consecutivos de una solución ϕ de (10) es menor o igual a π/m. [*Sugerencia*: Si x_1 es un cero de ϕ, compare ϕ con la función $\psi(x) = \operatorname{sen}(m(x - x_1))$, que es una solución de $y'' + m^2y = 0$.]

13. Muestre que la sustitución $y = ux^{-1/2}$ transforma la ecuación (11) en la ecuación (12).

14. Muestre que si $q(x) \geq m^2 > 0$ en $[a, \infty)$, entonces toda solución de $y'' + q(x)y = 0$ es oscilatoria.

15. Suponga que $0 < q_m \leq q(x) \leq q_M$ en $[a, b]$. Demuestre lo siguiente:

(a) Si $q_m > k^2\pi^2/(b - a)^2$, donde k es un entero positivo, entonces cualquier solución de la ecuación (10) tiene al menos k ceros en $[a, b]$.

(b) Si $q_M < k^2\pi^2/(b - a)^2$, entonces cualquier solución no trivial de la ecuación (10) tiene a lo más k ceros en $[a, b]$.

16. **Teorema de convexidad de Sturm.** Demuestre que si $q(x)$ es una función continua y creciente en $[0, \infty)$ y $\phi(x)$ es una solución no trivial de

$$y'' + q(x)y = 0 , \qquad 0 < x < \infty ,$$

entonces $t_k - t_{k-1} > t_{k+1} - t_k$, donde $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de ceros consecutivos en $(0, \infty)$ de la solución $\phi(x)$.

17. Muestre que si $w(x)$ y $q(x)$ son continuas en $[a, b]$ y $q(x) < 0$ en $[a, b]$, entonces una solución no trivial ϕ de la ecuación

$$y'' + w(x)y' + q(x)y = 0$$

puede tener a lo más un cero en $[a, b]$.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo analizamos la teoría de problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera, la alternativa de Fredholm y los problemas no homogéneos con valores en la

frontera, ejemplos de problemas singulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera y la teoría de oscilación y comparación para ecuaciones de Sturm-Liouville. Las propiedades y los conceptos importantes aparecen a continuación.

Problemas de valores propios

El problema de determinar aquellos valores de λ para los que el problema con valores en la frontera

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &(py')' + qy + \lambda ry = 0 \,, \qquad a < x < b \,, \\ &a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \,, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \,, \end{aligned}$$

tiene soluciones no triviales es un **problema de valores propios**. El número λ es un **valor propio** y las soluciones no triviales correspondientes son las **funciones propias**.

Ecuación de Sturm-Liouville

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \,, \qquad a < x < b \,,$$

se llama una **ecuación de Sturm-Liouville**. Cualquier ecuación lineal homogénea de segundo orden se puede escribir como una ecuación de Sturm-Liouville.

Problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera

Un problema de valores propios de la forma (1) donde $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ con valores reales, $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$ (no permitimos que $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$) es un **problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera**. Estos problemas con valores en la frontera tienen las siguientes propiedades:

1. Los valores propios son reales, simples, y forman una sucesión numerable creciente $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.
2. Las funciones propias se pueden elegir con valores reales.
3. Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con respecto de $r(x)$ en $[a, b]$.
4. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal de funciones propias y sea f una función continua en $[a, b]$, con f' continua por partes en $[a, b]$. Si f satisface las dos condiciones en la frontera, entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n \phi_n(x) \,, \qquad a \le x \le b \,,$$

donde

$$a_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)r(x)\,dx \,.$$

Además, la serie converge uniformemente en $[a, b]$.

Los problemas periódicos de Sturm-Liouville tienen propiedades similares.

Alternativa de Fredholm

Sea $L[y](x) := A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x)$ y supongamos que $B[y] = 0$ representa un conjunto de condiciones separadas en la frontera. Sea $L^+[y](x) = (A_2(x)y(x))'' - (A_1(x)y(x))' + A_0(x)y(x)$ el operador adjunto de L con condiciones adjuntas en la frontera $B^+[y] = 0$. (Las condiciones adjuntas en la frontera se eligen de modo que $(Lu,v) = (u, L^+v)$ para toda u y v que satisfagan $B[u] = 0$ y $B^+[v] = 0$.) El problema no homogéneo con valores en la frontera

$$L[y](x) = h(x) , \quad a < x < b ; \quad B[y] = 0 ,$$

tiene una solución si y sólo si

$$\int_a^b h(x)z(x)dx = 0$$

para cada solución z del problema adjunto con valores en la frontera

$$L^+[z](x) = 0 , \quad a < x < b ; \quad B^+[z] = 0 .$$

Solución mediante un desarrollo con funciones propias

Sea $L[y] \coloneqq (py')' + qy$ y suponga que $L[y] + \mu ry = 0$, $B[y] = 0$ es un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera con valores propios $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ y funciones propias correspondientes $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Si $\mu \neq \lambda_n$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces la solución del problema no homogéneo

$$L[y] + \mu ry = h ; \quad B[y] = 0 ,$$

está dada por

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n}\phi_n ,$$

donde las constantes γ_n quedan determinadas mediante el desarrollo de h/r en términos de las funciones propias:

$$\frac{h}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\phi_n .$$

Si $\mu = \lambda_N$ para alguna N y $\gamma_N \neq 0$, entonces el problema no homogéneo no tiene soluciones.

Si $\mu = \lambda_N$ para alguna N y $\gamma_N = 0$, entonces

$$\phi = c_N\phi_N + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n}\phi_n$$

es una solución del problema no homogéneo para cualquier elección del parámetro c_N.

Funciones de Green

La solución de

$$L[y] = -f ; \quad B_1[y] = 0 , \quad B_2[y] = 0 ,$$

donde suponemos que $L[y] \coloneqq (py')' + qy$, que la función f es continua en $[a, b]$ y que el problema homogéneo correspondiente sólo tiene la solución trivial, está dada por

$$\phi(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)\,ds \ ,$$

donde $G(x, s)$ es la **función de Green**

$$G(x, s) = \begin{cases} -z_1(s)z_2(x)/C \ , & a \le s \le x \ , \\ -z_1(x)z_2(s)/C \ , & x \le s \le b \ . \end{cases}$$

En este caso, z_1 y z_2 son dos soluciones no triviales de $L[y] = 0$ que satisfacen $B_1[z_1] = 0$ y $B_2[z_2] = 0$. La constante C está dada por $C = p(x)W[z_1, z_2](x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Problemas singulares de Sturm-Liouville

Ciertos problemas *no* regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera, llamados problemas **singulares** de Sturm-Liouville con valores en la frontera, surgen al resolver las ecuaciones de Bessel, Legendre y Hermite. Estos problemas singulares de Sturm-Liouville también tienen sucesiones crecientes de valores propios simples. Además, sus sucesiones correspondientes de funciones propias son ortogonales y se pueden usar para formar desarrollos en términos de funciones propias con propiedades de convergencia similares a las asociadas a problemas regulares de Sturm-Liouville.

Oscilación y teoría de comparación

Se conocen varios resultados relativos a la ubicación de los ceros de soluciones de ecuaciones de Sturm-Liouville. El **teorema de separación de Sturm** dice que los ceros de dos soluciones linealmente independientes están intercalados. El **teorema fundamental de Sturm** y el **teorema de comparación de Picone** nos permiten comparar la ubicación de los ceros de una solución a una ecuación de Sturm-Liouville con los de una ecuación relacionada con la primera.

PROBLEMAS DE REPASO

1. Determine todos los valores propios reales y las funciones propias para el problema de valores propios dado.

(a) $y'' + 6y' + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

(b) $y'' + \lambda y = 0$;
$y(0) = 0$, $y(\pi) + 2y'(\pi) = 0$.

2. Convierta la ecuación dada a la forma de una ecuación de Sturm-Liouville.

(a) $y'' + 7y' + \lambda y = 0$.

(b) $y'' - 3xy' + \lambda y = 0$.

(c) $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$, $x > 0$.

3. (a) Determine las funciones propias, normalizadas con respecto de la función de ponderación $r(x) \equiv 1$ en $[0, \pi]$, para el problema

$y'' + \lambda y = 0$;
$y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

(b) Exprese $f(x) = 1 - x$ en un desarrollo mediante funciones propias usando el resultado de la parte (a).

4. Determine el problema adjunto con valores en la frontera para el siguiente problema con valores en la frontera.

(a) $y'' + xy' + y = 0$;
$y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$.

(b) $x^2y'' + 2xy' - 3y = 0$;
$y(1) = 0$, $y'(e) = 0$.

5. Use la alternativa de Fredholm para determinar condiciones sobre h que garanticen que el problema no homogéneo con valores en la frontera dado tenga una solución.

(a) $y'' - 6y' + 13y = h$;
$y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$.

(b) $xy'' + y' = h$;
$y'(1) = 0$, $y'(2) = 0$.

6. Encuentre un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución del problema no homogéneo con valores en la frontera

$$y'' + 3y = x - 4\cos 2x \; ;$$
$$y'(0) = 0 \; , \qquad y'(\pi) = 0 \; .$$

7. Calcule la función de Green $G(x, s)$ y úsela para resolver el problema con valores en la frontera dado.

(a) $y'' = x + 1$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

(b) $y'' - y = 4$; $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$.

8. Encuentre un desarrollo formal en términos de funciones propias para la solución del problema no homogéneo con valores en la frontera, donde f es una función continua y μ no es un valor propio del problema homogéneo correspondiente.

(a) $(xy')' - (49/x)y + \mu xy = f(x)$, $0 < x < 1$,
$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to 0^+$, $y(1) = 0$.

(b) $[(1 - x^2)y']' + \mu y = f(x)$, $-1 < x < 1$,
$y(x)$, $y'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm 1$.

9. Sea $\phi(x)$ una solución no trivial de

$$[(1 - e^{-x})y']' + \left(\frac{x + 1}{x}\right)y = 0$$

en $(0, \infty)$. Use el teorema de comparación de Picone para estimar la distancia entre los ceros consecutivos de $\phi(x)$ cuando x es grande.

10. Use el corolario 5 de la sección 11.8 para estimar la distancia entre los ceros consecutivos en $[0, \pi]$ de una solución no trivial de

$$[(2 + \cos x)y']' + (\operatorname{sen} x)y + 5y = 0 \; .$$

EJERCICIOS DE ESCRITURA TÉCNICA

1. El método de solución de un problema regular no homogéneo de Sturm-Liouville con valores en la frontera mediante un desarrollo en términos de funciones propias, analizado en la sección 11.5, se puede extender a problemas periódicos de Sturm- Liouville. Describa esta extensión e ilústrela con un ejemplo.

2. Las funciones de Green también existen para ciertos problemas periódicos de Sturm-Liouville. Explique cómo construir una función de Green para el problema

$$y''(x) + 2y(x) = -f(x) \; ;$$
$$y(0) = y(2\pi) \; , \qquad y'(0) = y'(2\pi) \; .$$

3. Formule una alternativa de Fredholm para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante $n \times n$ con valores reales, $\mathbf{b}$ es un vector constante $n \times 1$ y $\mathbf{x}$ es el vector incógnita $n \times 1$. Ilustre su formulación con ejemplos.

4. Analice la interpretación de los temas de la sección 11.8 mediante un oscilador masa-resorte (recuerde la sección 4.10).

PROYECTOS DE GRUPO PARA EL CAPÍTULO 11

A. Polinomios de Hermite y el oscilador armónico

En mecánica cuántica, el movimiento de una partícula se describe mediante la ecuación de Schrödinger. En el espacio de dimensión uno, la ecuación tiene la forma

(1) $$\psi'' + (2m/\hbar^2)[E - V(x)]\psi = 0 \ ,$$

donde la función $V(x)$ representa la energía potencial, m es la masa de la partícula, $\hbar$ es la constante de Planck h dividida entre 2π, la constante E representa la energía y ψ es la **función de onda**. Las funciones de onda ψ pueden asumir valores reales o complejos. La cantidad $\psi(x)\overline{\psi(x)}dx = |\psi(x)|^2 dx$ proporciona la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo $(x, x + dx)$. Los físicos están interesados en las soluciones de (1) que satisfacen las condiciones en la frontera

(2) **$\psi(x)$ y $\psi'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm\infty$.**

Los valores propios $E = E_n$ de (1)-(2) son los **niveles de energía** del sistema.

(a) Para el **oscilador armónico**, la energía potencial es $V(x) = \alpha x^2$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Muestre que para el oscilador armónico, el problema con valores en la frontera (1)-(2) se simplifica como

(3) $$y''(t) + (\lambda - t^2)y(t) = 0 \ ;$$

(4) $y(t)$ y $y'(t)$ permanecen acotadas cuando $t \to \pm\infty$,

donde $t = \beta x$, $\beta^4 = 2m\alpha/\hbar^2$, $y(t) = \psi(x)$ y $\lambda = 2mE/(\beta^2\hbar^2)$.

(b) Verifique que el cambio de variable $y(t) = e^{-t^2/2}u(t)$ transforma (3)-(4) en

(5) $$(e^{-t^2}u')' + (\lambda - 1)e^{-t^2}u = 0 \ ;$$

(6) $e^{-t^2/2}u(t)$ y $e^{-t^2/2}u'(t) - te^{-t^2/2}u(t)$ permanecen acotadas cuando $t \to \pm\infty$.

(c) Use el resultado de la parte (b) para mostrar que $\lambda = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, son los valores propios del problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (3)-(4) con funciones propias correspondientes $y_n(t) = e^{-t^2/2}H_n(t)$, donde H_n es el **polinomio de Hermite** de grado n (véase la sección 11.7 o la sección 8.8).

(d) Bosqueje las tres primeras funciones de onda $y_0(t)$, $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

B. Espectros continuos y mixtos

Partículas libres. Cuando la energía potencial $V(x)$ en la ecuación de Schrödinger (1) es idénticamente nula, se dice que la partícula está **libre**. Así, el movimiento de una **partícula libre** queda descrito mediante el problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera

(7) $$\psi'' + \lambda\psi = 0 \ ;$$

(8) **$\psi(x)$ y $\psi'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm\infty$,**

donde $\lambda = 2mE/\hbar^2$.

(a) Muestre que todo número no negativo λ es un valor propio de (7)-(8) y que no existen valores propios negativos. Por lo tanto, el espectro de la partícula libre es continuo y consta del intervalo $[0, \infty)$.

Potencial cuadrado. Un **potencial cuadrado** es una función de la forma

$$V(x) = \begin{cases} -\alpha^2 , & |x| < a , \\ 0 , & |x| > a , \end{cases}$$

donde α y a son constantes positivas. Para este potencial, la ecuación de Schrödinger tiene la forma

(9) $$\psi'' + \lambda\psi = \begin{cases} -\beta^2\psi , & |x| < a , \\ 0 , & |x| > a , \end{cases}$$

donde $\lambda = 2mE/\hbar^2$ y $\beta^2 = 2m\alpha^2/\hbar^2$. También imponemos las condiciones en la frontera

(10) $\psi(x)$ y $v'(x)$ permanecen acotadas cuando $x \to \pm\infty$.

Podemos resolver la ecuación (9), en el sentido de que podemos hallar soluciones en los tres intervalos $(-\infty, -a)$, $(-a, a)$ y (a, ∞) y luego pegarlas para obtener una función ψ tal que ψ y ψ' sean continuas en $(-\infty, \infty)$.

(b) Muestre que cada $\lambda > 0$ es un valor propio para el problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (9)-(10) y tiene dos funciones propias linealmente independientes asociadas a él.

(c) Muestre que $\lambda = 0$ es un valor propio para el problema con valores en la frontera (9)-(10) si y sólo si $\beta a = k\pi/a$ para algún entero k. Además, cuando $\beta a = k\pi/a$, sólo existe una función propia linealmente independiente asociada a $\lambda = 0$.

(d) Muestre que para $\lambda < -\beta^2$ la única solución de (9)-(10) es la solución trivial y que por tanto no hay valores propios menores que $-\beta^2$.

(e) Muestre que para $-\beta^2 < \lambda < 0$, puede existir un número finito de valores propios discretos λ_n de (9)-(10). [*Sugerencia*: Sea $\gamma = \sqrt{\beta^2 + \lambda}$. La función $A \cos(\gamma x)$ es parte de una función propia para $x > a$ si y sólo si $\gamma \tan(\gamma a) = \sqrt{-\lambda}$. Además, B sen(γx) es parte de una función propia para $x > a$ si y sólo si $\gamma \cot(\gamma a) = -\sqrt{-\lambda}$.]

En consecuencia, el espectro de una partícula bajo la influencia de un potencial cuadrado puede tener un espectro discreto formado por un número finito de valores propios negativos además de su espectro continuo $[0, \infty)$.

C. *Teorema de comparación de Picone*

El objetivo de este proyecto es dar una demostración del teorema de comparación de Picone (véase el teorema 17 de la página 723). Usaremos la notación de ese teorema y procederemos como sigue.

Sean x_1 y x_2 dos ceros consecutivos de ϕ_1 y supongamos que $\phi_2 \neq 0$ en $[x_1, x_2]$.

(a) Muestre que

(11) $$(q_2 - q_1)\phi_1^2\phi_2^2 + (p_2\phi_2')'\phi_1^2\phi_2 - (p_1\phi_1')'\phi_1\phi_2^2 = 0 .$$

(b) Integre la ecuación (11) desde x_1 hasta x_2 y use integración por partes para obtener

(12) $$\int_{x_1}^{x_2} (q_2 - q_1)\phi_1^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} p_1(\phi_1')^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{2p_2\phi_2'\phi_1\phi_1'}{\phi_2} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{p_2(\phi_2')^2\phi_1^2}{\phi_2^2} dx = 0 .$$

(c) De la ecuación (12), deduzca la **identidad de Picone**

(13) $$\int_{x_1}^{x_2} (q_2 - q_1)\phi_1^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} (p_1 - p_2)(\phi_1')^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} p_2 \left[\phi_1' - \frac{\phi_1\phi_2'}{\phi_2}\right]^2 dx = 0 \ .$$

(d) Si $\phi_2(x) \neq 0$ para x en (x_1, x_2), pero $\phi_2(x) = 0$ en $x = x_1$ o en $x = x_2$, entonces alguna de las integrales anteriores debe considerarse como una integral impropia. Verifique que la identidad de Picone sigue siendo válida en este caso. [*Sugerencia*: Si $\phi_2(x_1) = 0$, entonces $\phi_2'(x_1) \neq 0$. Use este hecho y la regla de L'Hôpital para mostrar que los términos frontera, que surgen al usar la integración por partes, siguen anulándose.]

(e) Use la identidad de Picone y la hipótesis del teorema 17, página 723, para mostrar que si $q_1(x) \neq q_2(x)$ en $[x_1, x_2]$, entonces ϕ_2 debe tener un cero en (x_1, x_2).

(f) Use la identidad de Picone y la hipótesis del teorema 17, página 723, para mostrar que si $q_1(x) \equiv q_2(x)$ en $[x_1, x_2]$, entonces ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes en $[x_1, x_2]$. [*Sugerencia*: En los intervalos donde $p_1 \equiv p_2$, muestre que ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen la misma ecuación y su wronskiano se anula. En los intervalos donde $p_1(x) \neq p_2(x)$, muestre que $\phi_1' = 0$ y $\phi_2' = 0$. Combine esto para concluir que ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes.]

Esto concluye la demostración del teorema de comparación de Picone.

D. *Método de tiro*

El método de tiro para aproximar la solución del problema de segundo orden con valores en la frontera

(14) $$y''(x) = f(x, y, y') \ , \qquad a \leq x \leq b \ ; \qquad y(a) = \alpha \ , \qquad y(b) = \beta \ ,$$

implica resolver una sucesión de problemas con valores iniciales de la forma

(15) $$y''(x) = f(x, y, y') \ , \qquad a \leq x \leq b \ ; \qquad y(a) = \alpha \ , \qquad y'(a) = t \ ,$$

donde t es un parámetro. La idea es "disparar" desde una posición inicial, $y(a) = \alpha$, con una elevación "inicial" $y'(a) = t$, hacia el objetivo localizado en $y(b) = \beta$. (Véase la figura 11.8.) Si fallamos en el primer intento, ajustamos la "elevación" t e intentamos de nuevo.

El método de tiro genera una sucesión de valores t_k que (esperamos) converge a un valor $\hat{t}$ para el que la solución del problema con valores iniciales (15) con $y'(a) = \hat{t}$ satisface $y(b) = \beta$. Si $y(x, t)$ denota la solución de (15) con $y'(a) = t$, entonces nuestro problema consiste en determinar t de modo que $y(b, t) = \beta$, o

(16) $$y(b, t) - \beta = 0 \ .$$

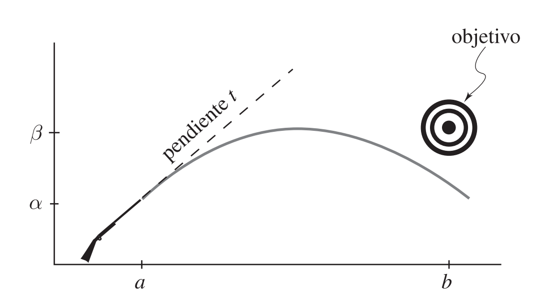


Figura 11.8 Método de tiro

Podemos usar un método para hallar raíces, como el **método de bisección**, para generar una sucesión t_k que converja a la solución de (16). Para comenzar, necesitamos dos estimaciones t_0 y t_1 tal que $y(b, t_0) - \beta$, $y(b, t_1) - \beta$ tengan signos opuestos (uno positivo y otro negativo). Luego elegimos $t_2 = (t_0 + t_1)/2$. Si $y(b, t_2) - \beta = 0$, hemos terminado. En caso contrario, $y(b, t_2) - \beta$ tendrá el mismo signo o el signo opuesto a $y(b, t_0) - \beta$ o a $y(b, t_1) - \beta$. Si $y(b, t_2) - \beta$ y $y(b, t_0) - \beta$ tienen signos opuestos, entonces elegimos $t_3 = (t_0 + t_2)/2$. En caso contrario elegimos $t_3 = (t_1 + t_2)/2$. Continuamos hasta que t_n y t_{n-1} estén lo bastante cerca (es decir, dentro de una tolerancia establecida de antemano); la raíz deseada de (16) estará en algún punto entre ellas. Observe que este procedimiento exige resolver un problema con valores iniciales para cada t_k (véase la sección 5.6).

(a) Use el método de tiro para aproximar la solución del problema no lineal con valores en la frontera

$$y''(x) = \frac{1}{2}y^3(x) , \qquad 1 \le x \le 3 ; \qquad y(1) = 2/3 , \qquad y(3) = 2/5 .$$

Compare su solución aproximada con la solución real $y(x) = 2/(x + 2)$.

(b) Para los problemas lineales con valores en la frontera de la forma

(17) $$y''(x) = -p(x)y'(x) - q(x)y(x) + g(x) , \qquad a \le x \le b ; \qquad y(a) = \alpha , \qquad y(b) = \beta ,$$

el método de tiro sólo necesita dos "tiros". Use el principio de superposición para mostrar que la solución de (17) está dada por

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}y_2(x) ,$$

donde $y_1(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$y''(x) = -p(x)y'(x) - q(x)y(x) + g(x) , \qquad a \le x \le b ; \qquad y(a) = \alpha , \qquad y'(a) = 0 ,$$

y $y_2(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$y''(x) = -p(x)y'(x) - q(x)y(x) , \qquad a \le x \le b ; \qquad y(a) = 0 , \qquad y'(a) = 1 .$$

(Suponemos que $y_2(b) \neq 0$; en caso contrario, el problema con valores en la frontera (17) no tiene una solución única.)

(c) Use el resultado de la parte (b) para aproximar la solución del problema lineal con valores en la frontera

$$y''(x) = -\frac{11}{3x}y'(x) + \frac{1}{x^2}y(x) + \frac{8}{3x^2} - \frac{\ln x}{x^2} , \qquad 1 \le x \le 4 ;$$
$$y(1) = 1 , \qquad y(4) = 4^{1/3} + \ln 4 \approx 2.973695413 .$$

Compare su solución aproximada con la solución real

$y(x) = x^{1/3} + \ln x$.

E. *Método de diferencias finitas para problemas con valores en la frontera*

Un método clásico para aproximar numéricamente una solución de un problema con valores en la frontera para una ecuación diferencial lineal de segundo orden consiste en reempla-

zar cada derivada en la ecuación diferencial por un cociente de diferencias que aproxime a la derivada. Para ilustrar este procedimiento, considere el problema lineal con valores en la frontera

(18) $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) , \qquad a < x < b ;$$

(19) $$y(a) = \alpha , \qquad y(b) = \beta ,$$

donde p, q y g son continuas en $[a, b]$ y α, β son constantes dadas.

Primero dividimos el intervalo $[a, b]$ en $N + 1$ subintervalos con la misma longitud h. Es decir, hacemos $h := (b - a)/(N + 1)$ y para $k = 0, 1, \ldots, N + 1$, hacemos

$$x_k := a + kh .$$

Entonces $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b$.

Suponiendo que existe una solución $y(x)$ de (1)-(2), nuestro objetivo es aproximar $y(x)$ en los puntos interiores de la malla x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. En estos puntos, sabemos que

(20) $$y''(x_k) + p(x_k)y'(x_k) + q(x_k)y(x_k) = g(x_k) .$$

La esencia del método de diferencias finitas está en hallar cocientes de diferencias que se aproximen mucho a las derivadas $y'(x_k)$ y $y''(x_k)$, cuando h es pequeño.

(a) Suponga que y tiene una representación en serie de Taylor de la forma

(21) $$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + \frac{y''(x_k)}{2}(x - x_k)^2 + \frac{y'''(x_k)}{3!}(x - x_k)^3 + \cdots$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(j)}(x_k)}{j!}(x - x_k)^j ,$$

y deduzca la siguiente **fórmula con diferencias centradas** para $y'(x_k)$:

(22) $$y'(x_k) = \frac{1}{2h}\left[y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})\right] + [\text{términos que implican a } h^2, h^3, \ldots] .$$

[*Sugerencia*: Trabaje con las representaciones de Taylor para $y(x_{k+1})$ y $y(x_{k-1})$.]

(b) Use de nuevo (21) para deducir la siguiente fórmula con diferencias centradas para $y''(x_k)$:

(23) $$y''(x_k) = \frac{1}{h^2}\left[y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})\right] + [\text{términos que implican a } h^2, h^3, \ldots] .$$

(c) Si w_k es la aproximación (por calcular) de $y(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ y $w_0 = y(x_0) = \alpha$, $w_{N+1} = y(x_{N+1}) = \beta$, entonces de (23) y (22) obtenemos las aproximaciones

(24) $$y''(x_k) \approx \frac{1}{h^2}(w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}) ,$$

(25) $$y'(x_k) \approx \frac{1}{2h}(w_{k+1} - w_{k-1}) .$$

Use las aproximaciones con diferencias centradas (24) y (25) en lugar de $y''(x_k)$ y $y'(x_k)$ en (20) para obtener el sistema de ecuaciones

(26) $$\left(\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{h^2}\right) + p(x_k)\left(\frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2h}\right) + q(x_k)w_k = g(x_k) ,$$

$k = 1, 2, \ldots, N$. La ecuación (26) representa N ecuaciones lineales con N incógnitas $w_1, \ldots, w_N$. Así, al resolver (26), obtendremos las aproximaciones de $y(x)$ en los puntos interiores de la malla x_k, $k = 1, \ldots, N$.

Use este método para aproximar la solución del problema con valores en la frontera

$$y''(x) - 9y(x) = 0 \; ; \qquad y(0) = 1 \; , \qquad y(1) = e^{-3} \; ,$$

haciendo $h = 1/4$ $(N = 3)$.

(d) Compare las aproximaciones obtenidas en la parte (c) con la solución real $y = e^{-3x}$.

(e) Sea E el potencial electrostático entre dos esferas metálicas concéntricas con radios r_1 y r_2 $(r_1 < r_2)$, donde el potencial de la esfera interior se mantiene constante en 100 volts y el potencial de la esfera exterior se mantiene en 0 volts. Así, el potencial E sólo dependerá de la distancia r al centro de las esferas y debe satisfacer la ecuación de Laplace. Esto conduce al siguiente problema con valores en la frontera para E:

$$\frac{d^2E}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dE}{dr} = 0 \; ; \qquad E(r_1) = 100 \; , \qquad E(r_2) = 0 \; ,$$

donde $r_1 < r < r_2$.

Para $r_1 = 1$ y $r_2 = 3$, obtenga aproximaciones de $E(2)$ mediante diferencias finitas, usando $h = 1/2$ $(N = 3)$ y $h = 1/4$ $(N = 7)$.

(f) Compare sus aproximaciones de la parte (e) con la solución real $E(r) = 150r^{-1} - 50$.

Apéndices

A MÉTODO DE NEWTON

Para resolver una ecuación $g(x) = 0$, debemos determinar el punto o los puntos donde la gráfica de $y = g(x)$ corta al eje x. Un procedimiento para aproximar una solución es el **método de Newton**.

Para motivar geométricamente el método de Newton, sea $\tilde{x}$ una raíz de $g(x) = 0$ y sea x_1 nuestra estimación del valor de $\tilde{x}$. Si $g(x_1) = 0$, hemos terminado. Si $g(x_1) \neq 0$, entonces estamos alejados una cierta cantidad que llamamos dy (véase la figura A.1). Entonces

$$\frac{dy}{dx} = g'(x_1) \; ,$$

y así

(1) $$dx = \frac{dy}{g'(x_1)} \; .$$

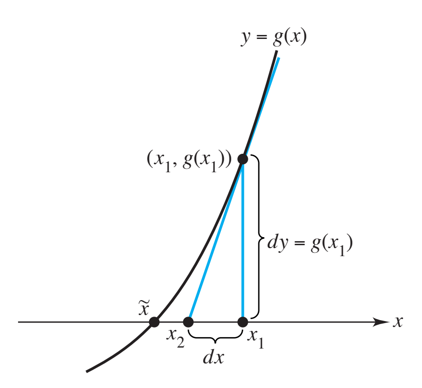


Figura A.1 Aproximación de la raíz mediante la recta tangente

Ahora, $dx = x_1 - x_2$, o $x_2 = x_1 - dx$, donde x_2 es el punto donde la recta tangente a la curva por $(x_1, g(x_1))$ corta al eje x (figura A.1). Usamos la ecuación (1) y el hecho de que $dy = g(x_1)$ para obtener

$$x_2 = x_1 - \frac{dy}{g'(x_1)} = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \ ,$$

lo que usamos como la siguiente aproximación a la raíz $\tilde{x}$.

Repetimos este proceso con x_2 en vez de x_1, y obtenemos la siguiente aproximación x_3 de la raíz $\tilde{x}$. En general, hallamos la siguiente aproximación x_{n+1} mediante la fórmula

(2) $$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\ , \qquad n = 1, 2, \ldots}$$

El proceso se ilustra en la figura A.2.

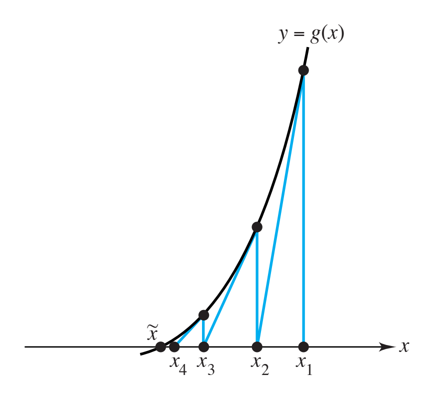


Figura A.2 Sucesión de iteraciones convergentes a la raíz

Si la estimación inicial x_1 está suficientemente cerca de una raíz $\tilde{x}$, entonces la sucesión de iteraciones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge por lo general a la raíz $\tilde{x}$. Sin embargo, si elegimos una mala estimación de x_1, entonces el proceso nos puede alejar de $\tilde{x}$.

EJEMPLO 1 Determinar hasta cuatro cifras decimales de una raíz para la ecuación

(3) $$x^3 + 2x - 4 = 0 \ .$$

SOLUCIÓN Hacemos $g(x) = x^3 + 2x - 4$ y vemos que $g'(x) = 3x^2 + 2$ es positivo para cada x. Por lo tanto, g es creciente y tiene a lo más un cero. Además, como $g(1) = -1$ y $g(2) = 8$, este cero debe estar entre 1 y 2. Así, comenzamos el procedimiento con la estimación inicial $x_1 = 1.5$. Para $g(x) = x^3 + 2x - 4$, la ecuación (2) se convierte en

(4) $$x_{n-1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 4}{3x_n^2 + 2}\ , \qquad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Para $x_1 = 1.5$, la ecuación (4) queda

$$x_2 = 1.5 - \frac{(1.5)^3 + 2(1.5) - 4}{3(1.5)^2 + 2} = 1.5 - \frac{2.375}{8.75} \approx 1.22857 \ .$$

Usamos x_2 para calcular x_3 y sucesivamente encontramos

$$x_3 = 1.18085 \ ,$$
$$x_4 = 1.17951 \ ,$$
$$x_5 = 1.17951 \ ,$$

donde hemos redondeado los cálculos a cinco cifras decimales. Como las primeras cuatro cifras decimales de x_4 y x_5 coinciden y no conocemos la quinta cifra decimal debido al redondeo, suponemos que la raíz $\tilde{x}$ de (3) coincide con 1.1795 hasta cuatro cifras decimales. De hecho,

$$g(1.1795) = -0.00005\ldots \quad \text{y} \quad g(1.1796) = 0.00056\ldots \ ,$$

de modo que $1.1795 < \tilde{x} < 1.1796$. Por lo tanto, $\tilde{x} = 1.1795\ldots$. ■

Observe que el método de Newton transforma el problema de determinar una raíz de la ecuación $g(x) = 0$ en el problema de determinar un punto fijo para la función $h(x) = x - g(x)/g'(x)$; es decir, hallar un número x tal que $x = h(x)$. (Véase la ecuación (2).)

Varios teoremas proporcionan condiciones que garantizan que la sucesión de iteraciones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por (2) converge a un cero de $g(x)$. Mencionaremos uno de tales resultados.

CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE NEWTON

Teorema 1. Suponga que un cero $\tilde{x}$ de $g(x)$ está en el intervalo (a, b) y que en ese intervalo

$$g'(x) > 0 \quad \text{y} \quad g''(x) > 0 \ .$$

Si elegimos x_1 de modo que $\tilde{x} < x_1 < b$, entonces la sucesión de iteraciones definida por (2) decrece a $\tilde{x}$.

No daremos una demostración de este teorema; el lector puede consultar un texto introductorio al análisis numérico, como *Numerical Analysis*, 6a. edición, por R. Burden y J. Faires (Brooks/Cole Publishing Co., Pacific Grove, California, 1997).

B REGLA DE SIMPSON

Un procedimiento útil para aproximar el valor de una integral definida es la **regla de Simpson**.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en $2n$ partes iguales y sean $x_0, x_1, \ldots x_{2n}$ los puntos de la partición, es decir,

$$x_k := a + kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n \ ,$$

donde $h := (b - a)/(2n)$. Si

$$y_k := f(x_k) \ , \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n \ ,$$

entonces la aproximación I_S mediante la regla de Simpson al valor de la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

está dado por

$$\textbf{(1)} \qquad I_S = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$$
$$= \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \ .$$

Si

$$E := \int_a^b f(x)dx - I_S$$

es el error resultante al usar la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida, entonces

$$\textbf{(2)} \qquad |E| \leq \frac{(b-a)}{180}h^4M \ ,$$

donde $M := \text{máx}|f^{(4)}(x)|$ para toda x en $[a, b]$.

EJEMPLO 1 Usar la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar el valor de la integral definida

$$\textbf{(3)} \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \ .$$

SOLUCIÓN En este caso, $h = 1/8$, $x_k = k/8$, $k = 0, 1, \ldots, 8$, y

$$y_k = (1 + x_k^2)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{64}} = \frac{64}{64 + k^2} \ .$$

Por la regla de Simpson, tenemos que

$$I_S = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{3}\left[1 + 4\left(\frac{64}{64+1}\right) + 2\left(\frac{64}{64+4}\right) + 4\left(\frac{64}{64+9}\right)\right.$$
$$+ 2\left(\frac{64}{64+16}\right) + 4\left(\frac{64}{64+25}\right) + 2\left(\frac{64}{64+36}\right)$$
$$\left. + 4\left(\frac{64}{64+49}\right) + \left(\frac{64}{64+64}\right)\right] = 0.7854 \ .$$

Por lo tanto, el valor de la integral definida en (3) es aproximadamente $I_S = 0.7854$. ■

Para un análisis más detallado de la regla de Simpson, el lector puede consultar un texto de análisis numérico, como *Numerical Analysis*, 6a. edición, por R. Burden y J. Faires (Brooks/Cole Publishing Co., Pacific Grove, California, 1997).

C REGLA DE CRAMER

Cuando un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una única solución, se pueden usar los determinantes para obtener una fórmula para las incógnitas. Este procedimiento se llama **regla de Cramer**. Cuando n es pequeño, estas fórmulas proporcionan un procedimiento sencillo para resolver el sistema.

Supongamos que para un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \ , \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \ , \end{aligned} \tag{1}$$

la matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

tiene un determinante distinto de cero. Entonces la regla de Cramer da la solución

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{3}$$

donde $\mathbf{A}_i$ es la matriz que se obtiene de $\mathbf{A}$ reemplazando la i-ésima columna de $\mathbf{A}$ por el vector columna

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

formado por las constantes del lado derecho del sistema (1).

EJEMPLO 1 Usar la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \ , \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \ , \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \ . \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Primero calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = 12 .$$

Usamos la fórmula (3) para ver que

$$x_1 = \frac{1}{12} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{48}{12} = 4 ,$$

$$x_2 = \frac{1}{12} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{-12}{12} = -1 ,$$

$$x_3 = \frac{1}{12} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{24}{12} = 2 . \quad \blacksquare$$

Para un análisis más detallado de la regla de Cramer, el lector puede consultar un texto introductorio al álgebra lineal, como *Linear Algebra and Its Applications*, 2a. edición, por David C. Lay (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997).

D MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

El **método de mínimos cuadrados** es un procedimiento para ajustar una línea recta a un conjunto de datos obtenidos con mediciones. Considere el *diagrama de dispersión* de la figura D.1, que consta de una gráfica en el plano x, y de algunos puntos dato $\{(x_i, y_i); i = 1, 2, \ldots, N\}$. Queremos construir la línea recta $y = \alpha + \beta x$ que se ajusta mejor a estos puntos dato, en el sentido de que la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de los puntos a la recta se vea minimizada.

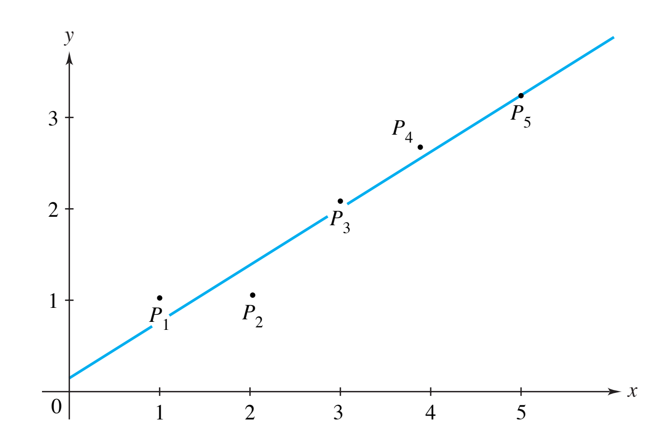


Figura D.1 Diagrama de dispersión y ajuste lineal por mínimos cuadrados

Si conocemos la ordenada al origen α y la pendiente β, entonces la abscisa de la recta correspondiente a la ordenada x_i es $\alpha + \beta x_i$. La abscisa dato correspondiente, y_i, se desvía de la recta en $[y_i - (\alpha + \beta x_i)]$ y la suma total de los cuadrados de las desviaciones es

$$S := \sum_{i=1}^{N} [y_i - (\alpha + \beta x_i)]^2 \ .$$

La característica importante de la función S es que los símbolos x_i y y_i son constantes, mientras que α y β son las variables (incógnitas). Los valores de α y β que minimizan S hacen que sus derivadas parciales se anulen:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{N} 2[y_i - (\alpha + \beta x_i)](-1) \ ,$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{N} 2[y_i - (\alpha + \beta x_i)](-x_i) \ .$$

Desplegamos estas condiciones de una forma que enfatice los papeles de α y β; después de algo de álgebra tenemos

$$\alpha N + \beta \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \ ,$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{N} x_i + \beta \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \ ,$$

y obtenemos las fórmulas para los valores óptimos de la ordenada al origen y de la pendiente:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \ ,$$

$$\beta = \frac{N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \ .$$

EJEMPLO 1 Determinar el ajuste lineal por mínimos cuadrados para los puntos dato $P_1(1, 1)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(3, 2)$, $P_4(4, 2.5)$ y $P_5(5, 3.1)$, que aparecen en la figura D.1.

SOLUCIÓN Ordenamos los datos como en la tabla D.1 de la página A-8 y obtenemos

$$\alpha = \frac{55(9.6) - 15(34.5)}{5(55) - (15)^2} = \frac{10.5}{50} = 0.21 \ ,$$

$$\beta = \frac{5(34.5) - 15(9.6)}{5(55) - (15)^2} = \frac{28.5}{50} = 0.57 \ .$$

Así, $y = 0.21 + 0.57x$ es la ecuación de la recta con mejor ajuste, la cual aparece en la figura D.1. ■

TABLA D.1

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1	1	1	1	1
2	2	1	2	4
3	3	2	6	9
4	4	2.5	10	16
5	5	3.1	15.5	25
Sumas	15	9.6	34.5	55

E PROCEDIMIENTO DE RUNGE-KUTTA PARA *n* ECUACIONES

La siguiente subrutina y algoritmo generalizan los programas dados en la sección 5.6 (páginas 287-288 a sistemas de *n* ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

SUBRUTINA DEL MÉTODO CLÁSICO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN (*n* ECUACIONES)

Propósito Aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \ ;$$
$$x_i(t_0) = a_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

para $t_0 \leq t \leq c$.

ENTRADA $n, t_0, a_1, \ldots, a_n, c, N$ (número de pasos), PRNTR (= 1 para imprimir la tabla).

Paso 1 Establezca el tamaño de paso

$$h = (c - t_0)/N \ , \quad t = t_0, \quad x_1 = a_1 \ , \quad \ldots \quad , x_n = a_n$$

Paso 2 Para $j = 1$ hasta N, realice los pasos 3 a 5

Paso 3 Haga

$$k_{1,i} = hf_i(t, x_1, \ldots, x_n) \ ,$$
$$i = 1, \ldots, n \ ;$$
$$k_{2,i} = hf_i\left(t + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{1}{2}k_{1,1}, \ldots, x_n + \frac{1}{2}k_{1,n}\right) \ ,$$
$$i = 1, \ldots, n \ ;$$
$$k_{3,i} = hf_i\left(t + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{1}{2}k_{2,1}, \ldots, x_n + \frac{1}{2}k_{2,n}\right) \ ,$$
$$i = 1, \ldots, n \ ;$$
$$k_{4,i} = hf_i(t + h, x_1 + k_{3,1}, \ldots, x_n + k_{3,n}) \ ,$$
$$i = 1, \ldots, n$$

Paso 4 Haga

$$t = t + h \ ;$$
$$x_i = x_i + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \ , \quad i = 1, \ldots, n$$

Paso 5 Si PRNTR = 1, imprimir $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$

ALGORITMO CLÁSICO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN CON TOLERANCIA (*n* ECUACIONES)

Propósito Aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \ ;$$
$$x_i(t_0) = a_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

en $t = c$, con tolerancia ε.

ENTRADA n, t_0, $a_1, \ldots, a_n$, c
ε (tolerancia)
M (número máximo de iteraciones)

Paso 1 Haga $z_i = a_i$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$; $\quad$ haga PRNTR $= 0$
Paso 2 Para $m = 0$ a M, realice los pasos 3 a 7 (o para ahorrar tiempo, comience con $m > 0$)
Paso 3 Haga $N = 2^m$
Paso 4 Llame a la SUBRUTINA DEL MÉTODO CLÁSICO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN (*n* ECUACIONES)
Paso 5 Imprima $h, x_1, x_2, \ldots, x_n$
Paso 6 Si $|z_i - x_i| < \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, n$, vaya al paso 10
Paso 7 Haga $z_i = x_i$, $\quad i = 1, \ldots, n$
Paso 8 Imprima "$x_i(c)$ es aproximadamente"; x_i (para $i = 1, \ldots, n$); "pero podría no estar dentro de la tolerancia"; ε
Paso 9 Vaya al paso 11
Paso 10 Imprima "$x_i(c)$ es aproximadamente"; x_i (para $i = 1, \ldots, n$); "con tolerancia"; ε
Paso 11 DETENERSE

SALIDA Aproximaciones de la solución al problema con valores iniciales en $t = c$, usando 2^m pasos.

Respuestas a algunos problemas impares

CAPÍTULO 1

Ejercicio 1.1, página 5

1. Ecuación diferencial ordinaria, segundo orden, variable independiente t, variable dependiente x, lineal.
3. Ecuación diferencial ordinaria, primer orden, variable independiente x, variable dependiente y, no lineal.
5. Ecuación diferencial ordinaria, primer orden, variable independiente t, variable dependiente p, no lineal.
7. Ecuación diferencial ordinaria, primer orden, variable independiente x, variable dependiente y, no lineal.
9. Ecuación diferencial ordinaria, segundo orden, variable independiente x, variable dependiente y, lineal.
11. Ecuación diferencial parcial, segundo orden, variables independientes t, r, variable dependiente N.
13. $dp/dt = kp$, donde k es la constante de proporcionalidad.
15. $dT/dt = k(M - T)$, donde k es la constante de proporcionalidad.
17. Alison gana por $6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} \approx 0.594$ segundos.

Ejercicio 1.2, página 14

3. Sí. **5.** No. **7.** Sí. **9.** No. **11.** Sí.
13. Sí. **19.** El lado izquierdo siempre es ≥ 3.
21. **(a)** $1/3, -3$. **(b)** $1 \pm \sqrt{6}$. **23.** Sí. **25.** Sí.
27. No. **31.** **(a)** No.

Ejercicio 1.3, página 22

1.

Figura B.1
Solución del problema 1(b)

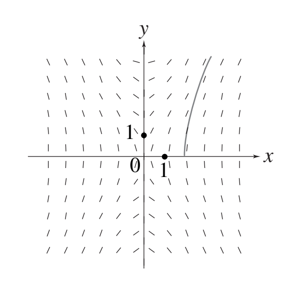


Figura B.2
Solución del problema 1(c)

1. **(d)** Las soluciones de las partes (b) y (c) se vuelven infinitas y la recta $y = 2x$ es una asíntota cuando $x \to \infty$. Cuando $x \to -\infty$, la solución de la parte (b) tiende a infinito y la recta $y = -2x$ es una asíntota, mientras que la solución de la parte (c) ni siquiera existe para x negativa.
3. Todas las soluciones tienen valor límite 8 cuando $t \to +\infty$.

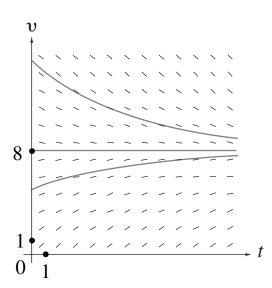


Figura B.3 Soluciones del problema 3 que satisfacen $v(0) = 5$, $v(0) = 8$, $v(0) = 15$

5. **(a)**

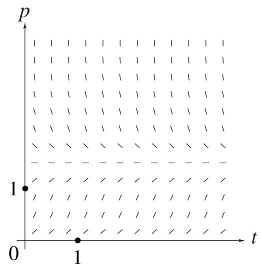


Figura B.4 Campo de direcciones para el problema 5(a)

(b) $\lim_{t\to\infty} p(t) = 3/2$. **(c)** $\lim_{t\to\infty} p(t) = 3/2$.
(d) No.

7. (a)

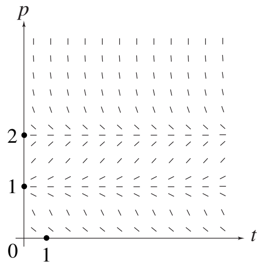


Figura B.5 Campo de direcciones para el problema 7(a)

(b) 2. **(c)** 2. **(d)** 0. **(e)** No.

9. (d) Crece y tiende de manera asintótica a la recta $y = x - 1$.

(f), (g) Véase la figura B.6.

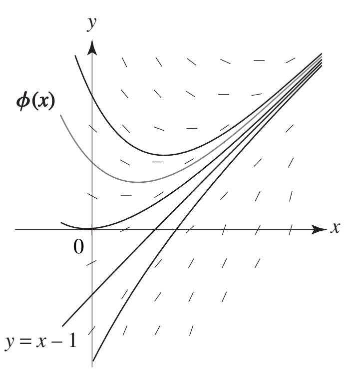


Figura B.6 Campo de direcciones y bosquejo de $\phi(x)$ para el problema 9(f), (g)

11.

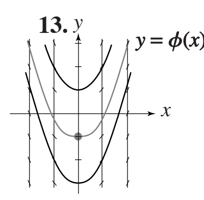


Figura B.7 Solución del problema 11

13.

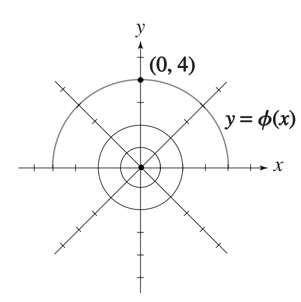


Figura B.8 Solución del problema 13

15.

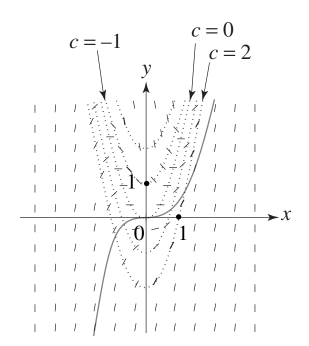


Figura B.9 Solución del problema 15

17. Tiende a 3.

Ejercicio 1.4, página 28

1.

x_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n	−1.000	−1.010	−1.030	−1.059	−1.097

(redondeado a tres cifras decimales).

3.

x_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n	2.700	2.511	2.383	2.292	2.225

(redondeado a tres cifras decimales).

5.

x_n	1.2	1.4	1.6	1.8
y_n	1.400	1.960	2.789	4.110

7.

N	$\approx x(1)$
1	1
2	1.06185
4	1.13920
8	1.19157

9.

x_n	y_n
1.1	−0.9
1.2	−0.81654
1.3	−0.74572
1.4	−0.68480
1.5	−0.63176
1.6	−0.58511
1.7	−0.54371
1.8	−0.50669
1.9	−0.47335
2.0	−0.44314

11. 1.46635.

15. $T(1) \approx 80.460°$, $T(2) \approx 73.647°$.

CAPÍTULO 2

Ejercicio 2.2, página 46

1. Sí. **3.** Sí. **5.** No.

7. $y = (3x - x^3 + C)^{1/3}$.

9. $y = Ce^{2x - \cos x}$. **11.** $2y + \text{sen}(2y) = 4 \arctan x + C$.
13. $x = \dfrac{Ce^t}{Ce^t - 1}$, $x \equiv 1$. **15.** $y = 1/(C - e^{\cos x})$.
17. $y = 2e^{-x^4/4} + 1$. **19.** $y = -3e^{-1-\cos\theta}$.
21. $y = \text{sen}^2 x + 2 \,\text{sen}\, x$. **23.** $y = \arctan(1 + x^2)$.
25. $y = 4e^{x^3/3} - 1$.
27. **(a)** $y(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$.
(b) $y(x) = \left(1 + 3\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{1/3}$.
(c) $y(x) = \tan\left(\int_0^x \sqrt{1 + \text{sen}\, t}\, dt + \pi/4\right)$.
(d) $y(0.5) \approx 1.381$.
29. **(d)** $\partial f/\partial y$ no es continua en $(0, 0)$. **33.** 281 kg.
35. **(a)** 82.2 minutos. **(b)** 31.8 minutos.
(c) Nunca alcanza la temperatura deseada.
37. **(a)** \$1105.17 . **(b)** 27.73 años.
(c) \$4427.59 .
39. *A* gana.

Ejercicio 2.3, página 54

1. Lineal. **3.** Ninguna. **5.** Ambas.
7. $y = (1/2)e^{3x} + Ce^x$. **9.** $r = \text{sen}\,\theta + C\cos\theta$.
11. $y = -t - 2 + Ce^t$. **13.** $x = y^3 + Cy^{-2}$.
15. $y = 1 + C(x^2 + 1)^{-1/2}$. **17.** $y = xe^x - x$.
19. $x = t^{-1}/2 - 2t^{-3}$. **21.** $y = x^2\cos x - \pi^2\cos x$.
23. $y(t) = (38/3)e^{-5t} - (8/3)e^{-20t}$.
25. **(b)** $y(3) \approx 0.183$.
27. **(b)** 0.9960 . **(c)** 0.9486 , 0.9729 .
29. $x = e^{4y}/2 + Ce^{2y}$.
31. **(a)** $y = x - 1 + Ce^{-x}$. **(b)** $y = x - 1 + 2e^{-x}$.
(c) $y = x/3 - 1/9 + Ce^{-3x}$.
(d) $y = \begin{cases} x - 1 + 2e^{-x}, & 0 \le x \le 2 , \\ x/3 - 1/9 + (4e^6/9 + 2e^4)e^{-3x}, & 2 < x . \end{cases}$

(e)

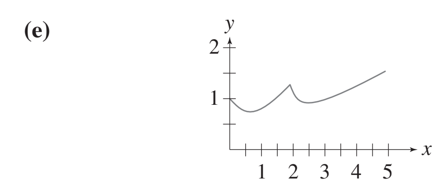


Figura B.18 Solución del problema 31(e)

33. **(a)** $y = x$ es la única solución en una vecindad de $x = 0$.
(b) $y = -3x + Cx^2$ satisface $y(0) = 0$ para cualquier C.
35. **(a)** 0.281 kg/L. **(b)** 0.598 kg/L.

37. $x(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2\cos(\pi t/12)}{4 + (\pi/12)^2} - \dfrac{(\pi/12)\text{sen}(\pi t/12)}{4 + (\pi/12)^2} + \left(\dfrac{19}{2} + \dfrac{2}{4 + (\pi/12)^2}\right)e^{-2t}$.

39. 71.8°F a mediodía; 26.9°F a las 5 P.M.

Ejercicio 2.4, página 65

1. Lineal con y como variable dependiente. **3.** Exacta.
5. Exacta y además lineal con x como variable dependiente.
7. Lineal con r como variable dependiente.
9. $y = (C - 3x)/(x^2 - 1)$.
11. $\text{sen}\, x \cos y + x^2 - y^2 = C$. **13.** $t \ln y + t = C$.
15. $r = (C - e^\theta)\text{sen}\;\theta$. **17.** No es exacta.
19. $x^2 - y^2 + \arctan(xy) = C$.
21. $\ln x + x^2y^2 - \text{sen}\, y = \pi^2$. **23.** $y = -2/(te^t + 2)$.
25. $\text{sen}\, x - x\cos x = \ln y + 1/y + \pi - 1$ (la ecuación es separable y no es exacta).
27. **(a)** $-\ln|y| + f(x)$.
(b) $\cos x \,\text{sen}\, y - y^2/2 + f(x)$ donde f sólo depende de x.
29. **(c)** $y = x^2/(C - x)$ **(d)** Sí, $y \equiv 0$.
33. **(a)** $x = cy^2$; $x \equiv 0$; $y \equiv 0$.
(b) $x^2 + 4y^2 = c$. **(c)** $2y^2\ln y - y^2 + 2x^2 = c$.
(d) $2x^2 + y^2 = c$.

Ejercicio 2.5, página 71

1. Separable, lineal con x como variable dependiente, tiene un factor integrante que sólo depende de x.
3. Tiene un factor integrante que sólo depende de y.
5. Tiene un factor integrante que sólo depende de y.
7. $\mu = x^{-2}$; $y^2/2 - y/x + 3x = C$ y $x \equiv 0$.
9. $\mu = x$; $x^2y^2 + x^2y + x^4 = C$.
11. $\mu = y^{-2}$; $x^2y^{-1} + x = C$ y $y \equiv 0$.
13. $\mu = xy$; $x^2y^3 - 2x^3y^2 = C$.
15. $\mu(z) = \exp\left(\int H(z)dz\right)$; $z = xy$.
17. **(b)** $\mu = e^y$; $x = y - 1 + Ce^{-y}$.

Ejercicio 2.6, página 78

1. $y' = G(ax + by)$. **3.** Coeficientes lineales.
5. Bernoulli. **7.** Homogénea.
9. $\ln(y^2/x^6) - y^2/x^2 = C$.
11. $y = x/(\ln|x| + C)$ y $y \equiv 0$.
13. $\sqrt{1 + x^2/t^2} = \ln|t| + C$.
15. $(x^2 - 4y^2)^3x^2 = C$.
17. $y = (x + C)^2/4 - x$ y $y = -x$.

19. $y = x + (6 + 4Ce^{2x})/(1 + Ce^{2x})$ y $y = x + 4$.
21. $y = 2/(Cx - x^3)$ y $y \equiv 0$.
23. $y = 5x^2/(x^5 + C)$ y $y \equiv 0$.
25. $x^{-2} = 2t^2\ln|t| + Ct^2$ y $x \equiv 0$.
27. $r = \theta^2/(C - \theta)$ y $r \equiv 0$.
29. $(y + 2)^2 + 2(x + 1)(y + 2) - 3(x + 1)^2 = C$.
31. $(2x + 2y - 3)^3 = C(2x + y - 2)^2$.
33. $y = 4x + (3 + Ce^{4x})/(1 - Ce^{4x})$.
35. $\ln[(x + 3)^2 + 3(t - 1)^2] + (2/\sqrt{3})\arctan[(x + 3)/\sqrt{3}(t - 1)] = C$.
37. $y^{-2} = -e^{2x}/2 + Ce^{-2x}$ y $y \equiv 0$.
39. $\theta y^2 = C(\theta + y)^2$ y $y = -\theta$.
41. $(x - y + 2)^2 = Ce^{2x} + 1$.
45. $(y - 4x)^2(y + x)^3 = C$.

Problemas de repaso, página 82

1. $e^x + ye^{-y} = C$. **3.** $x^2y - x^3 + y^{-2} = C$.
5. $y + x\,\text{sen}(xy) = C$. **7.** $y = (7\ln|t| + C)^{1/7}$.
9. $(x^2 + 4y^2)^3x^2 = C$. **11.** $\tan(t - x) + t = C$.
13. $y = -(x^2/2)\cos(2x) + (x/4)\text{sen}(2x) + Cx$.
15. $y = 2x + 3 - (x + C)^2/4$.
17. $y = 2/(1 + Ce^{2\theta})$ y $y \equiv 0$.
19. $y^2 = x^2 + Cx^3$ y $x \equiv 0$.
21. $xy - x^2 - x + y^2/2 - 4y = C$.
23. $y^2 + 2xy - x^2 = C$.
25. $x^2y^{-2} - 2xy^{-1} - 4xy^{-2} = C$ y $y \equiv 0$.
27. $[(y - 4)^2 - 3(x - 3)^2]\left\{[\sqrt{3}(x - 3) + (y - 4)]/[\sqrt{3}(x - 3) - (y - 4)]\right\}^{1/\sqrt{3}} = C$.
29. $x^4y^3 - 3x^3y^2 + x^4y^2 = C$.
31. $y = -x^3/2 + 7x/2$.
33. $x = -t - 2 + 3e^{-t}$. **35.** $y = -2x\sqrt{2x^2 - 1}$.
37. $\ln[(y - 2)^2 + 2(x - 1)^2] + \sqrt{2}\arctan\left[\dfrac{y - 2}{\sqrt{2}(x - 1)}\right] = \ln 2$.
39. $y = \sqrt{(19x^4 - 1)/2}$.

CAPÍTULO 3

Ejercicio 3.2, página 98

1. $50 - 45e^{-2t/25}$ kg , 5.07 min.
3. $(0.4)(100 - t) - (39 \times 10^{-8})(100 - t)^4$ L ; 19.96 min.
5. 0.0097%; 73.24 h
7. 20 minutos más tarde; $1/e$ veces más salado.
9. 43,236. **13.** 5882; 6000.
15. 1527; 1527.

17. (a)

Año	$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$	Logística (Mínimos cuadrados)
1790	0.0351	3.06
1800	0.0363	4.23
1810	0.0331	5.86
1820	0.0335	8.08
1830	0.0326	11.12
1840	0.0359	15.22
1850	0.0356	20.72
1860	0.0267	27.99
1870	0.0260	37.42
1880	0.0255	49.37
1890	0.0207	64.06
1900	0.0210	81.49
1910	0.0149	101.29
1920	0.0161	122.72
1930	0.0072	144.71
1940	0.0149	166.09
1950	0.0185	185.82
1960	0.0133	203.16
1970	0.0115	217.76
1980	0.0102	229.61
1990		238.96
2000		246.15

(b) $p_1 = 266.657$, $A = 0.000123985$.
(c) $p_0 = 3.05548$ (usando todos los datos, incluyendo 1990).
(d) Véase la tabla de la parte (a).
19. $(1/2)\ln 15 \approx 1.354$ años; 14 millones de toneladas al año.
21. 1 hora; 2 horas. **23.** 11.7% **25.** 31,606 años.
27. e^{-2t} kilogramos de Hh, $2e^{-t} - 2e^{-2t}$ kilogramos de It y $1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$ kilogramos de Bu.

Ejercicio 3.3, página 107

1. 20.7 min. **3.** 22.6 min. **5.** 9:08 A.M.
7. 28.3°C; 32.5°C; 1:16 P.M.
9. 16.3°C; 19.1°C; 31.7°C; 28.9°C. **11.** 30.4 min.
13. 148.6°F.
15. $T - M = C(T + M)\exp[2\arctan(T/M) - 4M^3kt]$; para T cerca de M, $M^4 - T^4 \approx 4M^3(M - T)$, de modo que $dT/dt \approx k_1(M - T)$, donde $k_1 = 4M^3k$.

Ejercicio 3.4, página 115

1. $(0.981)t + (0.0981)e^{+10t} - 0.0981$ m; 97.3 s.
3. 18.6 s. **5.** $4.91t + 22.55 - 22.55e^{-2t}$ m; 97.3 s.
7. 242 s.
9. $95.65t + 956.5e^{-t/10} - 956.5$ m; 13.2 s.

11. $e^{bv}(bv - mg)^{mg} = e^{v0b}(bv_0 - mg)^{mg}e^{-b2x/m}$.
13. 2.69 s.; 101.19 m. **15.** $(\omega_0 - T/k)e^{-kt/I} + T/k$.
17. 300 s.
19. $2636e^{-t/20} + 131.8t - 2636$ m; 1.768 s.
21. $5e-2t/2 + 6t - 5/2$; 6 m/s. **23.** Bote B.
25. **(e)** 11.18 km/s. **(f)** 2.38 km/s.

Ejercicio 3.5, página 122

1. $I = \{1.44e^{-100t} + \cos 120t + 1.2 \operatorname{sen} 120t\}/2.44$;
$E_L = (-7.2e^{-100t} - 6 \operatorname{sen} 120t + 7.2 \cos 120t)/2.44$.
3. $-(\ln .4) \times 10^{-10} \approx 9.2 \times 10^{-11}$ sec.
5. $VI = IRI = I^2R;\ VI = L\dfrac{dI}{dt}I = \dfrac{d}{dt}\dfrac{LI^2}{2}$;
$VI = E_C\dfrac{dCE_C}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{CE_C^2}{2}$.
7. $-(10 \ln .1)/3 \approx 7.68$ sec.

Ejercicio 3.6, página 131

3.

h	"e"
1	3
0.1	2.72055
0.01	2.71830
0.001	2.71828
0.0001	2.71828

7.

x_n	y_n
1.1	0.10450
1.2	0.21668
1.3	0.33382
1.4	0.45300
1.5	0.57135

9.

x_n	y_n
0.2	0.61784
0.4	1.23864
0.6	1.73653
0.8	1.98111
1.0	1.99705
1.2	1.88461
1.4	1.72447
1.6	1.56184
1.8	1.41732
2.0	1.29779

11. $\phi(1) \approx x(1; 2^{-3}) = 1.25494$.
13. $\phi(1) \approx y(1; 2^{-3}) = 0.71698$.
15. $x = 1.27$.
17.

x_n	$y_n(h = 0.2)$	$y_n(h = 0.1)$	$y_n(h = 0.025)$
0.1		−1	0.06250
0.2	−3	1	0.00391
0.3		−1	0.00024
0.4	9	1	0.00002
0.5		−1	0.00000
0.6	−27	1	0.00000
0.7		−1	0.00000
0.8	81	1	0.00000
0.9		−1	0.00000
1.0	−243	1	0.00000

Concluimos que el tamaño de paso puede afectar drásticamente a la convergencia.

19.

x_n	y_n $r = 1.5$	$r = 2$	$r = 3$
0.25	1.58286	1.53125	1.39063
0.5	2.35144	2.04960	1.55347
0.75	3.26750	2.44003	1.62885
1.0	4.25316	2.68675	1.66999
1.25	5.21675	2.82920	1.69406
1.5	6.08340	2.90804	1.70858
1.75	6.81163	2.95080	1.71748
2.0	7.39215	2.97377	1.72298
2.25	7.83709	2.98604	1.72640
2.5	8.16851	2.99257	1.72852
2.75	8.41036	2.99605	1.72985
3.0	8.58432	2.99790	1.73067
3.25	8.70817	2.99889	1.73119
3.5	8.79571	2.99941	1.73151
3.75	8.85729	2.99969	1.73171
4.0	8.90044	2.99983	1.73184
4.25	8.93062	2.99991	1.73192
4.5	8.95168	2.99995	1.73197
4.75	8.96637	2.99997	1.73200
5.0	8.97660	2.99999	1.73202

La población límite es $3^{1/(r-1)}$.

21.

Hora	T_n $k = 0.2$	$k = 0.4$	$k = 0.6$
Medianoche	65.0000	65.0000	65.0000
4 A.M.	69.1639	68.5644	68.1299
8 A.M.	71.4836	72.6669	73.6678
Mediodía	72.9089	75.1605	76.9783
4 P.M.	72.0714	73.5977	74.7854
8 P.M.	69.8095	69.5425	69.2832
Medianoche	68.3852	67.0500	65.9740

Ejercicio 3.7, página 141

1. $y_{n+1} = y_n + h\cos(x_n + y_n) - \dfrac{h^2}{2}\operatorname{sen}(x_n + y_n)[1 + \cos(x_n + y_n)]$.
3. $y_{n+1} = y_n + h(x_n - y_n) + \dfrac{h^2}{2}(1 - x_n + y_n) - \dfrac{h^3}{6}(1 - x_n + y_n) + \dfrac{h^4}{24}(1 - x_n + y_n)$.
5. Orden 2, $\phi(1) \approx 1.3725$; orden 4, $\phi(1) \approx 1.3679$.
7. −11.7679. **9.** 1.36789. **11.** $x = 1.41$.
13. $x = 0.50$.

15.

x_n	y_n
0.5	0.21462
1.0	0.13890
1.5	−0.02668
2.0	−0.81879
2.5	−1.69491
3.0	−2.99510

19. $v(0) \approx 0.24193$ con $h = 0.0625$.
21. $z(1) \approx 2.87083$ con $h = 0.03125$.

CAPÍTULO 4

Ejercicios 4.1, página 157

3. $\sqrt{5}$.
5. 0 .
7. $y(t) = \dfrac{-63}{541}\operatorname{sen} 5t - \dfrac{30}{541}\cos 5t$.
9. $y(t) = -\cos 2t + \dfrac{3}{4}\operatorname{sen} 2t$.

Ejercicios 4.2, página 165

1. $c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t}$.
3. $c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}$.
5. $c_1e^{(-1-\sqrt{5})t/2} + c_2e^{(-1+\sqrt{5})t/2}$.
7. $c_1e^{t/2} + c_2e^{-4t}$.
9. $c_1e^{(1+3\sqrt{5})t/2} + c_2e^{(1-3\sqrt{5})t/2}$.
11. $c_1e^{-5t/2} + c_2te^{-5t/2}$.
13. $3e^{-4t}$.
15. $e^{-t} - 2te^{-t}$.
17. $(\sqrt{3}/2)\left[e^{(1+\sqrt{3})t} - e^{(1-\sqrt{3})t}\right]$.
19. $2e^{5(t+1)} + e^{-(t+1)}$.
21. **(a)** $ar + b = 0$. **(b)** $ce^{-bt/a}$.
23. $ce^{-4t/5}$.
25. $ce^{13t/6}$.
27. Linealmente independientes. **29.** Linealmente dependientes. **31.** Linealmente dependientes.
33. **(a)** Cierto. **(b)** Falso.
35. **(a)** No. **(b)** No. **(c)** Sí. **(d)** 0. Porque estas funciones no son una pareja de soluciones a una ecuación homogénea de la forma que aparece en la parte **(b)**, problema 34.
37. Como $W[y_1, y_2](t) = Ce^{-bt/a}$, donde C es una constante, el Wronskiano siempre es distinto de cero si $C = 0$ o bien nunca se anula si $C \neq 0$ (pues la exponencial nunca se anula).
39. **(a)** Linealmente independientes. **(b)** Linealmente dependientes. **(c)** Linealmente independientes. **(d)** Linealmente dependientes.
41. $c_1e^{t} + c_2e^{(-1-\sqrt{5})t} + c_3e^{(-1+\sqrt{5})t}$.
43. $c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_3e^{2t}$.
45. $c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{2t}$.
47. $3 + e^{t} - 2e^{-t}$.
49. **(a)** $c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + c_3e^{r_3t}$ (donde $r_1 = -4.832$, $r_2 = -1.869$, y $r_3 = 0.701$).
(b) $c_1e^{r_1t} + c_2e^{-r_1t} + c_3e^{r_2t} + c_4e^{-r_2t}$ (donde $r_1 = 1.176$, $r_2 = 1.902$).
(c) $c_1e^{-t} + c_2e^{t} + c_3e^{-2t} + c_4e^{2t} + c_5e^{3t}$.

Ejercicios 4.3, página 175

1. $c_1\cos 3t + c_2\operatorname{sen} 3t$.
3. $c_1e^{3t}\cos t + c_2e^{3t}\operatorname{sen} t$.
5. $c_1e^{-2t}\cos\sqrt{2}t + c_2e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$.
7. $c_1e^{t/2}\cos(5t/2) + c_2e^{t/2}\operatorname{sen}(5t/2)$.
9. $c_1e^{t} + c_2e^{7t}$.
11. $c_1e^{-5t} + c_2te^{-5t}$.
13. $c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\operatorname{sen} 2t$.
15. $c_1e^{-5t}\cos 4t + c_2e^{-5t}\operatorname{sen} 4t$.
17. $c_1e^{t/2}\cos(3\sqrt{3}t/2) + c_2e^{t/2}\operatorname{sen}(3\sqrt{3}t/2)$.
19. $c_1e^{t} + c_2e^{-t}\cos 2t + c_3e^{-t}\operatorname{sen} 2t$.
21. $2e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\operatorname{sen} t$.
23. $(\sqrt{2}/4)\left[e^{(2+\sqrt{2})t} - e^{(2-2\sqrt{2})t}\right]$.
25. $e^{t}\operatorname{sen} t - e^{t}\cos t$.
27. $e^{2t} - \sqrt{2}\,e^{t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$.
29. **(a)** $c_1e^{-t} + c_2e^{t}\cos\sqrt{2}t + c_3e^{t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$.
(b) $c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}\cos 3t + c_3e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$.
(c) $c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + c_3\cos 3t + c_4\operatorname{sen} 3t$.
31. **(a)** Oscilatorio. **(b)** Tiende a cero.
(c) Tiende a $-\infty$. **(d)** Tiende a $-\infty$.
(e) Tiende a $+\infty$.
33. **(a)** $y(t) = 0.3e^{-3t}\cos 4t + 0.2e^{-3t}\operatorname{sen} 4t$ m .
(b) $2/\pi$.
(c) Decrece la frecuencia de oscilación, introduce el factor e^{-3t}, haciendo que la solución decaiga a cero.
35. $b \geq 2\sqrt{Ik}$.
37. (a) $c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + c_3t\cos t + c_4t\operatorname{sen} t$.
(b) $(c_1 + c_2t)e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) + (c_3 + c_4t)e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$.
41. $c_1x^{-3} + c_2x^{2}$.
43. $x^{-4}\left[c_1\cos(\ln x) + c_2\operatorname{sen}(\ln x)\right]$.

Ejercicios 4.4, página 184

1. No. **3.** Sí, $3^{t} = e^{t\ln 3}$. **5.** No.
7. No, no es una ecuación con coeficientes constantes.
9. $y_p \equiv -3$.
11. e^{2t} .
13. $\cos 3t$.
15. $xe^{x}/2 + 3e^{x}/4$.
17. $4t^{2}e^{t}$.
19. $\left(\dfrac{t}{13} + \dfrac{8}{169}\right)te^{-3t}$.
21. $t^{3}e^{2t}/6$.

23. $-\frac{1}{21}\theta^3 - \frac{1}{49}\theta^2 - \frac{2}{343}\theta$.

25. $e^{2t}(\cos 3t + 6\operatorname{sen} 3t)$.

27. $(A_3t^4 + A_2t^3 + A_1t^2 + A_0t)\cos 3t$
$+ (B_3t^4 + B_2t^3 + B_1t^2 + B_0t)\operatorname{sen} 3t$.

29. $e^{3t}(A_6t^8 + A_5t^7 + A_4t^6 + A_3t^5 + A_2t^4 + A_1t^3 + A_0t^2)$.

31. $(A_3t^4 + A_2t^3 + A_1t^2 + A_0t)e^{-t}\cos t$
$+ (B_3t^4 + B_2t^3 + B_1t^2 + B_0t)e^{-t}\operatorname{sen} t$.

33. $(1/5)\cos t + (2/5)\operatorname{sen} t.$

35. $\left(\frac{1}{10}t^2 - \frac{4}{25}t\right)e^t$.

Ejercicios 4.5, página 190

1. **(a)** $5 \cos t.$
(b) $\cos t - e^{2t}$.
(c) $4\cos t + 6e^{2t}$.

3. $y = -t + c_1e^t + c_2e^{-t}$.

5. $\theta = t - 1 + c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$.

7. $y = x^2e^x + c_1xe^x + c_2e^x$.

9. Sí.

11. No.

13. Sí.

15. No.

17. $y = 11t - 1 + c_1e^t + c_2e^{-t}$.

19. $y = (\cos x - \operatorname{sen} x)e^x/2 + c_1e^x + c_2e^{2x}$.

21. $y = (1/2)\theta e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta + (c_1\cos\theta + c_2 \operatorname{sen}\theta)e^{-\theta}$.

23. $y = e^t - 1$.

25. $z = e^{-x} - \cos x + \operatorname{sen} x$.

27. $y = -(3/10)\cos x - (1/10)\operatorname{sen} x - (1/20)\cos 2x$
$+(3/20)\operatorname{sen} 2x$.

29. $y = -(1/2)\operatorname{sen}\theta - (1/3)e^{2\theta} + (3/4)e^{\theta} + (7/12)e^{-\theta}$.

31. $y_p = (A_1t + A_0)t\cos t + (B_1t + B_0)t\operatorname{sen} t + C\cdot 10^t$.

33. $x_p = (A\cos t + B\operatorname{sen} t)e^t + C_2t^2 + C_1t + C_0$.

35. $y_p = (A_1t + A_0)\cos 3t + (B_1t + B_0)\operatorname{sen} 3t + Ce^{5t}$.

37. $y_p = t^2 + 3t - 1$.

39. $y_p = (t/10 - 4/25)te^t - 1/2$.

41. **(a)** $y_1 = -(2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)e^{-t} + 2$
para $0 \le t \le 3\pi/2$.
(b) $y_2 = y_h = (c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t)e^{-t}$,
para $t > 3\pi/2$.
(c) $c_1 = -2(e^{3\pi/2} + 1)$, $c_2 = -(e^{3\pi/2} + 1)$.

43. $y = -\cos t + (1/2)\operatorname{sen} t - (1/2)e^{-3t} + 2e^{-t}$.

45. **(a)** $y(t) = \frac{2V\cos(\pi/2V)}{V^2 - 1}\operatorname{sen} t$.
(b) $V \approx 0.73$.

47. **(a)** $2\operatorname{sen} 3t - \cos 6t$. **(b)** Sin solución.
(c) $c\operatorname{sen} 3t - \cos 6t$, donde c es cualquier constante.

Ejercicios 4.6, página 195

1. $c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t$
$-(1/4)(\cos 2t)\ln|\sec 2t + \tan 2t|$.

3. $c_1e^{2t} + c_2e^{-t} + e^{3t}/4$. **5.** $c_1e^t + c_2te^t + te^t\ln|t|$.

7. $c_1\cos 4\theta + c_2\operatorname{sen} 4\theta + (\theta/4)\operatorname{sen} 4\theta$
$+(1/16)(\cos 4\theta)\ln|\cos 4\theta|$.

9. $c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t$
$+[(\cos 2t)\ln|\csc 2t + \cot 2t| - 1]/4$.

11. $c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + (\operatorname{sen} t)\ln|\sec t + \tan t/ - 2$.

13. $c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + (1/24)\sec^2 2t - 1/8$
$+(1/8)(\operatorname{sen} 2t)\ln|\sec 2t + \tan 2t|$.

15. $c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t - t^2 + 3 + 3t\operatorname{sen} t$
$+3(\cos t)\ln|\cos t|$.

17. $c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t - e^t/5$
$-(1/2)(\cos 2t)\ln|\sec 2t + \tan 2t|$.

19. $y = e^{1-t} - e^{t-1} + \frac{e^t}{2}\int_1^t \frac{e^{-u}}{u}du - \frac{e^{-t}}{2}\int_1^t \frac{e^u}{u}du$
$[y(2) \approx -1.93]$.

21. $y_p = -t^2 - 2t - 2$ (además $y_p = -t^2$) .

23. $y_p = (1/125 - t^2/10)e^{-5t}$ [además $y_p = -(t^2/10)e^{-5t}$].

25. $y = x^{1/2} + x^{-1/2}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x)$.

Ejercicios 4.7, página 206

1. Sea $Y(t) = y(-t)$. Entonces $Y'(t) = -y'(-t)$, $Y''(t) = y''(-t)$. Pero $y''(s) - sy(s) = 0$, de modo que $y''(-t) + ty(-t) = 0$ o $Y''(t) + tY(t) = 0$.

3. La rigidez del resorte es $(-6y)$, de modo que se opone a los desplazamientos negativos $(y < 0)$ y apoya los desplazamientos positivos $(y > 0)$. En un principio, $y < 0$ y $y' < 0$, de modo que la rigidez (positiva) invierte la velocidad negativa y restaura y en 0. De ahí en adelante, $y > 0$ y la rigidez negativa lleva y en $+\infty$.

5. **(a)** $y'' = 2y^3 = \frac{d}{dy}(y^4/2)$. Así, al hacer $K = 0$ y elegir el signo $(-)$ en la ecuación (11), obtenemos
$$t = -\int\frac{dy}{\sqrt{2y^4/2}} + c = \frac{1}{y} + c, \text{ o } y = 1/(t - c) .$$
(b) La dependencia lineal implicaría
$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \frac{1/(t - c_1)}{1/(t - c_2)} = \frac{t - c_2}{t - c_1} \equiv \text{constante}$$
en una vecindad de 0, lo que es falso si $c_1 \ne c_2$.
(c) Si $y(t) = 1/(t - c)$, entonces $y(0) = -1/c$, $y'(0) = -1/c^2 = -y(0)^2$, lo que es falso para los datos dados.

7. **(a)** La velocidad, que siempre es perpendicular al brazo de la palanca, es $\ell\, d\theta/dt$. Así, (brazo de la palanca) $\times$ (momento perpendicular) $= \ell m\ell\, d\theta/dt = m\ell^2 d\theta/dt$.

(b) El componente de la fuerza gravitacional perpendicular al brazo de la palanca es mg sen θ y se dirige en forma decreciente hacia θ. Así, el momento de torsión es $-\ell mg$ sen θ.

(c) Momento de torsión $= \dfrac{d}{dt}$ (momento angular) o

$-\ell mg \operatorname{sen}\theta = (m\ell^2\theta')' = m\ell^2\theta''$.

9. 2 o -2 .

11. El signo del coeficiente de amortiguamiento $(y')^2 - 1$ indica que las velocidades bajas son impulsadas por un amortiguamiento negativo pero que las velocidades altas son aminoradas. Por lo tanto, es de esperar un ciclo límite.

13. **(a)** Airy. **(b)** Duffing. **(c)** van der Pol.

15. **(a)** Sí (t^2 = rigidez positiva).
(b) No ($-t^2$ = rigidez negativa).
(c) Sí (y^4 = rigidez positiva).
(d) No (y^5 = rigidez negativa para $y < 0$).
(e) Sí ($4 + 2\cos t$ = rigidez positiva).
(f) Sí (rigidez positiva y amortiguamiento).
(g) No (rigidez negativa y amortiguamiento).

17. $1/4\sqrt{2}$.

Ejercicios 4.8, página 217

1. $y(t) = -(1/2)\cos 4t + (1/2)\operatorname{sen} 4t$
$= (\sqrt{2}/2)\operatorname{sen}(4t - \pi/4)$;
amplitud $= \sqrt{2}/2$; periodo $= \pi/2$;
frecuencia $= 2/\pi$; $\pi/16$ segundo.

3. $b = 0$: $y(t) = \cos 4t$.

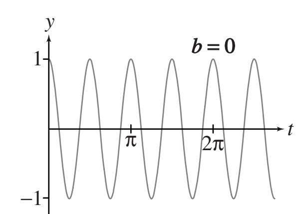


Figura B.19 $b = 0$

$b = 0$: $y(t) = e^{-3t}\cos\sqrt{7}t + (3/\sqrt{7})e^{-3t}\operatorname{sen}\sqrt{7}t$
$= (4/\sqrt{7})e^{-3t}\operatorname{sen}(\sqrt{7}t + \phi)$, donde
$\phi =$ arctan $\sqrt{7}/3 \approx 0.723$.

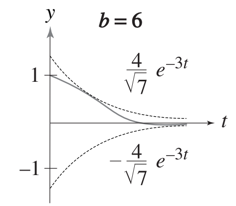


Figura B.20 $b = 6$

$b = 8$: $y(t) = (1 + 4t)e^{-4t}$.

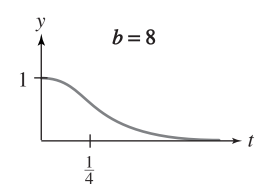


Figura B.21 $b = 8$

$b = 10$: $y(t) = (4/3)e^{-2t} - (1/3)e^{-8t}$.

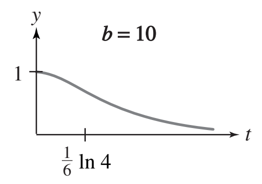


Figura B.22 $b = 10$

5. $k = 20$: $y(t) = [(1 = \sqrt{5})/2]e^{(-5+\sqrt{5})t}$
$+ [(1 - \sqrt{5})/2]e^{(-5-\sqrt{5})t}$.

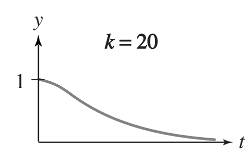


Figura B.23 $k = 20$

$k = 25$: $y(t) = (1 + 5t)e^{-5t}$.

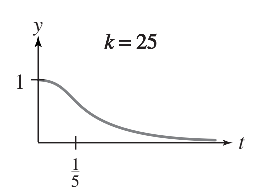


Figura B.24 $k = 25$

$k = 30$: $y(t) = e^{-5t}\cos\sqrt{5}t + \sqrt{5}e^{-5t}\operatorname{sen}\sqrt{5}t$
$= \sqrt{6}e^{-5t}\operatorname{sen}(\sqrt{5}t + \phi)$, donde
$\phi = \arctan(1/\sqrt{5}) \approx 0.421$.

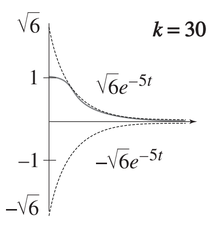


Figura B.25 $k = 30$

7. $y(t) = (-3/4)e^{-8t}\cos 8t - e^{-8t}\operatorname{sen} 8t$
$= (5/4)e^{-8t}\operatorname{sen}(8t + \phi)$, donde
$\phi = \pi + \arctan(3/4) \approx 3.785$;
factor de amortiguamiento $= (5/4)e^{-8t}$;
cuasiperiodo $= \pi/4$; cuasifrecuencia $= 4/\pi$.

9. 0.242 m .

11. $(10/\sqrt{9999})\arctan(\sqrt{9999}) \approx 0.156$ segundos .

13. Extremos relativos en
$t = [\pi/3 + n\pi - \arctan(\sqrt{3}/2)]/(2\sqrt{3})$
para $n = 0, 1, 2, \ldots$; pero toca a las curvas $\pm\sqrt{7/12}e^{-2t}$
at $t = [\pi/2 + m\pi - \arctan(\sqrt{3}/2)]/(2\sqrt{3})$
para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

15. Mida primero la mitad del cuasiperiodo P como el tiempo entre dos cruces sucesivos por cero. Luego calcule el cociente $y(t + P)/y(t) = e^{-(b/2m)P}$.

Ejercicios 4.9, página 225

1. $M(\gamma) = 1/\sqrt{(1 - 4\gamma^2)^2 + 4\gamma^2}$.

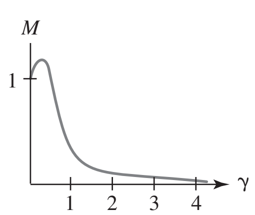


Figura B.26

3. $y(t) = \cos 3t + (1/3)t\operatorname{sen} 3t$.

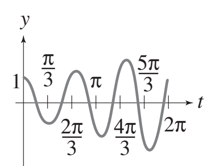


Figura B.27

5. **(a)** $y(t) = -[F_0/(k - m\gamma^2)]\cos(\sqrt{k/m}t)$
$+[F_0/(k - m\gamma^2)]\cos\gamma t$
$= (F_0/[m(\omega^2 - \gamma^2)])(\cos\gamma t - \cos\omega t)$.

(c) $y(t) = \operatorname{sen} 8t \operatorname{sen} t$.

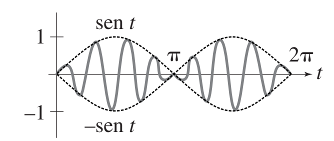


Figura B.28

7. $y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + \dfrac{F_0\operatorname{sen}(\gamma t + \theta)}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}$,
donde $r_1, r_2 = -(b/2m) \pm (1/2m)\sqrt{b^2 - 4mk}$
y $\tan\theta = (k - m\gamma^2)/(b\gamma)$ como en la ecuación (7).

9. $y_p(t) = (0.08)\cos 2t + (0.06)\operatorname{sen} 2t$
$= (0.1)\operatorname{sen}(2t + \theta)$, donde
$\theta = \arctan(4/3) \approx 0.927$.

11. $y(t) = -(18/85)e^{-2t}\cos 6t - (22/255)e^{-2t}\operatorname{sen} 6t$
$+(2/\sqrt{85})\operatorname{sen}(2t + \theta)$, donde
$\theta = \arctan(9/2) \approx 1.352$;
frecuencia de resonancia $= 2\sqrt{2}/\pi$ ciclos/segundo .

13. $y_p(t) = (3/185)(8 \operatorname{sen} 4t - 11\cos 4t)$.

Problemas de repaso, página 228

1. $c_1e^{-9t} + c_2e^{t}$

3. $c_1e^{t/2}\cos(3t/2) + c_2e^{t/2}\operatorname{sen}(3t/2)$.

5. $c_1e^{3t/2} + c_2e^{t/3}$.

7. $c_1e^{-t/3}\cos(t/6) + c_2e^{-t/3}\operatorname{sen}(t/6)$.

9. $c_1e^{7t/4} + c_2te^{7t/4}$.

11. $t^{1/2}\{c_1\cos[(\sqrt{19}/2)\ln t] + c_2\operatorname{sen}[(\sqrt{19}/2)\ln t]\}$.

13. $c_1\cos 4t + c_2\operatorname{sen} 4t + (1/17)te^{t} - (2/289)e^{t}$.

15. $c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3e^{-t/3}$.

17. $c_1e^{t} + c_2e^{-t/2}\cos(\sqrt{43}t/2) + c_3e^{-t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{43}t/2)$.

19. $c_1e^{-3t} + c_2e^{t/2} + c_3te^{t/2}$.

21. $c_1e^{3t/2}\cos(\sqrt{19}t/2) + c_2e^{3t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{19}t/2) - e^{t}/5$
$+t^2 + 6t/7 + 4/49$.

23. $c_1\cos 4\theta + c_2\operatorname{sen} 4\theta$
$-(1/16)(\cos 4\theta)\ln|\sec 4\theta + \tan 4\theta|$.

25. $c_1e^{3t/2} + c_2te^{3t/2} + e^{3t}/9 + e^{5t}/49$.

27. $c_1x + c_2x^{-2} - 2x^{-2}\ln x + x\ln x$.

29. $e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t)$.

31. $2e^{t}\cos 3t - (7/3)e^{t}\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} 3t$.

33. $-e^{-t} - 3e^{5t} + e^{8t}$.

35. $\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \theta\operatorname{sen}\theta + (\cos\theta)\ln|\cos\theta|$.

37. **(a), (c), (e),** y **(f)** tienen todas sus soluciones acotadas cuando $t \to +\infty$.

39. $y_p(t) = (1/4)\operatorname{sen} 8t$; $\sqrt{62}/2\pi$.

CAPÍTULO 5

Ejercicios 5.2, página 248

1. $x = c_2e^{-t}$; $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$.

3. $x = c_1 + c_2e^{-2t}$; $y = c_2e^{-2t}$.

5. $x \equiv -5$; $y \equiv 1$.

7. $u = c_1 - (1/2)c_2e^{-t} + (1/2)e^{t} + (5/3)t$;
$v = c_1 + c_2e^{-t} + (5/3)t$.

9. $x = c_1e^t + (1/4)\cos t - (1/4)\operatorname{sen} t$;
$y = -3c_1e^t - (3/4)\cos t - (1/4)\operatorname{sen} t$.

11. $u = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + c_3e^{\sqrt{3}t} + c_4e^{-\sqrt{3}t} - (3/10)e^t$;
$v = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - (2/5)c_3e^{\sqrt{3}t} - (2/5)c_4e^{-\sqrt{3}t} + (1/5)e^t$.

13. $x = 2c_2e^t \cos 2t - 2c_1e^t \operatorname{sen} 2t$;
$y = c_1e^t \cos 2t + c_2e^t \operatorname{sen} 2t$.

15. $w = -(2/3)c_1e^{2t} + c_2e^{7t} + t + 1$;
$z = c_1e^{2t} + c_2e^{7t} - 5t - 2$.

17. $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - 4c_3 \cos\left(\sqrt{6}t\right) - 4c_4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{6}t\right)$;
$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos\left(\sqrt{6}t\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{6}t\right)$.

19. $x = 2e^{3t} - e^{2t}$;
$y = -2e^{3t} + 2e^{2t}$.

21. $x = e^t + e^{-t} + \cos t + \operatorname{sen} t$;
$y = e^t + e^{-t} - \cos t - \operatorname{sen} t$.

23. Una infinidad de soluciones que satisfacen $x + y = e^t + e^{-2t}$.

25. $x(t) = -c_1e^t - 2c_2e^{2t} - c_3e^{3t}$,
$y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$,
$z(t) = 2c_1e^t + 4c_2e^{2t} + 4c_3e^{3t}$.

27. $x(t) = c_1e^{8t} + c_2e^{4t} + c_3$,
$y(t) = \frac{1}{2}(c_1e^{8t} - c_2e^{4t} + c_3)$,
$z(t) = -c_1e^{8t} + c_3$.

29. $-3 \le \lambda \le -1$.

31. $x(t) = -\left(10 + \frac{20}{\sqrt{7}}\right)e^{r_1t} - \left(10 - \frac{20}{\sqrt{7}}\right)e^{r_2t} + 20$ kg ,
$y(t) = \frac{30}{\sqrt{7}}e^{r_1t} - \frac{30}{\sqrt{7}}e^{r_2t} + 20$ kg, donde
$r_1 = \frac{-5 - \sqrt{7}}{100} \approx -0.0765$,
$r_2 = \frac{-5 + \sqrt{7}}{100} \approx -0.0235$.

33. $x = \left[\frac{20 - 10\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right]e^{(-3+\sqrt{5})t/100} - \left[\frac{20 + 10\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right]e^{(-3-\sqrt{5})t/100} + 20$;
$y = -\left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)e^{(-3+\sqrt{5})t/100} + \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)e^{(-3-\sqrt{5})t/100} + 20$.

35. 90.4ºF. **37.** $460/11 \approx 41.8$ºF.

41. **(a)** $(D + 4)(D - 1)$. **(b)** $(D + 3)(D - 2)$.
(c) $(2D - 1)(D + 5)$.
(d) $\left(D + \sqrt{2}\right)\left(D - \sqrt{2}\right)$.

Ejercicios 5.3, página 259

1. $x_1' = x_2$, $x_2' = 3x_1 - tx_2 + t^2$; $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -6$.

3. $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = x_4$, $x_4' = x_4 - 7x_1 + \cos t$; $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$, $x_4(0) = 2$.

5. $x_1' = x_2$, $x_2' = x_2 - x_3 + 2t$, $x_3' = x_4$, $x_4' = x_1 - x_3 - 1$; $x_1(3) = 5$, $x_2(3) = 2$, $x_3(3) = 1$, $x_4(3) = -1$.

7. $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = x_4 + t$, $x_4' = x_5$, $x_5' = (2x_4 - 2x_3 + 1)/5$; $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 4$, $x_4(0) = x_5(0) = 1$.

9. $t_{n+1} = t_n + h,\quad n = 0, 1, 2, \ldots;$
$x_{n+1,i} = x_{n,i} + \frac{h}{2}\,[f_i(t_n, x_{n,1}, \ldots, x_{n,m}) + f_1(t_n + h, x_{n,1} + hf_1(t_n, x_n, 1, \ldots, x_{n,m}), \ldots, x_{n,m} + hf_m(t_n, x_n, 1, \ldots, x_{n,m})y(t_i))]$.
$i = 1, 2, \ldots, m$

11.

i	t_i	$y(t_i)$
1	0.250	0.80500
2	0.500	0.69302
3	0.750	0.63304
4	1.000	0.60565

13.

i	t_i	$y(t_i)$
1	1.250	0.25000
2	1.500	0.50000
3	1.750	0.75000
4	2.000	1.00000

15. $y(1) \approx x_1(1, 2^{-2}) = 1.69023$.

17. $u(1; 2^{-2}) = v(1; 2^{-2}) = 0.36789$.

19.

		Parte (a)		**Parte (b)**		**Parte (c)**	
i	t_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$x(t_i)$	$y(t_i)$
1	0.5	1.95247	2.25065	1.48118	2.42311	0.91390	2.79704
2	1.0	3.34588	1.83601	2.66294	1.45358	1.63657	1.13415
3	1.5	4.53662	3.36527	5.19629	2.40348	4.49334	1.07811
4	2.0	2.47788	4.32906	3.10706	4.64923	5.96115	5.47788
5	2.5	1.96093	2.71900	1.92574	3.32426	1.51830	5.93110
6	3.0	2.86412	1.96166	2.34143	2.05910	0.95601	2.18079
7	3.5	4.28449	2.77457	3.90106	2.18977	2.06006	0.98131
8	4.0	3.00965	4.11886	3.83241	3.89043	5.62642	1.38072
9	4.5	2.18643	3.14344	2.32171	3.79362	5.10594	5.10462
10	5.0	2.63187	2.25824	2.21926	2.49307	1.74187	5.02491

21.

i	t_i	$x_1(t_i) \approx H(t_i)$
1	0.5	0.09573
2	1.0	0.37389
3	1.5	0.81045
4	2.0	1.37361
5	2.5	2.03111
6	3.0	2.75497
7	3.5	3.52322
8	4.0	4.31970
9	4.5	5.13307
10	5.0	5.95554

23. Sí, sí.
25. $y(1) \approx x_1(1; 2^{-3}) = 1.25958$.
27. $y(0.1) \approx 0.00647, \ldots, y(2.0) \approx 1.60009$.
29. **(a)** $P_1(10) \approx 0.567, P_2(10) \approx 0.463, P_3(10) \approx 0.463$.
(b) $P_1(10) \approx 0.463, P_2(10) \approx 0.567, P_3(10) \approx 0.463$.
(c) $P_1(10) \approx 0.463, P_2(10) \approx 0.463, P_3(10) \approx 0.567$.
Todas las poblaciones tienden a 0.5.

Ejercicios 5.4, página 272

1. $x = y^3, \quad y > 0$.

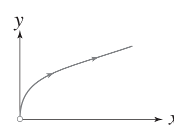


Figura B.29

3. $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \quad \left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right).$ **5.** $(0, 0)$.
7. $e^x + ye^{-y} = c$. **9.** $e^x + xy - y^2 = c$.
11. $y^2 - x^2 = c$. **13.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = c$.

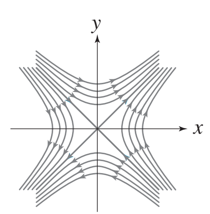


Figura B.30

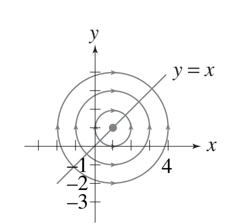


Figura B.31

15. $(-2, 1)$ es un punto silla (inestable).

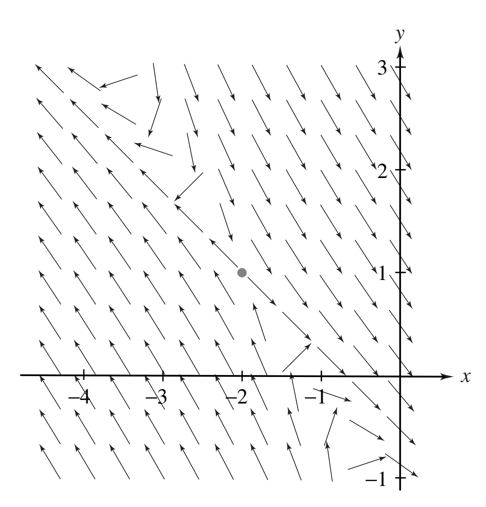


Figura B.32

17. $(0, 0)$ es un centro (estable).

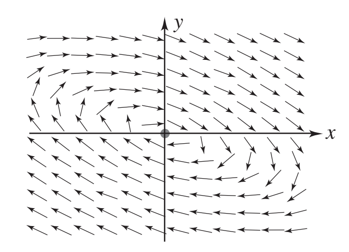


Figura B.33

19. $(0, 0)$ es un punto silla (inestable).

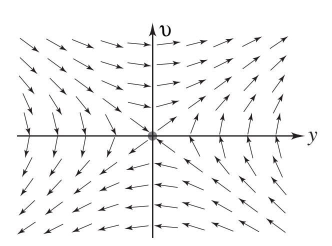


Figura B.34

21. (0,0) es un centro (estable).

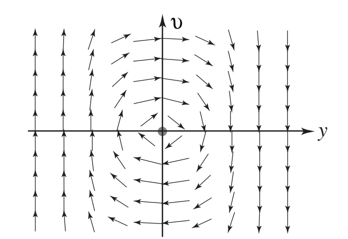


Figura B.35

23. (0, 0) es un centro (estable); (1,0) es un punto silla (inestable).

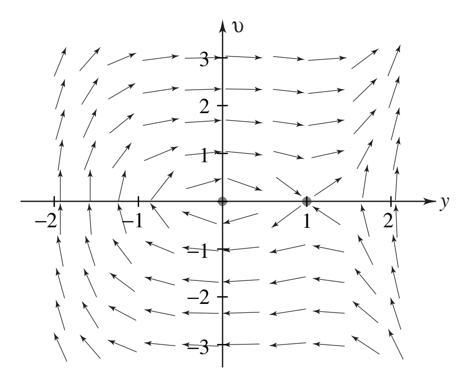


Figura B.36

25. **(a)** Periódica **(b)** No periódica
(c) Punto crítico (periódico).

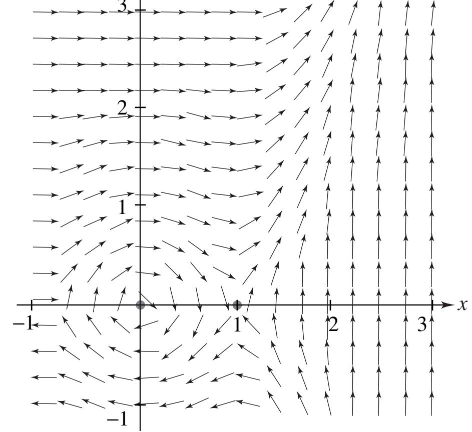


Figura B.37

27. $(x(t), y(t))$ tiende a $(0, 0)$.

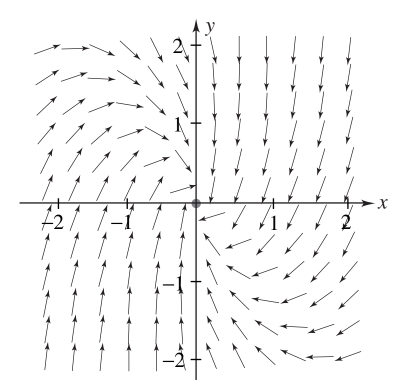


Figura B.38

29. **(a)** Nodo inestable. **(b)** Centro (estable).
(c) Nodo estable **(d)** Espiral inestable.
(e) Silla (inestable).
(f) Espiral asintóticamente estable.

31. **(a)** $y' = v\ ,\quad v' = f(y)$.
(b) $\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{f(y)}{v}$ implica $\displaystyle\int v\,dv = \int f(y)\,dy$ + constante, o $v^2/2 = F(y) + K$.

33. **(a)**

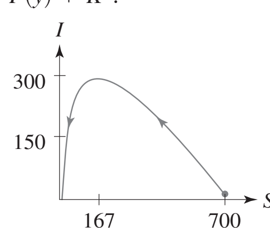


Figura B.39

(b) 295 personas.

35. **(a)** $x' = v, v' = -x + 1/(\lambda - x)$.
(b) $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-x + 1/(\lambda - x)}{v}$ implica
$\displaystyle\int v\,dv = \int \left(-x + \frac{1}{\lambda - x}\right)dx$ + constante, o
$v^2/2 = -x^2/2 - \ln(\lambda - x)$ + constante. Obtenemos la ecuación de la curva integral eligiendo la constante como $C/2$
(c) En un punto crítico $v = 0$ y $-x + 1/(\lambda - x) = 0$.

Las soluciones de la última ecuación son $x = \dfrac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$, y que sólo son reales cuando $\lambda \geq 2$.

(d)

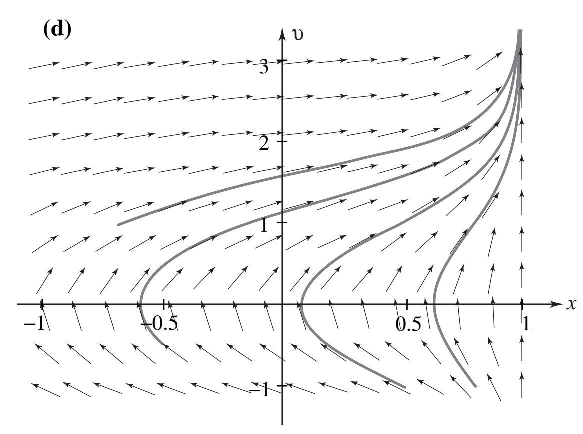


Figura B.40 $\lambda = 1$

(e) Véanse las figuras B.40 y B.41. Cuando $\lambda = 3$, un punto crítico es un centro y el otro es una silla. Para $\lambda = 1$, la barra es atraída por el imán. Para $\lambda = 3$, la barra puede oscilar en forma periódica, o (rara vez) llegar al reposo en el punto crítico silla.

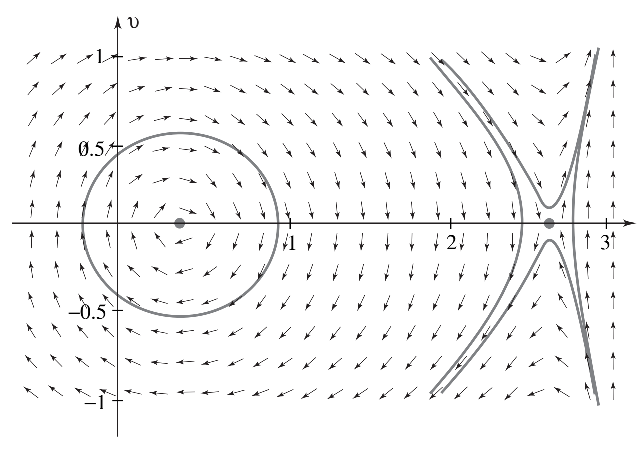


Figura B.41 $\lambda = 3$

37. (c) Para el semiplano superior, el centro está en $\upsilon = 0, y = -1$; para el semiplano inferior, el centro está en $\upsilon = 0, y = 1$.

(d) Todos los puntos del segmento $\upsilon = 0, -1 \le y \le 1$.

(e) $y = -0.5$; véase la figura B.42.

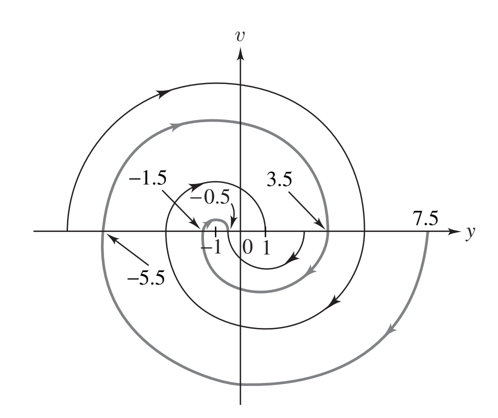


Figura B.42

Ejercicios 5.5, página 282

1. $m_1x'' = k_1(y - x)$,
$m_2y'' = -k_1(y - x) - k_2y$;
$x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
$x(t) = -(8/17)\cos t - (9/17)\cos\left(\sqrt{20/3}\,t\right)$,
$y(t) = -(6/17)\cos t + (6/17)\cos\left(\sqrt{20/3}\,t\right)$.

3. $mx'' = -kx + k(y - x)$,
$my'' = -k(y - x) + k(z - y)$,
$mz'' = -k(z - y) - kz$;
La frecuencia normal, $(1/2\pi)\sqrt{\left(2 + \sqrt{2}\right)(k/m)}$, tiene el modo $x(t) = z(t) = -\left(1/\sqrt{2}\right) y(t)$; la frecuencia normal $(1/2\pi)\sqrt{\left(2 - \sqrt{2}\right)(k/m)}$ tiene el modo $x(t) = z(t) = \left(1/\sqrt{2}\right) y(t)$; y la frecuencia normal $(1/2\pi)\sqrt{2k/m}$ tiene el modo $x(t) = -z(t), y(t) \equiv 0$.

5. $x(t) = -e^{-t} - te^{-t} - \cos t$; $y(t) = e^{-t} + te^{-t} - \cos t$.

7. $x(t) = (2/5)\cos t + (4/5)\text{sen}\, t - (2/5)\cos\sqrt{6}t + \left(\sqrt{6}/5\right)\text{sen}\sqrt{6}t - \text{sen}\, 2t$;
$y(t) = (4/5)\cos t + (8/5)\text{sen}\, t + (1/5)\cos\sqrt{6}t - \left(\sqrt{6}/10\right)\text{sen}\sqrt{6}t - (1/2)\text{sen}\, 2t$.

9. $(1/2\pi)\sqrt{g/l}$; $(1/2\pi)\sqrt{(g/l) + (2k/m)}$.

Ejercicios 5.6, página 289

1. $I(t) = \left(19/\sqrt{21}\right)\left[e^{\left(-25 - 5\sqrt{21}\right)t/2} - e^{\left(-25 + 5\sqrt{21}\right)t/2}\right]$.

3. $I_p(t) = (4/51)\cos 20t - (1/51)\text{sen}\, 20t$; la frecuencia de resonancia es $5/\pi$.

5. $M(\gamma) = 1/\sqrt{(100 - 4\gamma^2)^2 + 100\gamma^2}$.

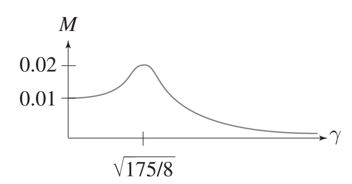


Figura B.43

7. $L = 35$ H, $R = 10\ \Omega$, $C = 1/15$ F, y
$E(t) = 50 \cos 10t$ V.

11. $I_1 = (3/5)e^{-3t/2} - (8/5)e^{-2t/3} + 1$,
$I_2 = (1/5)e^{-3t/2} - (6/5)e^{-2t/3} + 1$,
$I_3 = (2/5)e^{-3t/2} - (2/5)e^{-2t/3}$.

13. $(1/2)I_1' + 2q_3 = \cos 3t$ (donde $I_3 = q_3'$) ,
$(1/2)I_1' + I_2 = 0, I_1 = I_2 + I_3$:
$I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$;
$I_1 = -(36/61)e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \left(42\sqrt{3}/61\right)e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{3}t + (36/61)\cos 3t + (30/61)\operatorname{sen} 3t$,
$I_2 = (45/61)e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \left(39\sqrt{3}/61\right)e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{3}t - (45/61)\cos 3t + (54/61)\operatorname{sen} 3t$,
$I_3 = -(81/61)e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \left(3\sqrt{3}/61\right)e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{3}t + (81/61)\cos 3t - (24/61)\operatorname{sen} 3t$.

Ejercicios 5.7, página 299

1. Para $\omega = 3/2$: la transformación de Poincaré alterna entre los puntos $(0.8, 1.5)$ y $(0.8, -1.5)$. Existe una solución subarmónica de periodo 4π. Para $\omega = 3/5$: la transformación de Poincaré recorre en forma cíclica los puntos $(-1.5625, 0.6)$, $(-2.1503, -0.4854)$, $(-0.6114, 0.1854)$, $(-2.5136, 0.1854)$, y $(-0.9747, -0.4854)$. Existe una solución subarmónica de periodo 10π.

3. Los puntos se vuelven no acotados.

5. El atractor es el punto $(-1.0601, 0.2624)$.

9. **(a)** $\{1/7, 2/7, 4/7, 1/7, \ldots\}$,
$\{3/7, 6/7, 5/7, 3/7, \ldots\}$.
(b) $\{1/15, 2/15, 4/15, 8/15, 1/15, \ldots\}$,
$\{1/5, 2/5, 4/5, 3/5, 1/5, \ldots\}$,
$\{1/3, 2/3, 1/3, \ldots\}$,
$\{7/15, 14/15, 13/15, 11/15, 7/15, \ldots\}$.
(c) $x_n = 0$ para $n \geq j$.

13.

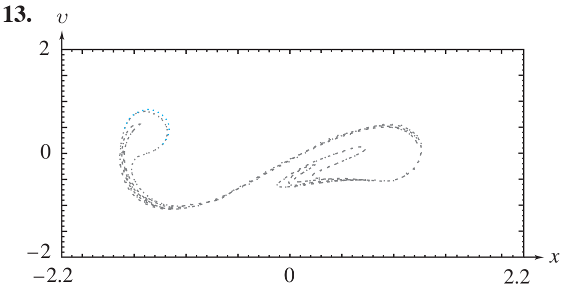


Figura B.44

Problemas de repaso, página 302

1. $x(t) = -(c_1/3)t^3 - (c_2/2)t^2 - (c_3 + 2c_1)t + c_4$,
$y(t) = c_1t^2 + c_2t + c_3$.

3. $x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t + e^t/10$,
$y(t) = (3/2)(c_1 + c_2)\cos 3t - (3/2)(c_1 - c_2)\operatorname{sen} 3t - (11/20)e^t - (1/4)e^{-t}$.

5. $x(t) = 2 \sin t$, $y(t) = e^t - \cos t + \operatorname{sen} t$,
$z(t) = e^t + \cos t + \operatorname{sen} t$.

7. $x(t) = -(13.9/4)e^{-t/6} - (4.9/4)e^{-t/2} + 4.8$,
$y(t) = -(13.9/2)e^{-t/6} + (4.9/2)e^{-t/2} + 4.8$.

9. $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = (1/3)(5 + e^t x_1 - 2x_2)$.

11. $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = t - x_5 - x_6$,
$x_4' = x_5$, $x_5' = x_6$, $x_6' = x_2 - x_3$.

13. $x^2 - (y - 1)^2 = c$; el punto crítico $(0, 1)$ es un punto silla (inestable).

15. Punto espiral asintóticamente estable.

17. Una trayectoria es un camino trazado por una pareja solución $\left(x(t), y(t)\right)$ conforme t crece; así, es una curva dirigida (orientada). Una curva integral es la gráfica de una solución a la ecuación del plano fase; no tiene dirección. Todas las trayectorias están a lo largo de (partes de) curvas integrales. Una curva integral dada puede ser el conjunto subyacente de puntos para varias trayectorias distintas.

19. $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, $q/C = R_2I_2$,
$R_2I_2 = R_1I_3 + L\, dI_3/dt$, donde q es la carga en el condensador ($I_1 = dq/dt$);
$I_3 = e^{-t}(A \cos t + B \operatorname{sen} t)$,
$I_2 = e^{-t}(B \cos t - A \operatorname{sen} t)$,
$I_1 = e^{-t}\left[(A - B)\operatorname{sen} t - (A + B)\cos t\right]$.

CAPÍTULO 6

Ejercicio 6.1, página 323

1. $(-\infty, 0)$. **3.** $(3\pi/2, 5\pi/2)$. **5.** $(0, \infty)$.
7. Lin. indep.; $48e^{7x}$. **9.** Lin. dep.; 0.
11. Lin. indep.; $(3/2)x^{-5/2}$. **13.** Lin. indep.; $12x^4$.
15. $c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-4x}$. **17.** $c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$.
19. **(a)** $c_1e^x + c_2e^{-x}\cos 2x + c_3e^{-x}\operatorname{sen} 2x + x^2$.
(b) $-e^x + e^{-x}\operatorname{sen} 2x + x^2$.
21. **(a)** $c_1x + c_2x \ln x + c_3x(\ln x)^2 + \ln x$.
(b) $3x - x\ln x + x(\ln x)^2 + \ln x$.
23. **(a)** $2\operatorname{sen} x - x$. **(b)** $4x - 6\operatorname{sen} x$.
29. **(b)** Sean $f_1(x) = |x - 1|$ y $f_2(x) = x - 1$.
33. e^{2x} , $(\operatorname{sen} x - 2\cos x)/5$, $-(2\operatorname{sen} x + \cos x)/5$.
35. $xy''' - y'' + xy' - y = 0$.

Ejercicio 6.2, página 330

1. $c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-4x}$. **3.** $c_1e^{-x} + c_2e^{-2x/3} + c_3e^{x/2}$.
5. $c_1e^{-x} + c_2e^{-x}\cos 5x + c_3e^{-x}\operatorname{sen} 5x$.
7. $c_1e^{-x} + c_2e^{(3+\sqrt{65})x/4} + c_3e^{(3-\sqrt{65})x/4}$.
9. $c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + c_3x^2e^{3x}$.
11. $c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4x^3e^{-x}$.
13. $c_1\cos\sqrt{2}x + c_2x\cos\sqrt{2}x + c_3\operatorname{sen}\sqrt{2}x + c_4x\operatorname{sen}\sqrt{2}x$.
15. $c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-3x} + (c_4 + c_5x)e^{-x}\cos 2x$
$+ (c_6 + c_7x)e^{-x}\operatorname{sen} 2x$.
17. $c_1e^{-4x} + c_2e^{3x} + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^{-2x}$
$+ (c_6 + c_7x)e^{-2x}\cos x + (c_8 + c_9x)e^{-2x}\operatorname{sen} x + c_{10}$
$+ c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 + c_{14}x^4$.
19. $e^x - 2e^{-2x} - 3e^{2x}$. **21.** $e^{2x} - \sqrt{2}e^x\operatorname{sen}\sqrt{2}x$.
23. $x(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t$, $y(t) = c_1 - c_2 + c_2t$.
27. $c_1e^{1.120x} + c_2e^{0.296x} + c_3e^{-0.520x} + c_4e^{-2.896x}$.
29. $c_1e^{-0.5x}\cos(0.866x) + c_2e^{-0.5x}\operatorname{sen}(0.866x)$
$+ c_3e^{-0.5x}\cos(1.323x) + c_4e^{-0.5x}\operatorname{sen}(1.323x)$.
31. **(a)** $\{x, x^{-1}, x^2\}$. **(b)** $\{x, x^2, x^{-1}, x^{-2}\}$.
(c) $\{x, x^2\cos(3\ln x), x^2\operatorname{sen}(3\ln x)\}$.
33. **(b)** $x(t) = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + c_3\cos\sqrt{6}t$
$+ c_4\operatorname{sen}\sqrt{6}t$.
(c) $y(t) = 2c_1\cos t + 2c_2\operatorname{sen} t - (c_3/2)\cos\sqrt{6}t$
$- (c_4/2)\operatorname{sen}\sqrt{6}t$.
(d) $x(t) = (3/5)\cos t + (2/5)\cos\sqrt{6}t$,
$y(t) = (6/5)\cos t - (1/5)\cos\sqrt{6}t$.
35. $c_1\cosh rx + c_2\operatorname{senh} rx + c_3\cos rx + c_4\operatorname{sen} rx$, donde $r^4 = k/(EI)$.

Ejercicio 6.3, página 336

1. $c_1xe^x + c_2 + c_3x + c_4x^2$.
3. $c_1x^2e^{-2x}$.
5. $c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x} - (1/6)xe^x + (1/6)x^2$
$+ (5/18)x + 37/108$.
7. $c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x} - (1/6)x^2e^{-2x}$.
9. $c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + (1/6)x^3e^x$.
11. D^5 . **13.** $D + 7$. **15.** $(D - 2)(D - 1)$.
17. $[(D + 1)^2 + 4]^3$. **19.** $(D + 2)^2[(D + 5)^2 + 9]^2$.
21. $c_3\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x + c_5$.
23. $c_3xe^{3x} + c_4x^2 + c_5x + c_6$.
25. $c_3 + c_4x + c_5\cos 2x + c_6\operatorname{sen} 2x$.
27. $c_3xe^{-x}\cos x + c_4xe^{-x}\operatorname{sen} x + c_5x^2 + c_6x + c_7$.
29. $c_2x + c_3x^2 + c_6x^2e^x$.
31. $-2e^{3x} + e^{-2x} + x^2 - 1$. **33.** $x^2e^{-2x} - x^2 + 3$.
39. $x(t) = -(1/63)e^{3t} + c_1 + c_2t - c_3e^{\sqrt{2}t} - c_4e^{-\sqrt{2}t}$,
$y(t) = (8/63)e^{3t} + c_1 + c_2t + c_3e^{\sqrt{2}t} + c_4e^{-\sqrt{2}t}$.

Ejercicio 6.4, página 341

1. $(1/6)x^2e^{2x}$. **3.** $e^{2x}/16$.
5. $\ln(\sec x) - (\operatorname{sen} x)\ln(\sec x + \tan x)$.
7. $c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 - (1/24)x^{-1}$.
9. $-(1/2)e^x\int e^{-x}g(x)dx + (1/6)e^{-x}\int e^xg(x)dx$
$+ (1/3)e^{2x}\int e^{-2x}g(x)dx$.
11. $c_1x + c_2x^{-1} + c_3x^3 - x\operatorname{sen} x - 3\cos x + 3x^{-1}\operatorname{sen} x$.

Problemas de repaso, página 344

1. **(a)** $(0, \infty)$. **(b)** $(-4, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.
5. **(a)** $e^{-5x}(c_1 + c_2x) + e^{2x}(c_3 + c_4x + c_5x^2)$
$+ (\cos x)(c_6 + c_7x) + (\operatorname{sen} x)(c_8 + c_9x)$.
(b) $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + e^x(c_5 + c_6x)$
$+ (e^{-x}\cos\sqrt{3}x)(c_7 + c_8x)$
$+ (e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x)(c_9 + c_{10}x)$.
7. **(a)** D^3 . **(b)** $D^2(D - 3)$. **(c)** $[D^2 + 4]^2$.
(d) $[(D + 2)^2 + 9]^3$.
(e) $D^3(D + 1)^2(D^2 + 4)(D^2 + 9)$.
9. $c_1x + c_2x^5 + c_3x^{-1} - (1/21)x^{-2}$.

CAPÍTULO 7

Ejercicio 7.2, página 358

1. $\frac{1}{s^2}$, $s > 0$. **3.** $\frac{1}{s - 6}$, $s > 6$.
5. $\frac{s}{s^2 + 4}$, $s > 0$.
7. $\frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 9}$, $s > 2$.
9. $e^{-2s}\left(\frac{2s + 1}{s^2}\right)$, $s > 0$.
11. $\frac{e^{-\pi s} + 1}{s^2 + 1}$, para toda s.

13. $\dfrac{6}{s+3} - \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{8}{s}\,, \quad s > 0\,.$

15. $\dfrac{6}{s^4} - \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{s-4}{(s-4)^2+1}\,, \quad s > 4\,.$

17. $\dfrac{6}{(s-3)^2+36} - \dfrac{6}{s^4} + \dfrac{1}{s-1}\,, \quad s > 3\,.$

19. $\dfrac{24}{(s-5)^5} - \dfrac{s-1}{(s-1)^2+7}\,, \quad s > 5\,.$

21. Continua (y por tanto continua por partes).
23. Continua por partes.
25. Continua (y por tanto continua por partes).
27. Ninguna de las dos.
29. Todas las funciones excepto (c), (e) y (h).

Ejercicio 7.3, página 364

1. $\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{2}{(s-1)^2+4}\,.$

3. $\dfrac{s+1}{(s+1)^2+9} + \dfrac{1}{s-6} - \dfrac{1}{s}\,.$

5. $\dfrac{4}{(s+1)^3} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{s}{s^2+16}\,.$

7. $\dfrac{24}{s^5} - \dfrac{24}{s^4} + \dfrac{12}{s^3} - \dfrac{4}{s^2} + \dfrac{1}{s}\,.$

9. $\dfrac{4(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2}\,.$ **11.** $\dfrac{s}{s^2-b^2}\,.$

13. $\dfrac{1}{2s} - \dfrac{s}{2(s^2+4)}\,.$ **15.** $\dfrac{3s}{4(s^2+1)} + \dfrac{s}{4(s^2+9)}\,.$

17. $\dfrac{s}{2(s^2+9)} - \dfrac{s}{2(s^2+49)}\,.$

19. $\dfrac{n+m}{2[s^2+(n+m)^2]} + \dfrac{m-n}{2[s^2+(m-n)^2]}\,.$

21. $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\,.$

25. **(a)** $\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}\,.$ **(b)** $\dfrac{2s^3-6sb^2}{(s^2+b^2)^3}\,.$

29. $\dfrac{1}{s^2+6s+10}\,.$ **33.** $e^{-s}/s^2\,.$

35. $e^{-(\pi/2)s}/(s^2+1)\,.$

Ejercicio 7.4, página 374

1. $e^t t^3$. **3.** $e^{-t}\cos 3t\,.$ **5.** $(1/2)e^{-2t}\operatorname{sen} 2t\,.$
7. $2e^{-2t}\cos 3t + 4e^{-2t}\operatorname{sen} 3t\,.$
9. $(3/2)e^t\cos 2t - 3e^t\operatorname{sen} 2t\,.$

11. $\dfrac{6}{s+5} - \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{4}{s-1}\,.$ **13.** $\dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{2}{s}\,.$

15. $-\dfrac{3}{s+1} + \dfrac{(s-1)+2}{(s-1)^2+4}\,.$

17. $-\dfrac{5}{6s} + \dfrac{11}{10(s-2)} - \dfrac{4}{15(s+3)}\,.$

19. $\dfrac{1}{17}\left[\dfrac{1}{(s-3)} - \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} - \dfrac{4}{(s+1)^2+1}\right].$

21. $(1/3) + e^t + (14/3)e^{6t}\,.$
23. $-e^{-3t} + 2te^{-3t} + 6e^{-t}\,.$
25. $8e^{2t} - e^{-t}\cos 2t + 3e^{-t}\operatorname{sen} 2t\,.$
27. $-(5/3)e^{-t} + (5/12)e^{2t} + (5/4)e^{-2t}\,.$
29. $3e^{-2t} + 7e^t\cos t + 11e^t\operatorname{sen} t\,.$
31. $F_1(s) = F_2(s) = F_3(s) = 1/s^2\,,$
$\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\}(t) = f_3(t) = t\,.$
33. $e^{5t}/t - e^{-2t}/t\,.$ **35.** $2(\cos t - \cos 3t)/t\,.$

39. $\dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s+2}\,,$ donde

$$A = \left.\frac{2s+1}{(s-1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{-1}{2}\,,$$

$$B = \left.\frac{2s+1}{s(s+2)}\right|_{s=1} = 1\,,$$

$$C = \left.\frac{2s+1}{s(s-1)}\right|_{s=-2} = \frac{-1}{2}\,.$$

41. $2e^{-t} - 4e^{3t} + 5e^{2t}\,.$

43. $\dfrac{4}{s+2} + \dfrac{2(s-1)+2(3)}{(s-1)^2+2^2}\,.$

Ejercicio 7.5, página 383

1. $2e^t\cos 2t + e^t\operatorname{sen} 2t\,.$ **3.** $-e^{-3t} + 3te^{-3t}\,.$
5. $t^2 + \cos t - \operatorname{sen} t\,.$ **7.** $\cos t - 4e^{5t} + 8e^{2t}\,.$
9. $3te^t - e^{-6t}\,.$ **11.** $2 - t + e^{2-t} + 2e^{t-2}\,.$
13. $(7/5)\operatorname{sen} t + (11/5)\cos t + (3/5)e^{2t-\pi} - e^{-(t-\pi/2)}\,.$

15. $\dfrac{-s^2+s-1}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}\,.$

17. $\dfrac{s^5+s^4+6}{s^4(s^2+s-1)}\,.$

19. $\dfrac{s^3+5s^2-6s+1}{s(s-1)(s^2+5s-1)}\,.$

21. $\dfrac{s^3+s^2+2s}{(s^2+1)(s-1)^2}\,.$

23. $\dfrac{-s^3+1+3se^{-2s}-e^{-2s}}{s^2(s^2+4)}\,.$

25. $2e^t - \cos t - \operatorname{sen} t\,.$
27. $(t^2-4)e^{-t}\,.$ **29.** $(3a-b)e^t/2 + (b-a)e^{3t}/2\,.$
31. $5/2 + (a-5/2)e^{-t}\cos t + (a+b-5/2)e^{-t}\operatorname{sen} t\,.$
35. $t^2/2$.
37. $\cos t + t\operatorname{sen} t + c(\operatorname{sen} t - t\cos t)$, ($c$ arbitraria) .
39. $e(t) = -a\cos\sqrt{k/I}\,t\,.$
41. $e(t) = \left(-2aI/\sqrt{4Ik-\mu^2}\right)e^{-\mu t/2I}\operatorname{sen}\left(\sqrt{4Ik-\mu^2}\,t/2I\right)\,.$

Ejercicio 7.6, página 395

1. $2e^{-s}/s^3$. **3.** $e^{-2s}(4s^2 + 4s + 2)/s^3$.
5. $(2e^{-s} - e^{-2s} + 2e^{-3s})/s$.
7. $[(e^{-s} - e^{-2s})(s + 1)]/s^2$.
9. $(e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})/s^2$. **11.** $e^{t-2}u(t - 2)$.
13. $e^{-2(t-2)}u(t - 2) - 3e^{-2(t-4)}u(t - 4)$.
15. $e^{-2(t-3)}[\cos(t - 3) - 2\,\mathrm{sen}\,(t - 3)]u(t - 3)$.
17. $(7e^{6-2t} - 6e^{3-t})u(t - 3)$.
19. $10 - 10u(t - 3\pi)[1 + e^{-(t-3\pi)}(\cos t + \mathrm{sen}\; t)]$
$\quad + 10u(t - 4\pi)[1 - e^{-(t-4\pi)}(\cos t + \mathrm{sen}\; t)]$.
21. $\dfrac{1 - 2se^{-2s} - e^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})}$.

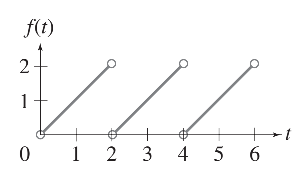


Figura B.45

23. $\dfrac{1}{1 - e^{-2s}}\left[\dfrac{1 - e^{-s-1}}{s + 1} + \dfrac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}\right]$

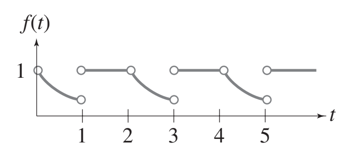


Figura B.46

25. $\dfrac{1}{s(1 + e^{-as})}$. **27.** $\dfrac{1 - e^{-as}}{as^2(1 + e^{-as})}$.

29. $\mathrm{sen}\, t + [1 - \cos(t - 3)]u(t - 3)$.

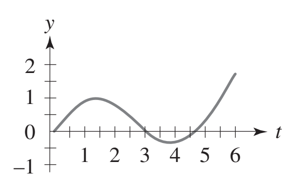


Figura B.47

31. $t + [4 - t + \mathrm{sen}\,(t - 2) - 2\cos(t - 2)]u(t - 2)$.

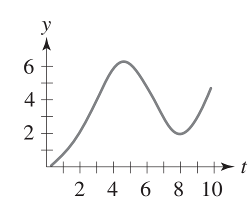


Figura B.48

33. $e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\mathrm{sen}\, t$
$\quad + (1/2)[1 - e^{2\pi-t}(\cos t + \mathrm{sen}\; t)]u(t - 2\pi)$
$\quad - (1/2)[1 - e^{4\pi-t}(\cos t + \mathrm{sen}\; t)]u(t - 4\pi)$.
35. $e^{-t} + e^{-2t} + (1/2)[e^{-3t} - 2e^{-2(t+1)} + e^{-(t+4)}]u(t - 2)$.
37. $\cos 2t + (1/3)[1 - u(t - 2\pi)]\mathrm{sen}\, t$
$\quad + (1/6)[8 + u(t - 2\pi)]\mathrm{sen}\, 2t$.
39. $2e^{-2t} - 2e^{-3t}$
$\quad + [1/36 + (1/6)(t - 1) - (1/4)e^{-2(t-1)}$
$\quad\quad + (2/9)e^{-3(t-1)}]u(t - 1)$
$\quad - [19/36 + (1/6)(t - 5)$
$\quad\quad - (7/4)e^{-2(t-5)} + (11/9)e^{-3(t-5)}]u(t - 5)$.
45. $\dfrac{e^{t-n}}{6} - \dfrac{e^{-t}}{2}\left[\dfrac{e^{n+1} - 1 - e^{n+2} + e^2}{e - 1}\right]$
$\quad + \dfrac{e^{-2t}}{3}\left[\dfrac{e^{2n+2} - 1 - e^{2n+3} + e^3}{e^2 - 1}\right]$,
para $n < t < n + 1$.
47. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{s^n} = \dfrac{1}{s - 1}$.
49. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2ns^{2n}} = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{1}{s^2}\right)$.
51. **(a)** $\sqrt{\pi/s}$. **(b)** $105\sqrt{\pi}/(16s^{9/2})$.
59. $e^t - e^{-t} + (1/2)[e^{t-1} + e^{1-t} - 2]u(t - 1)$
$\quad - (1/2)[e^{t-4} + e^{4-t} - 2]u(t - 4)$.
61. $4 - 2e^{-3t/125} + 2u(t - 10)[1 - e^{-3(t-10)/125}]$.

63. La ecuación diferencial resultante tiene coeficientes variables, de modo que el método de la transformada de Laplace produce una ecuación diferencial para la transformada.

Ejercicio 7.7, página 405

1. $2te^t - e^t + \int_0^t e^{t-v}(t - v)g(v)dv$.
3. $\int_0^t g(v)e^{2v-2t}\mathrm{sen}(t - v)dv + e^{-2t}\cos t + 3e^{-2t}\mathrm{sen}\, t$.
5. $1 - \cos t$. **7.** $2e^{5t} - 2e^{-2t}$. **9.** $(t/2)\,\mathrm{sen}\, t$.
11. $(2/3)e^{-2t} + (1/3)e^t$. **13.** $s^{-2}(s - 3)^{-1}$.
15. $t/4 + (3/8)\mathrm{sen}\, 2t$. **17.** $\cos t$. **19.** 3.
21. $e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) - (1/\sqrt{3})e^{-t/2}\mathrm{sen}(\sqrt{3}t/2)$.
23. $H(s) = (s^2 + 9)^{-1}$; $h(t) = (1/3)\mathrm{sen}\, 3t$;
$y_k(t) = 2\cos 3t - \mathrm{sen}\, 3t$;
$y(t) = (1/3)\int_0^t (\mathrm{sen}\, 3(t - v))g(v)dv + 2\cos 3t - \mathrm{sen}\, 3t$.

25. $H(s) = (s^2 - s - 6)^{-1}$; $h(t) = (e^{3t} - e^{-2t})/5$;
$y_k(t) = 2e^{3t} - e^{-2t}$;
$y(t) = (1/5)\int_0^t [e^{3(t-v)} - e^{-2(t-v)}]g(v)dv + 2e^{3t} - e^{-2t}$.

27. $H(s) = (s^2 - 2s + 5)^{-1}$; $h(t) = (1/2)e^t \text{sen} 2t$;
$y_k(t) = e^t \text{sen } 2t$;
$y(t) = (1/2)\int_0^t e^{(t-v)}(\text{sen } 2(t - v))g(v)dv + e^t \text{sen} 2t$.

29. $(1/30)\int_0^t e^{-2(t-v)}(\text{sen } 6(t - v))e(v)dv - e^{-2t}\cos 6t + e^{-2t}\text{sen } 6t$.

31. $t^2/2$.

Ejercicio 7.8, página 412

1. -1. **3.** -1. **5.** e^{-2}. **7.** $e^{-s} - e^{-3s}$.
9. e^{-s}. **11.** 0. **13.** $-(\text{sen } t)u(t - \pi)$.
15. $e^t + e^{-3t} + (1/4)(e^{t-1} - e^{3-3t})u(t - 1) - (1/4)(e^{t-2} - e^{6-3t})u(t - 2)$.
17. $2(e^{t-2} - e^{-(t-2)})u(t - 2) + 2e^t - t^2 - 2$.
19. $e^{-t} - e^{-5t} + (e/4)(e^{1-t} - e^{5-5t})u(t - 1)$.
21. $\text{sen } t + (\text{sen } t)u(t - 2\pi)$.

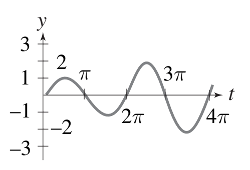


Figura B.49

23. $\text{sen} t + (\text{sen } t)u(t - \pi) + (\text{sen } t)u(t - 2\pi)$

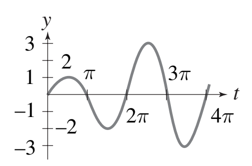


Figura B.50

25. $(1/2)e^{-2t} \text{ sen } 2t$. **27.** $(1/2)e^t \text{ sen } 2t$.
29. La masa permanece detenida en $x(t) \equiv 0$, $t > \pi/2$.
35. $\frac{L}{6EI}[3\lambda x^2 - x^3 + (x - \lambda)^3 u(x - \lambda)]$.

Ejercicio 7.9, página 416

1. $x = e^t$; $y = e^t$. **3.** $z = e^t$; $w \equiv 0$.
5. $x = (7/4)e^t + (7/4)e^{-t} - (3/2)\cos t$;
$y = (7/4)e^t - (7/4)e^{-t} + (1/2)\text{sen} t$.
7. $x = -(150/17)e^{5t/2}\cos(\sqrt{15}t/2) - (334\sqrt{15}/85)e^{5t/2}\text{sen}(\sqrt{15}t/2) - (3/17)e^{-3t}$;
$y = (46/17)e^{5t/2}\cos(\sqrt{15}t/2) - (146\sqrt{15}/85)e^{5t/2}\text{sen}(\sqrt{15}t/2) + (22/17)e^{-3t}$.

9. $x = 4e^{-2t} - e^{-t} - \cos t$; $y = 5e^{-2t} - e^{-t}$.
11. $x = (e^t - e^{-t})/2 - (1/2)[e^{t-2} - e^{-(t-2)}]u(t - 2)$;
$y = 1 - (e^t + e^{-t})/2 - [1 - (e^{t-2} + e^{-(t-2)})/2]u(t - 2)$.
13. $x = e^{-t} - (1/2)[e^{-(t-\pi)} + \cos t - \text{sen } t]u(t - \pi)$;
$y = e^{-t} + [1 - (1/2)e^{-(t-\pi)} + (1/2)\cos t + (1/2)\text{sen} t]u(t - \pi)$.
15. $x = t^2$; $y = t - 1$.
17. $x = (t - 2)e^{t-2}$; $y = e^{t-2}$.
19. $x = -7e^{-t} + e^t$; $y = 2e^{-t}$; $z = -13e^{-t} + e^t$.
21. $x = -e^{-t/2} + e^{-t/6} + [48 - 36e^{-(t-5)/6} - 12e^{-(t-5)/2}]u(t - 5)$;
$y = 2e^{-t/2} + 2e^{-t/6} + [48 - 72e^{-(t-5)/6} + 24e^{-(t-5)/2}]u(t - 5)$.
23. $2I_1 + (0.1)I_3' + (0.2)I_1' = 6$, $(0.1)I_3' - I_2 = 0$,
$I_1 = I_2 + I_3$; $I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$;
$I_1 = -e^{-20t} - 2e^{-5t} + 3$,
$I_2 = -2e^{-20t} + 2e^{-5t}$,
$I_3 = e^{-20t} - 4e^{-5t} + 3$.

Problemas de repaso, página 418

1. $\frac{3}{s} + e^{-2s}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right]$. **3.** $\frac{2}{(s + 9)^3}$.
5. $\frac{1}{s - 2} - \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^3} - \frac{5}{s^2 + 25}$. **7.** $\frac{s^2 - 36}{(s^2 + 36)^2}$.
9. $2e^{-4s}\left[\frac{1}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s}\right]$. **11.** $(7/2)t^2e^{-3t}$.
13. $2e^t + 2e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t}\text{sen } 3t$.
15. $e^{-2t} + e^{-t} - 2te^{-t}$.
17. $[2e^{t-2} + 2e^{4-2t}]u(t - 2)$.
19. $e^{2t} - e^{5t}$.
21. $-(3/2) + t + t^2/2 + (3/2)e^{-t}\cos t - (1/2)e^{-t}\text{sen} t$.
23. $(2/\sqrt{7})e^{-3t/2}\text{sen}(\sqrt{7}t/2) + \{(1/4) - (3/(4\sqrt{7}))e^{-3(t-1)/2}\text{sen}(\sqrt{7}(t - 1)/2) - (1/4)e^{-3(t-1)/2}\cos(\sqrt{7}(t - 1)/2)\}u(t - 1)$.
25. $c[t + te^{-2t} + e^{-2t} - 1]$.
27. $(9/10)e^{-3t} + (1/10)\cos t - (3/10)\text{sen} t$.
29. $(s^2 - 5s + 6)^{-1}$; $e^{3t} - e^{2t}$.
31. $x = 1 - (e^t + e^{-t})/2 - [1 - (e^{t-2} + e^{-(t-2)})/2]u(t - 2)$,
$y = (e^t - e^{-t})/2 - (1/2)[e^{t-2} - e^{-(t-2)}]u(t - 2)$.

CAPÍTULO 8

Ejercicio 8.1, página 430

1. $1 + x + x^2 + \cdots$. **3.** $x + x^2 + (1/2)x^3 + \cdots$.
5. $1 - (1/6)t^3 + (1/180)t^6 + \cdots$.
7. $(1/6)\theta^3 - (1/120)\theta^5 + (1/5040)\theta^7 + \cdots$.

9. **(a)** $p_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$.

(b) $|\varepsilon_3(1.5)| = |f^{(4)}(\xi)(1.5-1)^4/4!| \le 6(0.5)^4/4!$.

(c) $|\ln(1.5) - p_3(1.5)| = 0.011202\ldots$.

(d)

Figura B.51

13. $t + (1/2)t^2 - (1/6)t^3 + \cdots$.

15. $1 - x^2/6$.

Ejercicio 8.2, página 438

1. $[-1, 3)$. **3.** $(-4, 0)$. **5.** $[1, 3]$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1} + 2^{-n-1}\right]x^n$.

11. $x + x^2 + (1/3)x^3 + \cdots$.

13. $1 - 2x + (5/2)x^2 + \cdots$.

15. **(c)** $1 - (1/2)x + (1/4)x^2 - (1/24)x^3 + \cdots$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$. **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.

21. $\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$.

23. $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$.

25. $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k$. **29.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$.

31. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$.

33. $6(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$.

35. **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

Ejercicio 8.3, página 449

1. -1 . **3.** $\pm\sqrt{2}$. **5.** $-1, 2$.

7. $x = n\pi$, n entero .

9. $\theta \le 0$ y $\theta = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

11. $y = a_0(1 - 2x + (3/2)x^2 - x^3/3 + \cdots)$.

13. $a_0(1 + x^4/12 + \cdots) + a_1(x + x^5/20 + \cdots)$.

15. $a_0(1 - x^2/2 - x^3/6 + \cdots)$
$+ a_1(x + x^2/2 - x^3/6 + \cdots)$.

17. $a_0(1 - x^2/2 + \cdots) + a_1(x - x^3/6 + \cdots)$.

19. $a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$.

21. $a_0(1 - 2x^2 + x^4/3)$
$+ a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)(-1)\cdots(2k-5)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$.

23. $a_{3k+2} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$.
$a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)]^2}{(3k)!}x^{3k}\right)$
$+ a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)]^2}{(3k+1)!}x^{3k+1}\right)$.

25. $2 + x^2 - (5/12)x^4 + (11/72)x^6 + \cdots$.

27. $x + (1/6)x^3 - (1/12)x^4 + (7/120)x^5 + \cdots$.

29. $1 - 2x + x^2 - (1/6)x^3$.

31. $1 + 2x - (3/4)x^2 - (5/6)x^3$.

35. $10 - 25t^2 + (250/3)t^3 - (775/4)t^4 + \cdots$.

Ejercicio 8.4, página 456

1. 2. **3.** $\sqrt{3}$. **5.** $\pi/2$.

7. $a_0[1 - (x-1)^2 + (1/2)(x-1)^4$
$- (1/6)(x-1)^6 + \cdots]$.

9. $a_0[1 + (x-1)^2 + \cdots]$
$+ a_1[(x-1) + (1/3)(x-1)^3 + \cdots]$.

11. $a_0[1 - (1/8)(x-2)^2 + (1/32)(x-2)^3 + \cdots]$
$+ a_1[(x-2) + (1/8)(x-2)^2$
$- (7/96)(x-2)^3 + \cdots]$.

13. $1 - (1/2)t^2 + (1/6)t^4 - (31/720)t^6 + \cdots$.

15. $1 + x + (1/24)x^4 + (1/60)x^5 + \cdots$.

17. $1 - (1/6)(x-\pi)^3 + (1/120)(x-\pi)^5$
$+ (1/180)(x-\pi)^6 + \cdots$.

19. $-1 + x + x^2 + (1/2)x^3 + \cdots$.

21. $a_0[1 + (1/2)x^2 + (1/8)x^4 + (1/48)x^6 + \cdots]$
$+ [(1/2)x^2 + (1/12)x^4 + (11/720)x^6 + \cdots]$.

23. $a_0[1 - (1/2)x^2 + \cdots] + a_1[x - (1/3)x^3 + \cdots]$
$+ [(1/2)x^2 + (1/3)x^3 + \cdots]$.

25. $a_0[1 - (1/2)x^2 + \cdots] + a_1[x + \cdots]$
$+ [(1/2)x^2 - (1/6)x^3 + \cdots]$.

27. $a_0[1 - (1/2)x^2 - (1/6)x^3 + \cdots]$
$+ a_1[x + (1/2)x^2 + \cdots] + [(1/6)x^3 + \cdots]$.

---

29. **(a)** $a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-2k+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}\right]$
$+ a_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right]$.

(c) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$.

31. **(a)** $1 - (1/2)t^2 + (\eta/6)t^3 + [(1-\eta^2)/24]t^4 + \cdots$. **(b)** Sí.

Ejercicio 8.5, página 460

1. $c_1x^{-2} + c_2x^{-3}$. **3.** $c_1x\cos(4\ln x) + c_2x\,\text{sen}(4\ln x)$.
5. $c_1x^3\cos(2\ln x) + c_2x^3\text{sen}(2\ln x)$.
7. $c_1x + c_2x^{-1}\cos(3\ln x) + c_3x^{-1}\text{sen}(3\ln x)$.
9. $c_1x + c_2x^{-1/2}\cos\left[\left(\sqrt{19}/2\right)\ln x\right] + c_3x^{-1/2}\text{sen}\left[\left(\sqrt{19}/2\right)\ln x\right]$.
11. $c_1(x-3)^{-2} + c_2(x-3)^{1/2}$.
13. $c_1x + c_2x^2 + (4/15)x^{-1/2}$. **15.** $2t^4 + t^{-3}$.
17. $(31/17)x + (3/17)x^{-2}\cos(5\ln x) - (76/85)x^{-2}\text{sen}(5\ln x)$.

Ejercicio 8.6, página 472

1. ± 1 son regulares. **3.** $\pm i$ son regulares.
5. 1 es regular, -1 es irregular.
7. 2 es regular, -1 es irregular.
9. -4 es regular y 2 es irregular.
11. $r^2 - 3r - 10 = 0$; $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.
13. $r^2 - 5r/9 - 4/3 = 0$; $r_1 = \left(5 + \sqrt{457}\right)/18$, $r_2 = \left(5 - \sqrt{457}\right)/18$.
15. $r^2 - 1 = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.
17. $r^2 + r - 12 = 0$; $r_1 = 3$, $r_2 = -4$.
19. $a_0[x^{2/3} - (1/2)x^{5/3} + (5/28)x^{8/3} - (1/21)x^{11/3} + \cdots]$.
21. $a_0[1 - (1/4)x^2 + (1/64)x^4 - (1/2304)x^6 + \cdots]$.
23. $a_0[x - (1/3)x^2 + (1/12)x^3 - (1/60)x^4 + \cdots]$.
25. $a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+(3/2)}}{2^{n-1}(n+2)!}$. **27.** $a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2^{2n}(n+1)!\,n!}$.
29. a_0x^2 . **31.** $a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = a_0e^x$; sí, $a_0 < 0$.
33. $a_0\left[x^{1/3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-2}(3n+4)x^{n+(1/3)}}{3^n n!}\right]$; sí, $a_0 < 0$.
35. $a_0[x^{5/6} - (1/11)x^{11/6} + (1/374)x^{17/6} - (1/25{,}806)x^{23/6} + \cdots]$.
37. $a_0[x^{4/3} + (1/17)x^{7/3} + (1/782)x^{10/3} + (1/68{,}034)x^{13/3} + \cdots]$.
39. El desarrollo $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ diverge para $x \neq 0$.
41. La ecuación transformada es $zd^2y/dz^2 + 3\,dy/dz - y = 0$. Además, $zp(z) = 3$ y $z^2q(z) = -z$ son analíticas en $z = 0$; por lo tanto, $z = 0$ es un punto singular regular.
$y_1(x) = a_0[1 + (1/3)x^{-1} + (1/24)x^{-2} + (1/360)x^{-3}\,1\cdots]$.
45. $a_0[x^{-3} - (1/2)x^{-1} - (1/8)x - (1/144)x^3 + \cdots] + a_3[1 + (1/10)x^2 + (1/280)x^4 + (1/15{,}120)x^6 + \cdots]$.

Ejercicio 8.7, página 482

1. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = x^{2/3} - (1/2)x^{5/3} + (5/28)x^{8/3} + \cdots$ y
$y_2(x) = x^{1/3} - (1/2)x^{4/3} + (1/5)x^{7/3} + \cdots$.
3. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = 1 - (1/4)x^2 + (1/64)x^4 + \cdots$ y
$y_2(x) = y_1(x)\ln x + (1/4)x^2 - (3/128)x^4 + (11/13{,}824)x^6 + \cdots$.
5. $c_1[x - (1/3)x^2 + (1/12)x^3 + \cdots] + c_2[x^{-1} - 1]$.
7. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = x^{3/2} - (1/6)x^{5/2} + (1/48)x^{7/2} + \cdots$ y
$y_2(x) = x^{-1/2} - (1/2)x^{1/2}$.
9. $c_1w_1 + c_2w_2$, donde
$w_1(x) = x^2 + (1/8)x^4 + (1/192)x^6 + \cdots$ y
$w_2(x) = w_1(x)\ln x + 2 - (3/32)x^4 - (7/1152)x^6 + \cdots$.
11. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde $y_1(x) = x^2$ y
$y_2(x) = x^2\ln x - 1 + 2x - (1/3)x^3 + (1/24)x^4 + \cdots$.
13. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = 1 + x + (1/2)x^2 + \cdots$ y
$y_2(x) = y_1(x)\ln x - [x + (3/4)x^2 + (11/36)x^3 + \cdots]$.
15. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = x^{1/3} + (7/6)x^{4/3} + (5/9)x^{7/3} + \cdots$ y
$y_2(x) = 1 + 2x + (6/5)x^2 + \cdots$; todas las soluciones están acotadas cerca del origen.
17. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$, donde
$y_1(x) = x^{5/6} - (1/11)x^{11/6} + (1/374)x^{17/6} + \cdots$,
$y_2(x) = 1 - x + (1/14)x^2 + \cdots$, y
$y_3(x) = y_2(x)\ln x + 7x - (117/196)x^2 + (4997/298116)x^3 + \cdots$.
19. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$, donde
$y_1(x) = x^{4/3} + (1/17)x^{7/3} + (1/782)x^{10/3} + \cdots$,
$y_2(x) = 1 - (1/3)x - (1/30)x^2 + \cdots$, y
$y_3(x) = x^{-1/2} - (1/5)x^{1/2} - (1/10)x^{3/2} + \cdots$.
21. **(b)** $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, donde
$y_1(t) = 1 - (1/6)(\alpha t)^2 + (1/120)(\alpha t)^4 + \cdots$,
y
$y_2(t) = t^{-1}[1 - (1/2)(\alpha t)^2 + (1/24)(\alpha t)^4 + \cdots]$.
(c) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = 1 - (1/6)(\alpha/x)^2 + (1/120)(\alpha/x)^4 + \cdots$,
y
$y_2(x) = x[1 - (1/2)(\alpha/x)^2 + (1/24)(\alpha/x)^4 + \cdots]$.

23. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = 1 + 2x + 2x^2$ y
$y_2(x) = -(1/6)x^{-1} - (1/24)x^{-2} - (1/120)x^{-3} + \cdots$.

25. Para $n = 0$,
$c_1 + c_2[\ln x + x + (1/4)x^2 + (1/18)x^3 + \cdots]$
y para $n = 1$,
$c_1(1 - x) + c_2[(1 - x)\ln x + 3x - (1/4)x^2 - (1/36)x^3 + \cdots]$.

Ejercicio 8.8, página 493

1. $c_1F\left(1, 2; \frac{1}{2}; x\right) + c_2x^{1/2}F\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{3}{2}; x\right)$.

3. $c_1F\left(1, 1; \frac{1}{2}; x\right) + c_2x^{1/2}F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; x\right)$.

5. $F(1, 1; 2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}x^n = -x^{-1}\ln(1 - x)$.

7.
$$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)_n x^{2n}/(3/2)_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/(2n + 1) = \frac{1}{2}x^{-1}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) .$$

9. $(1 - x)^{-1}$, $(1 - x)^{-1}\ln x$.

13. $c_1J_{1/2}(x) + c_2J_{-1/2}(x)$. **15.** $c_1J_1(x) + c_2Y_1(x)$.

17. $c_1J_{2/3}(x) + c_2J_{-2/3}(x)$.

19. $J_1(x)\ln x - x^{-1} + (3/64)x^3 - (7/2304)x^5 + \cdots$.

21. $x^{3/2}J_{3/2}(x)$.

27. $J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]x^{2n}$.

29. 1, x, $(3x^2 - 1)/2$,
$(5x^3 - 3x)/2$, $(35x^4 - 30x^2 + 3)/8$.

37. 1, $2x$, $4x^2 - 2$, $8x^3 - 12x$.

39. 1, $1 - x$, $(2 - 4x + x^2)/2$,
$(6 - 18x + 9x^2 - x^3)/6$.

41. **(b)** $z = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x$, de modo que para x grande,
$y(x) \approx c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x$.

Problemas de repaso, página 497

1. **(a)** $1 - x + (3/2)x^2 - (5/3)x^3 + \cdots$.
(b) $-1 + x - (1/6)x^3 + (1/6)x^4 + \cdots$.

3. **(a)** $a_0[1 + x^2 + \cdots] + a_1[x + (1/3)x^3 + \cdots]$.
(b) $a_0[1 + (1/2)x^2 - (1/6)x^3 + \cdots] + a_1[x - (1/2)x^2 + (1/2)x^3 + \cdots]$.

5. $a_0[1 + (1/2)(x - 2)^2 - (1/24)(x - 2)^4 + \cdots] + a_1(x - 2)$.

7. **(a)** $a_0[x^3 + x^4 + (1/4)x^5 + (1/36)x^6 + \cdots]$.
(b) $a_0[x - (1/4)x^2 + (1/20)x^3 - (1/120)x^4 + \cdots]$.

9. **(a)** $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = x + x^2 + (1/2)x^3 + \cdots = xe^x$ y
$y_2(x) = y_1(x)\ln x - x^2 - (3/4)x^3 - (11/36)x^4 + \cdots$.
(b) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = 1 + 2x + x^2 + \cdots$ y
$y_2(x) = y_1(x)\ln x - [4x + 3x^2 + (22/27)x^3 + \cdots]$.
(c) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = 1 - (1/6)x + (1/96)x^2 + \cdots$ y
$y_2(x) = y_1(x)\ln x - 8x^{-2} - 4x^{-1} + (29/36) + \cdots$.
(d) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, donde
$y_1(x) = x^2 - (1/4)x^3 + (1/40)x^4 + \cdots$ y
$y_2(x) = x^{-1} + (1/2) + (1/4)x + \cdots$.

CAPÍTULO 9

Ejercicio 9.1, página 507

1. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & e^t \\ \cos t & a + bt^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $x_1 = y$, $x_2 = y'$.

11. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$;
$x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = y$, $x_4 = y'$.

13. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos t & 3 & -t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e^t & t & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$;
$x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = y$, $x_4 = y'$, $x_5 = y''$.

Ejercicio 9.2, página 512

1. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.
3. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.
5. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.
7. $x_1 = 3s$, $x_2 = s$, $-\infty < s < \infty$.
9. $x_1 = 2s$, $x_2 = (-1 + i)s$, donde s es cualquier. número complejo
11. $x_1 = -(s + 1)/2$, $x_2 = -(11s + 1)/2$, $x_3 = s$, $-\infty < s < \infty$.
13. Para $r = 2$, la única solución es $x_1 = x_2 = 0$. Para $r = 1$, las soluciones son $x_1 = 3s, x_2 = s$, $-\infty < s < \infty$.

Ejercicio 9.3, página 521

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}$.

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 5 & 19 \end{bmatrix}$.

5. **(a)** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$.

7. **(c)** Sí. **(d)** Sí.

9. $\begin{bmatrix} 4/9 & -1/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$. **11.** No existe.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} (4/3)e^{-t} & -(1/3)e^{-t} \\ -(1/3)e^{-4t} & (1/3)e^{-4t} \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} e^{-t} & (1/2)e^{-t} & -(1/2)e^{-t} \\ (1/3)e^{t} & -(1/2)e^{t} & (1/6)e^{t} \\ -(1/3)e^{-2t} & 0 & (1/3)e^{-2t} \end{bmatrix}$.

21. 11. **23.** -12. **25.** 25. **27.** 2, 3.

29. 0, 1, 1. **31.** $\begin{bmatrix} 3e^{3t} \\ 6e^{3t} \\ -3e^{3t} \end{bmatrix}$. **33.** $\begin{bmatrix} 5e^{5t} & 6e^{2t} \\ -10e^{5t} & -2e^{2t} \end{bmatrix}$.

39. **(a)** $\begin{bmatrix} (1/2)t^2 + c_1 & e^t + c_2 \\ t + c_3 & e^t + c_4 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} 1 & -1 + \cos 1 \\ 1 - \cos 1 & \operatorname{sen} 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} (1 + e^t)\cos t + (e^t - t)\operatorname{sen} t & (e^t - t)\cos t - (e^t + 1)\operatorname{sen} t \\ (e^t - 1)\operatorname{sen} t + e^t\cos t & (e^t - 1)\cos t - e^t\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.4, página 530

1. $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & e^t \\ t & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 5 \\ -e^t \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$;
$x_1 = y$, $x_2 = y'$.

7. $\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t^2 \end{bmatrix}$;
$x_1 = w$, $x_2 = w'$, $x_3 = w''$, $x_4 = w'''$.

9. $x_1'(t) = 5x_1(t) + 2e^{-2t}$;
$x_2'(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) - 3e^{-2t}$.

11. $x_1'(t) = x_1(t) + x_3(t) + e^t$;
$x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) + t$;
$x_3'(t) = 5x_2(t) + x_3(t)$.

13. LI. **15.** LI. **17.** LI.

19. No es un conjunto fundamental de soluciones.

21. Sí; $\begin{bmatrix} e^{-t} & e^t & e^{3t} \\ 2e^{-t} & 0 & -e^{3t} \\ e^{-t} & e^t & 2e^{3t} \end{bmatrix}$;

$c_1 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$.

23. $\frac{3}{2}\begin{bmatrix} te^t \\ te^t \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^t \\ 3e^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$
$+ c_2\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}$.

27. $\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & (1/4)e^t & -(1/4)e^t \\ -(1/5)e^{2t} & (4/5)e^{2t} & -(2/5)e^{2t} \\ (1/5)e^{-3t} & (9/20)e^{-3t} & (3/20)e^{-3t} \end{bmatrix}$;

$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -(3/2)e^{-t} + (3/5)e^{-2t} - (1/10)e^{3t} \\ (1/4)e^{-t} - (1/5)e^{-2t} - (1/20)e^{3t} \\ (5/4)e^{-t} - (1/5)e^{-2t} - (1/20)e^{3t} \end{bmatrix}$.

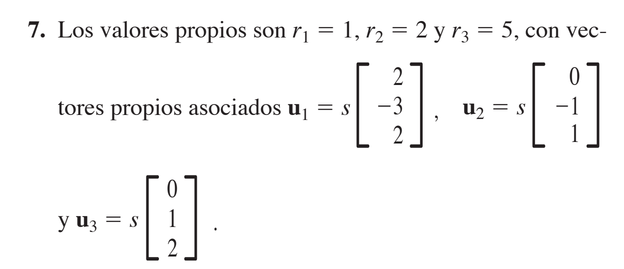
35. **(b)** $2e^{6t}$. **(c)** $2e^{6t}$; igual.

Ejercicio 9.5, página 541

1. Los valores propios son $r_1 = 0$ y $r_2 = -5$, con vectores propios asociados $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2s \\ -s \end{bmatrix}$.

3. Los valores propios son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$, con vectores propios asociados $\mathbf{u}_1 = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

5. Los valores propios son $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ y $r_3 = -2$, con vectores propios asociados $\mathbf{u}_1 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.



7. Los valores propios son $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ y $r_3 = 5$, con vectores propios asociados $\mathbf{u}_1 = s\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

9. Los valores propios son $r_1 = i$ y $r_2 = -i$, con vectores propios asociados $\mathbf{u}_1 = s\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = s\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. $c_1 e^{3t/2}\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} + c_2 e^{t/2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

13. $c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. $c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

17. (b)

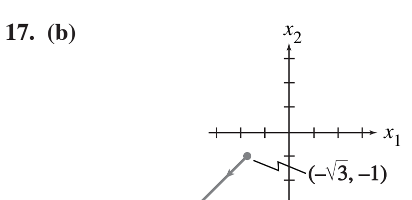


Figura B.52

(c)

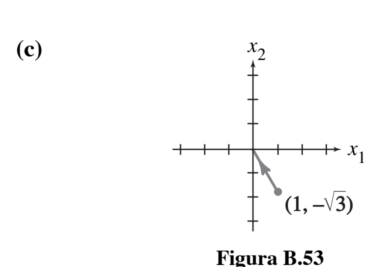


Figura B.53

(d)

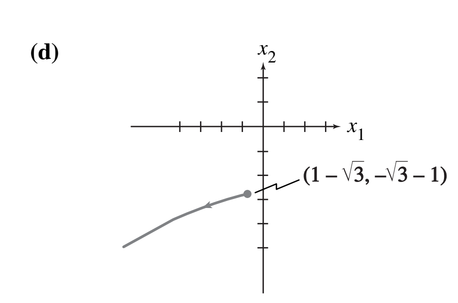


Figura B.54

19. $\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ 4e^{3t} & -2e^{-3t} \end{bmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} & e^{4t} \\ e^{t} & 2e^{2t} & 4e^{4t} \\ e^{t} & 4e^{2t} & 16e^{4t} \end{bmatrix}$.

23. $\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} & e^{3t} & -e^{7t} \\ 0 & -3e^{-t} & 0 & e^{7t} \\ 0 & 0 & e^{3t} & 2e^{7t} \\ 0 & 0 & 0 & 8e^{7t} \end{bmatrix}$.

25. $x = -c_1 e^{t} - 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t}$,
$y = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$,
$z = 2c_1 e^{t} + 4c_2 e^{2t} + 4c_3 e^{3t}$,

27. $\begin{bmatrix} e^{-0.3473t} & e^{0.5237t} & 0.0286e^{-7.0764t} \\ -0.3157e^{-0.3473t} & 0.4761e^{0.5237t} & -0.1837e^{-7.0764t} \\ 0.0844e^{-0.3473t} & 0.1918e^{0.5237t} & e^{-7.0764t} \end{bmatrix}$.

29. $\begin{bmatrix} 0.0251e^{3.4142t} & -0.2361e^{-1.6180t} & e^{0.6180t} & e^{0.5858t} \\ 0.0858e^{3.4142t} & 0.3820e^{-1.6180t} & 0.6180e^{0.6180t} & 0.5858e^{0.5858t} \\ 0.2929e^{3.4142t} & -0.6180e^{-1.6180t} & 0.3820e^{0.6180t} & 0.3431e^{0.5858t} \\ e^{3.4142t} & e^{-1.6180t} & 0.2361e^{0.6180t} & 0.2010e^{0.5858t} \end{bmatrix}$.

31. $\begin{bmatrix} 2e^{4t} + e^{-2t} \\ 2e^{4t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$. **33.** $\begin{bmatrix} -3e^{-t} + e^{5t} \\ -2e^{-t} - e^{5t} \\ e^{-t} + e^{5t} \end{bmatrix}$.

35. **(b)** $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{x}_2(t) = te^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

37. **(b)** $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{x}_2(t) = te^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathbf{x}_3(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$.

39. **(b)** $\mathbf{x}_1(t) = e^{t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_2(t) = e^{t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{x}_3(t) = te^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(d)** $\mathbf{0}$.

43. $c_1\begin{bmatrix} 3t^2 \\ t^2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} t^4 \\ t^4 \end{bmatrix}$.

45. $x_1(t) = (25/2)(e^{-3t/25} + e^{-t/25})$,

$x_2(t) = (25)(e^{-t/25} - e^{-3t/25})$.

47. **(a)** $r_1 = 2.39091$, $r_2 = -2.94338$, $r_3 = 3.55247$.

(b) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.64178 \\ -9.31625 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.16825 \\ 0.43862 \end{bmatrix}$;

$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.81004 \\ -0.12236 \end{bmatrix}$.

(c) $c_1e^{r_1t}\mathbf{u}_1 + c_2e^{r_2t}\mathbf{u}_2 + c_3e^{r_3t}\mathbf{u}_3$, donde los r_i y los $\mathbf{u}_i$ están dados en las partes (a) y (b).

Ejercicio 9.6, página 549

1. $c_1\begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t - \cos 2t \end{bmatrix}$.

3. $c_1e^t\cos t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - c_1e^t\operatorname{sen} t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^t\operatorname{sen} t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^t\cos t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Nota: Se obtiene una respuesta equivalente si $\operatorname{col}(-1, 1, 0)$ y $\operatorname{col}(-2, 0, 1)$ se reemplazan por $\operatorname{col}(-5, 1, 2)$ y $\operatorname{col}(0, -2, 1)$, respectivamente.

5. $\begin{bmatrix} e^{-t}\cos 4t & e^{-t}\operatorname{sen} 4t \\ 2e^{-t}\operatorname{sen} 4t & -2e^{-t}\cos 4t \end{bmatrix}$. **7.** $\begin{bmatrix} 1 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\cos t & -\operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t) - \cos(\sqrt{3}t) & -\operatorname{sen}(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ -1 & \sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t) + \cos(\sqrt{3}t) & \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ 1 & 2\cos(\sqrt{3}t) & 2\operatorname{sen}(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} e^t\operatorname{sen} t - e^t\cos t & -e^t\operatorname{sen} t - e^t\cos t & -\cos t & -\operatorname{sen} t \\ 2e^t\operatorname{sen} t & -2e^t\cos t & \operatorname{sen} t & -\cos t \\ 2e^t\operatorname{sen} t + 2e^t\cos t & 2e^t\operatorname{sen} t - 2e^t\cos t & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 4e^t\cos t & 4e^t\operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$.

13. **(a)** $\begin{bmatrix} e^{-2t}(\operatorname{sen} t - \cos t) \\ -2e^{-2t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} -e^{-2(t-\pi)}\cos t \\ e^{-2(t-\pi)}(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix} e^{-2(t+2\pi)}(2\cos t - 3\operatorname{sen} t) \\ e^{-2(t+2\pi)}(\cos t + 5\operatorname{sen} t) \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} e^{\pi-2t}\cos t \\ e^{\pi-2t}(\operatorname{sen} t - \cos t) \end{bmatrix}$.

17. $c_1\begin{bmatrix} t^{-1} \\ 0 \\ -2t^{-1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} t^{-1}\cos(\ln t) \\ t^{-1}\operatorname{sen}(\ln t) \\ -t^{-1}\cos(\ln t) \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} t^{-1}\operatorname{sen}(\ln t) \\ -t^{-1}\cos(\ln t) \\ -t^{-1}\operatorname{sen}(\ln t) \end{bmatrix}$.

19. $\dfrac{\sqrt{9-\sqrt{17}}}{2\sqrt{2}\pi} \approx 0.249$; $\dfrac{\sqrt{9+\sqrt{17}}}{2\sqrt{2}\pi} \approx 0.408$.

21. $I_1 = (5/6)e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$,
$I_2 = -(10/13)e^{-2t}\cos 3t + (25/78)e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$,
$I_3 = (10/13)e^{-2t}\cos 3t + (20/39)e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$.

Ejercicio 9.7, página 555

1. $c_1e^{7t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. $c_1e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5. $\mathbf{x}_p = e^{-2t}[\mathbf{a} + t\mathbf{b}]$.

7. $\mathbf{x}_p = t\mathbf{a} + \mathbf{b} + \operatorname{sen} 3t\,\mathbf{c} + \cos 3t\,\mathbf{d}$.

9. $\mathbf{x}_p = e^{2t}\mathbf{a} + e^{3t}\mathbf{b}$.

11. $c_1\begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

13. $c_1e^t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5te^t + (3/4)e^t \\ -5te^t + (9/4)e^t \end{bmatrix}$.

15. $c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{-5t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ln|t| + (8/5)t - 8/25 \\ 2\ln|t| + (16/5)t + 4/25 \end{bmatrix}$.

17. $c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + 1 \\ -c_1\operatorname{sen} t + c_2\cos t - t \\ c_3e^t + c_4e^{-t} - (1/4)e^{-t} - t + (1/2)te^{-t} \\ c_3e^t - c_4e^{-t} - (1/4)e^{-t} - 1 - (1/2)te^{-t} \end{bmatrix}$.

21. **(a)** $\begin{bmatrix} 4te^t + 5e^t \\ 2te^t + 4e^t \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} -2e^{t-1} + 2e^{2(t-1)} - 3e^{2t-1} + (4t-1)e^t \\ -e^{t-1} + 2e^{2(t-1)} - 3e^{2t-1} + (2t+1)e^t \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} (-20 + 2e^{-5})e^t + (-3e^{-5} - e^{-10})e^{2t} + (4t+3)e^t \\ (-10 + e^{-5})e^t + (-3e^{-5} - e^{-10})e^{2t} + (2t+3)e^t \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} -18e^{t+1} + 14e^{2t+2} - 3e^{2t+1} + (4t+7)e^t \\ -9e^{t+1} + 14e^{2t+2} - 3e^{2t+1} + (2t+5)e^t \end{bmatrix}$.

23. $x = (c_1 + c_2t)e^t + c_3e^{-t} - t^2 - 4t - 6$;
$y = -c_2e^t - 2c_3e^{-t} - t^2 - 2t - 3$.

25. **(a)** $\left\{\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}\right\}$. **(c)** $te^t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) $c_1e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + te^t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

27. $c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$+ te^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

29. $c_1t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2t^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
$+ \begin{bmatrix} -(3/4)t^{-1} - (1/2)t^{-1}\ln t + 1 \\ -(3/4)t^{-1} - (3/2)t^{-1}\ln t + 2 \end{bmatrix}$.

33. $I_1 = I_2 + 3I_5$, $I_3 = 3I_5$, $I_4 = 2I_5$, donde
$I_2 = \left(1/\left(20\sqrt{817}\right)\right)\left[\left(13 - \sqrt{817}\right)e^{-(31+\sqrt{817})5t/2}\right.$
$\left. - \left(13 + \sqrt{817}\right)e^{(-31+\sqrt{817})5t/2}\right] + 1/10$,
$I_5 = \left(3/\left(40\sqrt{817}\right)\right)\left[\left(31 - \sqrt{817}\right)e^{-(31+\sqrt{817})5t/2}\right.$
$\left. - \left(31 + \sqrt{817}\right)e^{(-31+\sqrt{817})5t/2}\right] + 3/20$.

35. $x_1 = \left(2050 - (5845/4)e^{-3t/50} - (2355/4)e^{-7t/50}\right)/21$,
$x_2 = \left(1850 - (5845/2)e^{-3t/50} + (2355/2)e^{-7t/50}\right)/21$.
El tanque A tendrá la mayor concentración. La concentración límite en el tanque A es 41/21 kg/litro y en el tanque B es 37/21 kg/litro.

Ejercicio 9.8, página 566

1. **(a)** $r = 3$; $k = 2$. **(b)** $e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. **(a)** $r = -1$; $k = 3$. **(b)** $e^{-t}\begin{bmatrix} 1 + 3t - (3/2)t^2 & t & -t + (1/2)t^2 \\ -3t & 1 & t \\ 9t - (9/2)t^2 & 3t & 1 - 3t + (3/2)t^2 \end{bmatrix}$.

5. **(a)** $r = -2$; $k = 2$. **(b)** $e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4t & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **7.** $\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$.

9. $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + \cos t - \operatorname{sen} t & 2\operatorname{sen} t & e^t - \cos t - \operatorname{sen} t \\ e^t - \operatorname{sen} t - \cos t & 2\cos t & e^t + \operatorname{sen} t - \cos t \\ e^t - \cos t + \operatorname{sen} t & -2\operatorname{sen} t & e^t + \cos t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$.

11. $\dfrac{1}{25}\begin{bmatrix} -4 + 29e^{5t} - 20te^{5t} & 20 - 20e^{5t} & -8 + 8e^{5t} - 40te^{5t} \\ -5 + 5e^{5t} & 25 & -10 + 10e^{5t} \\ 2 - 2e^{5t} + 10te^{5t} & -10 + 10e^{5t} & 4 + 21e^{5t} + 20te^{5t} \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} (1 - t + t^2/2)e^t & (t - t^2)e^t & (t^2/2)e^t & 0 & 0 \\ (t^2/2)e^t & (1 - t + t^2)e^t & (t + t^2/2)e^t & 0 & 0 \\ (t + t^2/2)e^t & (-3t - t^2)e^t & (1 + 2t + t^2/2)e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} (1 + t + t^2/2)e^{-t} & (t + t^2)e^{-t} & (t^2/2)e^{-t} & 0 & 0 \\ (-t^2/2)e^{-t} & (1 + t - t^2)e^{-t} & (t - t^2/2)e^{-t} & 0 & 0 \\ (-t + t^2/2)e^{-t} & (-3t + t^2)e^{-t} & (1 - 2t + t^2/2)e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + 2t)e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & -4te^{-2t} & (1 - 2t)e^{-2t} \end{bmatrix}$.

17. $c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} -t \\ -1 + t \\ 2 - t \end{bmatrix} + c_3e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. **19.** $c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3e^t\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4e^t\begin{bmatrix} 2t \\ t + t^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 4te^{-2t} + e^{-2t} \\ te^{-2t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$. **23.** $e^{-t}\begin{bmatrix} 3t \\ 3 \\ 9t \end{bmatrix} + e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 2 - e^t(t^2 - 2t + 2) \\ 1 + e^t(t - 1) \\ 6 - 3e^t(t^2 - 2t + 2) \end{bmatrix}$, donde $e^{\mathbf{A}t}$ es la matriz de la respuesta al problema 3.

Problemas de repaso, página 570

1. $c_1e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{4t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. **3.** $c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -2e^{3t} \end{bmatrix}$.

7. $c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ -14/3 \end{bmatrix}$. **9.** $c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 3t \end{bmatrix} + c_3e^{-t}\begin{bmatrix} -t + (1/2)t^2 \\ t \\ 1 - 3t + (3/2)t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 + t \\ 7 - 3t \\ 10 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 3e^t - 2e^{2t} \\ 3e^t - 4e^{2t} \end{bmatrix}$. **13.** $c_1 t^{-1}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 t^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 t^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. $$\begin{bmatrix} (1/2)e^t + (2/3)e^{5t} - (1/6)e^{-t} & -e^t + (2/3)e^{5t} + (1/3)e^{-t} & -(1/2)e^t + (2/3)e^{5t} - (1/6)e^{-t} \\ (1/3)e^{5t} - (1/3)e^{-t} & (1/3)e^{5t} + (2/3)e^{-t} & (1/3)e^{5t} - (1/3)e^{-t} \\ -(1/2)e^t + (1/2)e^{-t} & e^t - e^{-t} & (1/2)e^t + (1/2)^{-t} \end{bmatrix} .$$

CAPÍTULO 10

Ejercicio 10.2, página 587

1. $y = [4/(e - e^{-1})][(e^{-x} - e^x)$. **3.** $y \equiv 0$.
5. $y = e^x + 2x - 1$. **7.** $y = \cos x + c \operatorname{sen} x$; c arbitraria.
9. $l_n = (2n - 1)^2/4$ y $y_n = c_n \operatorname{sen}[(2n - 1)x/2]$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ y las c_n son arbitrarias.
11. $l_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $y_0 = a_0$ y $y_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde a_0, a_n y b_n son arbitrarias.
13. Los valores propios son las raíces de $\tan(\sqrt{\lambda_n}\ \pi) + \sqrt{\lambda_n} = 0$, donde $l_n > 0$. Para n grande, $\lambda_n \approx (2n - 1)^2/4$, con n un entero positivo. Las funciones propias son $y_n = c_n[\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\ x) + \sqrt{\lambda_n}\ \cos(\sqrt{\lambda_n}\ x)]$, donde las c_n son arbitrarias.
15. $u(x, t) = e^{-3t}\operatorname{sen} x - 6e^{-48t}\operatorname{sen} 4x$.
17. $u(x, t) = e^{-3t}\operatorname{sen} x - 7e^{-27t}\operatorname{sen} 3x + e^{-75t}\operatorname{sen} 5x$.
19. $u(x, t) = 3 \cos 6t \operatorname{sen} 2x + 12 \cos 39t \operatorname{sen} 13x$.
21. $u(x, t) = 6 \cos 6t \operatorname{sen} 2x + 2 \cos 18t \operatorname{sen} 6x + (11/27)\operatorname{sen} 27t \operatorname{sen} 9x - (14/45)\operatorname{sen} 45t \operatorname{sen} 15x$.
23. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} e^{-2\pi^2 n^2 t}\operatorname{sen} n\pi x$.
25. Si $K > 0$, entonces $T(t)$ se vuelve no acotada cuando $t \to \infty$, de modo que la temperatura $u(x,t) = X(x)T(t)$ se vuelve no acotada en cada posición x. Como la temperatura debe permanecer acotada para todo tiempo, $K \not> 0$.
33. **(a)** $u(x) \equiv 50$. **(b)** $u(x) = 30\,x/L + 10$.

Ejercicio 10.3, página 603

1. Impar. **3.** Par. **5.** Ninguna de las dos.

9. $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$.

11. $$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(-1 + (-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{\pi n}\left((-1)^{n+1} - 1\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right] .$$

13. $f(x) \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$.

15. $$f(x) \sim [(\operatorname{senh}\pi)/\pi]\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1 + n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}n}{1 + n^2}\operatorname{sen} nx\right]\right) .$$

17. La función $g(x)$ con periodo 2π, donde
$$g(x) = \begin{cases} x\ , & -\pi < x < \pi\ , \\ 0\ , & x = \pm\pi\ . \end{cases}$$

19. La función $g(x)$ con periodo 4, donde
$$g(x) = \begin{cases} 1\ , & -2 < x < 0\ , \\ x\ , & 0 < x < 2\ , \\ 1/2\ , & x = 0\ , \\ 3/2\ , & x = \pm 2\ . \end{cases}$$

21. La función $g(x)$ con periodo 2, donde
$g(x) = x^2\ ,\quad -1 \le x \le 1$.

23. La función $g(x)$ con periodo 2π, donde
$$g(x) = \begin{cases} e^x\ , & -\pi < x < \pi\ , \\ (e^{\pi} + e^{-\pi})/2\ , & x = \pm\pi\ . \end{cases}$$

25. **(a)** $F(x) = (x^2 - \pi^2)/2$. **(b)** $F(x) = |x| - \pi$.

27. $$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n - 1)\pi}\left[(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right)\right] .$$

29. $a_0 = 0$; $a_1 = 3/2$; $a_2 = 0$.

Ejercicio 10.4, página 611

1. (a) La función $\tilde{f}(x)$ con periodo π, donde

$$\tilde{f}(x) = x^2 \ , \ 0 < x < \pi \ .$$

(b) La función $f_o(x)$ con periodo 2π, donde

$$f_o(x) = \begin{cases} x^2 \ , & 0 < x < \pi \ , \\ -x^2 \ , & -\pi < x < 0 \ . \end{cases}$$

(c) La función $f_e(x)$ con periodo 2π, donde

$$f_e(x) = \begin{cases} x^2 \ , & 0 < x < \pi \ , \\ x^2 \ , & -\pi < x < 0 \ . \end{cases}$$

3. (a) La función $\tilde{f}(x)$ con periodo π, donde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < x < \pi/2 \ , \\ 1 \ , & \pi/2 < x < \pi \ . \end{cases}$$

(b) La función $f_o(x)$ con periodo 2π, donde

$$f_o(x) = \begin{cases} -1 \ , & -\pi < x < -\pi/2 \ , \\ 0 \ , & -\pi/2 < x < 0 \ , \\ 0 \ , & 0 < x < \pi/2 \ , \\ 1 \ , & \pi/2 < x < \pi \ . \end{cases}$$

(c) La función $f_e(x)$ con periodo 2π, donde

$$f_e(x) = \begin{cases} 1 \ , & -\pi < x < -\pi/2 \ , \\ 0 \ , & -\pi/2 < x < 0 \ , \\ 0 \ , & 0 < x < \pi/2 \ , \\ 1 \ , & \pi/2 < x < \pi \ . \end{cases}$$

5. $f(x) \sim -\dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}(2k-1)\pi x \ .$

7. $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right) \right] \operatorname{sen} nx \ .$

9. $f(x) \sim \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3} \operatorname{sen}(2k+1)\pi x \ .$

11. $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \ .$

13. $f(x) \sim e - 1 + 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e - 1}{1 + \pi^2 n^2} \cos n\pi x \ .$

15. $f(x) \sim \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) \cos 2kx \ .$

17. $u(x, t) =$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-3} \right] e^{-5(2k-1)^2 t} \operatorname{sen}(2k-1)x \ .$$

19. $u(x, t) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} e^{-5(2k+1)^2 t} \operatorname{sen}(2k+1)x \ .$

Ejercicio 10.5, página 624

1. $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1} - 4}{\pi^3 n^3} e^{-5\pi^2 n^2 t} \operatorname{sen} n\pi x \ .$

3. $u(x, t) = \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} e^{-3(2k+1)^2 t} \cos(2k+1)x \ .$

5. $u(x, t) = \dfrac{2(e^{\pi} - 1)}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{\pi}(-1)^n - 2}{\pi(1 + n^2)} e^{-n^2 t} \cos nx \ .$

7.
$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & 5 + \frac{5}{\pi}x - \frac{30}{\pi} e^{-2t} \operatorname{sen} x + \frac{5}{\pi} e^{-8t} \operatorname{sen} 2x \\ & + \left(1 - \frac{10}{\pi}\right) e^{-18t} \operatorname{sen} 3x \\ & + \frac{5}{2\pi} e^{-32t} \operatorname{sen} 4x - \left(1 + \frac{6}{\pi}\right) e^{-50t} \operatorname{sen} 5x \\ & + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{10}{\pi n} \left[2(-1)^n - 1\right] e^{-2n^2 t} \operatorname{sen} nx \ . \end{aligned}$$

9. $u(x, t) = \dfrac{e^{-\pi} - 1}{\pi} x - e^{-x} + 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \ ,$

donde

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2e^{-\pi} - 2}{\pi n}(-1)^n + \dfrac{2n}{\pi(1 + n^2)}\left((-1)^{n+1} e^{-\pi} + 1\right) \\ \qquad + \dfrac{2}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] \ , & n \neq 2 \ , \\ \dfrac{e^{-\pi} - 1}{\pi} + \dfrac{4}{5\pi}(1 - e^{-\pi}) + 1 \ , & n = 2 \ . \end{cases}$$

11. $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-4(n+1/2)^2 t} \cos(n + 1/2)x$, donde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n + 1/2)x \ .$$

13.
$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & \frac{\pi^2}{3}x - \frac{1}{3}x^3 - 3e^{-2t} \operatorname{sen} x \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3} e^{-2n^2 t} \operatorname{sen} nx \ . \end{aligned}$$

15. $u(x, y, t) = e^{-52t} \cos 6x \operatorname{sen} 4y - 3e^{-122t} \cos x \operatorname{sen} 11y \ .$

17. $u(x, y, t) = 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} ny \ .$

19. $C(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-[L + kn^2\pi^2/a^2]t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \ ,$

donde

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \ .$$

La concentración tiende a cero cuando $t \to +\infty$.

Ejercicio 10.6, página 636

1. $u(x,t) = \dfrac{1}{7\pi}\operatorname{sen}7\pi t\operatorname{sen}7\pi x + \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{8}{\left((2k+1)\pi\right)^3}\cos(2k+1)\pi t\operatorname{sen}(2k+1)\pi x$.

3. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^3}\left[2(-1)^{n+1} - 1\right]\cos 2nt\operatorname{sen}nx$.

5. $u(x,t) = \dfrac{2h_0L^2}{\pi^2 a(L-a)}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi a}{L}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi\alpha t}{L}$.

7. $u(x,t) = \cos t\operatorname{sen}x + \dfrac{5}{2}\operatorname{sen}2t\operatorname{sen}2x - \dfrac{3}{5}\operatorname{sen}5t\operatorname{sen}5x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left[t - \dfrac{\operatorname{sen}nt}{n}\right]\operatorname{sen}nx$.

9. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{(2n+1)\pi\alpha t}{2L} + b_n\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi\alpha t}{2L}\right)\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2L}$, donde

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2L}$ y

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}b_n\dfrac{(2n+1)\pi\alpha}{2L}\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2L}$.

11. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nT_n(t)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}$, donde

$a_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}dx$,

y

$T_n(t) = e^{-t/2}\left(\cos\beta_n t + \dfrac{1}{2\beta_n}\operatorname{sen}\beta_n t\right)$,

donde

$\beta_n = \dfrac{1}{2L}\sqrt{3L^2 + 4\alpha^2\pi^2 n^2}$.

13. $u(x,t) = \dfrac{1}{2\alpha}\left[\operatorname{sen}(x+\alpha t) - \operatorname{sen}(x-\alpha t)\right] = \dfrac{1}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha t\cos x$.

15. $u(x,t) = x + tx$.

17. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[e^{-(x+\alpha t)^2} + e^{-(x-\alpha t)^2} + \dfrac{\cos(x-\alpha t) - \cos(x+\alpha t)}{\alpha}\right]$.

21. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(k_n\alpha t) + b_n\operatorname{sen}(k_n\alpha t)\right]J_0(k_nr)$,
donde

$a_n = \dfrac{1}{c_n}\int_0^1 f(r)J_0(k_nr)r\,dr$,

y

$b_n = \dfrac{1}{\alpha k_nc_n}\int_0^1 g(r)J_0(k_nr)r\,dr$,

con

$c_n = \int_0^1 J_0^2(k_nr)r\,dr$.

Ejercicio 10.7, página 649

1. $u(x,y) = \dfrac{4\cos 6x\operatorname{senh}\left(6(y-1)\right)}{\operatorname{senh}(-6)} + \dfrac{\cos 7x\operatorname{senh}\left(7(y-1)\right)}{\operatorname{senh}(-7)}$.

3. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{sen}nx\operatorname{senh}(ny - n\pi)$, donde

$A_n = \dfrac{2}{\pi\operatorname{senh}(-n\pi)}\int_0^{\pi}f(x)\operatorname{sen}nx\,dx$.

5. $u(x,y) = \dfrac{\cos x\operatorname{senh}(y-1)}{\operatorname{senh}(-1)} - \dfrac{\cos 3x\operatorname{senh}(3y-3)}{\operatorname{senh}(-3)} + \dfrac{\cos 2x\operatorname{senh}2y}{\operatorname{senh}(2)}$.

7. $u(r,\theta) = \dfrac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2\pi 2^{2k-1}}\cos(2k+1)\theta$.

9. $u(r,\theta) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r}{a}\right)^n(a_n\cos n\theta + b_n\operatorname{sen}n\theta)$, donde

a_0 es arbitraria, y para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_n = \dfrac{a}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$,

$b_n = \dfrac{a}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\operatorname{sen}n\theta\,d\theta$.

11. $u(r,\theta) = \left(\dfrac{1}{3}r - \dfrac{4}{3}r^{-1}\right)\cos\theta + \left(\dfrac{2}{3}r - \dfrac{2}{3}r^{-1}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(-\dfrac{1}{255}r^4 + \dfrac{256}{255}r^{-4}\right)\operatorname{sen}4\theta$.

13. $u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$, donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta\ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

15. $u(r,\theta) = r^3 \operatorname{sen} 3\theta$.

17. $u(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n})\operatorname{sen} n\theta\right]$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta\ ,$$

$$b_0 = \frac{3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, d\theta\ ,$$

y para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n + b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\ ,$$

$$n3^{n-1}a_n - n3^{-n-1}b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\cos n\theta\, d\theta\ ,$$

y

$$c_n + d_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta\ ,$$

$$n3^{n-1}c_n - n3^{-n-1}d_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta\ .$$

21. $u(r,\theta,z) = [I_0(r)/I_0(\pi)]\operatorname{sen} z$.

23. (c) $\phi(x,y) = 2xy$.

CAPÍTULO 11

Ejercicio 11.2, página 671

1. $y = e^{-x}\cos 5x + ce^{-x}\operatorname{sen} 5x$, donde c es cualquier número real.

3. $y = ce^{2x}\operatorname{sen} 3x$, donde c es cualquier número real.

5. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - (1/3)\operatorname{sen} 2x$, donde c_1 y c_2 son números reales.

7. $y = -(1/2)\cos x + (1/2 + e^{\pi})\operatorname{sen} x + (1/2)e^x$.

9. No tiene solución.

11. $y = c \operatorname{sen}(\ln x) + 2x^{-1}$, donde c es cualquier número real.

13. $\lambda_n = (n + 1/2)^2\pi^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; y $y_n = c_n \operatorname{sen}[(n + 1/2)\pi x]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, donde las c_n son arbitrarias.

15. $\lambda_n = n^2 - 3$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; y $y_n = c_n \cos nx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, donde las c_n son arbitrarias.

17. $\lambda_0 = -\mu_0^2$, donde $\tanh(\mu_0\pi) = \mu_0/2$; y $y_0 = c_0\left(\cosh(\mu_0 x) - (2/\mu_0)\operatorname{senh}(\mu_0 x)\right)$ y $\lambda_n = \mu_n^2$, donde $\tan(\mu_n\pi) = \mu_n/2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; y $y_n = c_n(\cos(\mu_n x) - (2/\mu_n)\operatorname{sen}(\mu_n x))$, donde las c_n son arbitrarias.

19. $\lambda_n = (n + 1/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; y $y_n = c_n \cos[(n + 1/2)\ln x]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, donde las c_n son arbitrarias.

21. $\lambda_1 = -0.195$, $\lambda_2 = 1.932$, $\lambda_3 = 5.932$.

23. No hay soluciones no triviales.

25. λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tales que $(\lambda_n^2 + 1)\sqrt{\lambda_n} = n\pi$; y $y_n = c_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las c_n son arbitrarias.

27. $\lambda_n = -\mu_n^4$, $\mu_n > 0$ y $\cos \mu_n L \cdot \cosh \mu_n L = 1$; $y_n = c_n[(\cos \mu_n L - \cosh \mu_n L)(\operatorname{sen} \mu_n x - \operatorname{senh} \mu_n x) - (\operatorname{sen} \mu_n L - \operatorname{senh} \mu_n L)(\cos \mu_n x - \cosh \mu_n x)]$, $n = 1, 2, \ldots$, donde las c_n son arbitrarias.

29. $\gamma_n = -(n\pi/L)^4$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, y $y_n = \operatorname{sen}(n\pi/L)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las c_n son arbitrarias.

33. (b) $\lambda_n = n^2 + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, y $y_n = c_n e^{-x}\operatorname{sen} nx$, donde las c_n son arbitrarias.

35. $U_{m,n} = c_{n,m}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi n}{a}x\right)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi m}{b}y\right)$,

$$\alpha_{m,n}^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 , \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las $c_{n,m}$ son arbitrarias.

Ejercicio 11.3, página 682

1. $(e^{6x}y')' + \lambda e^{6x}y = 0$.

3. $\left((1-x)^2 y'\right)' + \lambda[(1-x)/x]y = 0$.

5. $(xy')' + \lambda y x^{-1} = 0$.

7. No es autoadjunto

9. Autoadjunto.

11. Autoadjunto.

17. $\phi_n = \sqrt{2}\operatorname{sen}[(n + 1/2)\pi x]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$x = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}[(n + 1/2)\pi x] .$$

19. $\phi_o = 1/\sqrt{\pi}$; $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$;

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx .$$

21. $\phi_0 = \gamma_0^{-1}[\cosh(\mu_0 x) - (2/\mu_0)\text{senh}(\mu_0 x)]$ y
$\phi_n = \gamma_n^{-1}[-(\mu_n/2)\cos(\mu_n x) + \text{sen}(\mu_n x)]$,
$n = 1, 2, 3, \ldots$, donde $\mu_0 = 2\tanh(\mu_0 x)$,
$\mu_n = 2\tan(\mu_n \pi)$,
$\gamma_0^2 = (4\mu_0^{-2} - 1)[(4\mu_0)^{-1}\text{senh}(2\mu_0\pi) - \pi/2]$, y
$\gamma_n^2 = (\mu_n^2/4)[\pi/2 + (4\mu_n)^{-1}\text{sen}(2\mu_n\pi)] - (1/2)\text{sen}^2(\mu_n\pi) + \pi/2 - (4\mu_n)^{-1}\text{sen}(2\mu_n\pi)$;
$\gamma_0{}^2[(\pi/\mu_0)\text{senh}(\mu_0\pi)(1 - 4/\mu_0) + \mu_0^{-2}][\cosh(\mu_0 x) - (2/\mu_0)\text{senh}(\mu_0 x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-2}[(\mu_n^{-2} - \pi/2)\text{sen}(\mu_n\pi) + \mu_n^{-1}(\pi - 1/2)\cos(\mu_n\pi) + (2/\mu_n)^{-1}][-(\mu_n/2)\cos(\mu_n x) + \text{sen}(\mu_n x)]$.

23. $\phi_n = \sqrt{2/\pi}\cos[(n + 1/2)\ln x]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;
$\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n e^{\pi}(n + 1/2) - 1}{1 + (n + 1/2)^2}\cos[(n + 1/2)\ln x]$.

Ejercicio 11.4, página 692

1. $L^+[y] = xy'' + x^2y' + (2x + 3)y$.
3. $L^+[y] = (1 + x^2)y'' + 2xy' + y$.
5. $L^+[y] = 2x^2y'' + 7xy' - 2y$.
7. $L^+[y] = y'' + 2y' + 10y$, donde $D(L^+) = \{v \text{ in } C^2[0, \pi]: v(0) = v(\pi) = 0\}$.
9. $L^+[y] = 2x^2y'' + 5xy'$, donde $D(L^+) = \{v \text{ in } C^2[1, 4]: v(1) = v(4) = 0\}$.
11. $y'' - 6y' + 10y = 0$; $6y(0) - y'(0) = 0$, $6y(\pi) - y'(\pi) = 0$.
13. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.
15. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y(1) - y'(1) = 0$, $y(e^{\pi}) - e^{\pi}y'(e^{\pi}) = 0$.
17. $\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)e^{-x}\text{sen}\,3x\,dx = 0$.
19. Tiene una única solución para cada h.
21. $\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)e^{3x}(\cos x + 3\,\text{sen}\,x)dx = 0$.
23. $\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\cos 2x\,dx = 0$ y $\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\text{sen}\,2x\,dx = 0$.
25. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} h(x)[\cos(\ln x) + \text{sen}(\ln x)]dx = 0$.

Ejercicio 11.5, página 698

1. $5\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x$. **3.** No tiene solución.
5. $C_1\cos x - (1/15)\cos 4x - (1/48)\cos 7x$, donde C_1 es arbitraria.
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32}{\pi(2n - 1)^3[1 - (n - 1/2)^2]}\text{sen}[(n - 1/2)x]$.
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{[1 - (n + 1/2)^2]}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos[(n + 1/2)x]$, donde $\displaystyle\gamma_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} f(x)\cos[(n + 1/2)x]dx$.
11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{[5 - (n + 1/2)^2]}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos[(n + 1/2)\ln x]$, donde $\displaystyle\gamma_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^{e^{\pi}} f(x)\cos[(n + 1/2)\ln x]dx$.
13. $\displaystyle\frac{\gamma_0}{6 - \lambda_0}\text{senh}(\mu_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{6 - \lambda_n}\text{sen}(\mu_n x)$,
donde $\gamma_0 = \dfrac{\int_0^{\pi} f(x)\text{senh}(\mu_0 x)dx}{\int_0^{\pi}\text{senh}^2(\mu_0 x)dx}$ y
$\gamma_n = \dfrac{\int_0^{\pi} f(x)\text{sen}(\mu_n x)dx}{\int_0^{\pi}\text{sen}^2(\mu_n x)dx}$;
μ_0 y μ_n satisfacen
$\tanh\mu_0\pi = \mu_0/3$, $\lambda_0 = -\mu_0^2$,
y
$\tan\mu_n\pi = \mu_n/3$, $\lambda_n = \mu_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ejercicio 11.6, página 706

1. $G(x, s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le x, \\ x, & x \le s \le \pi. \end{cases}$

3. $G(x, s) = \begin{cases} -\dfrac{s(x - 1 - \pi)}{1 + \pi}, & 0 \le s \le x, \\ -\dfrac{x(s - 1 - \pi)}{1 + \pi}, & x \le s \le \pi. \end{cases}$

5. $G(x, s) = \begin{cases} (\text{sen}\,2s\cos 2x)/2, & 0 \le s \le x, \\ (\text{sen}\,2x\cos 2s)/2, & x \le s \le \pi. \end{cases}$

7. $G(x, s) = \begin{cases} -(s^{-2} - s)(4x^{-2} + x)/15, & 1 \le s \le x, \\ -(x^{-2} - x)(4s^{-2} + s)/15, & x \le s \le 2. \end{cases}$

9. $G(x, s) = \begin{cases} -se^{-s}(xe^{-x} - e^{-x}), & 0 \le s \le x, \\ -xe^{-x}(se^{-s} - e^{-s}), & x \le s \le 1. \end{cases}$

11. $G(x, s) = \begin{cases} -s(x - \pi)/\pi, & 0 \le s \le x, \\ -x(s - \pi)/\pi, & x \le s \le \pi, \end{cases}$ y
$y = 1 - e^x - x/\pi + e^{\pi}x/\pi$.

13. $G(x,s)=\begin{cases}-s(x-1-\pi)/(1+\pi)\ , & 0\le s\le x\ ,\\ -x(s-1-\pi)/(1+\pi)\ , & x\le s\le \pi\ ,\end{cases}$
y $y=-x^3/6+(3\pi^2+\pi^3)x/(6+6\pi)$.

15. $G(x,s)=\begin{cases}-\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(x-1)/(\operatorname{sen}1)\ , & 0\le s\le x\ ,\\ -\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(s-1)/(\operatorname{sen}1)\ , & x\le s\le 1\ ,\end{cases}$
y $y=[\operatorname{sen}1+\operatorname{sen}(x-1)-\operatorname{sen}x]/(\operatorname{sen}1)$.

17. $G(x,s)=$
$\begin{cases}(e^s-e^{-s})(e^x-e^{2-x})/(2-2e^2)\ , & 0\le s\le x\ ,\\ (e^x-e^{-x})(e^s-e^{2-s})/(2-2e^2)\ , & x\le s\le 1\ ,\end{cases}$
y
$$y=-x+\frac{\operatorname{senh}x}{\operatorname{senh}1}=-x+\frac{e^{x+1}-e^{1-x}}{e^2-1}\ .$$

19. $G(x,s)=$
$\begin{cases}-(s^2-s^{-2})(x^2-16x^{-2})/60\ , & 1\le s\le x\ ,\\ -(x^2-x^{-2})(s^2-16s^{-2})/60\ , & x\le s\le 2\ ,\end{cases}$
y
$y=[16x^2\ln 2-16x^{-2}\ln 2-15x^2\ln x]/60$.

21. $G(x,s)=\begin{cases}-s(x-1)\ , & 0\le s\le x\ ,\\ -x(s-1)\ , & x\le s\le 1\ ,\end{cases}$ y
$$y=\alpha+(\beta-\alpha)x-x\int_0^1 sf(s)ds+\int_0^x sf(s)ds+x\int_x^1 f(s)ds\ .$$

23. **(a)** $K(x,s)=$
$\begin{cases}-(e^{-s}-e^{-2s})(e^{-x}-e^{1-2x})/[(e-1)e^{-3s}]\ , & 0\le s\le x\ ,\\ -(e^{-x}-e^{-2x})(e^{-s}-e^{1-2s})/[(e-1)e^{-3s}]\ , & x\le s\le 1\ .\end{cases}$

(b) $y=(1/4)(3-e^2)e^{-x}/(e-1)+(1/4)e(e-3)e^{-2x}/(e-1)-(1/2)x+(3/4)$.

25. **(a)** $K(x,s)=\begin{cases}-x(2-x)(s^{-3}-s^{-2})\ , & 1\le s\le x\ ,\\ -x(1-x)(2s^{-3}-s^{-2})\ , & x\le s\le 2\ .\end{cases}$

(b) $y=x^2\ln 2-x\ln x-x\ln 2$.

27. $H(x,s)=$
$\begin{cases}-[(x^3/2-\pi x^2)/\pi^2+x/2]s^2-[(-x^3/3+\pi x^2/2)/\pi^3-1/6]s^3\ , & 0\le s\le x\ ,\\ -[(s^3/2-\pi s^2)/\pi^2+s/2]x^2-[(-s^3/3+\pi s^2/2)/\pi^3-1/6]x^3\ , & x\le s\le \pi\ .\end{cases}$

29. $H(x,s)=\begin{cases}s^2(s-3x)/6\ , & 0\le s\le x\ .\\ x^2(x-3s)/6\ , & x\le s\le \pi\ .\end{cases}$

Ejercicio 11.7, página 715

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_nJ_2(\alpha_{2n}x)$, donde $\{\alpha_{2n}\}$ es la sucesión creciente de ceros reales de J_2 y
$$b_n=\frac{\int_0^1 f(x)J_2(\alpha_{2n}x)dx}{(\mu-\alpha_{2n}^2)\int_0^1 J_2^2(\alpha_{2n}x)x\,dx}\ .$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_nJ_0(\alpha_{1n}x)$, donde $\{\alpha_{1n}\}$ es la sucesión creciente de ceros reales de J_0', que también son los ceros de J_1, y
$$a_n=\frac{\int_0^1 f(x)J_0(\alpha_{1n}x)dx}{(\mu-\alpha_{1n}^2)\int_0^1 J_0^2(\alpha_{1n}x)x\,dx}\ .$$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}P_{2n+1}(x)$, donde
$$a_{2n+1}=\frac{\int_0^1 f(x)P_{2n+1}(x)dx}{[\mu-(2n+1)(2n+2)]\int_0^1 P_{2n+1}^2(x)dx}\ .$$

15. **(c)** $\sum_{n=0}^{\infty} a_nT_n(x)$, donde
$$a_n=\frac{\int_{-1}^1 f(x)T_n(x)dx}{(\mu-n^2)\int_{-1}^1 T_n^2(x)(1-x^2)^{-1/2}dx}\ .$$

Ejercicio 11.8, página 725

1. $\phi(x)\equiv 0$. **9.** $\pi/2$.
11. Entre $\pi\sqrt{1/(\lambda+1)}$ y $\pi\sqrt{6/(\lambda+e^{-5})}$.

Problemas de repaso, página 729

1. **(a)** $\lambda_n=9+n^2\pi^2$, $n=1,2,3,\ldots$; y
$y_n=c_ne^{-3x}\operatorname{sen}(n\pi x)$, $n=1,2,3,\ldots$,
donde c_n es cualquier número real.
(b) $\lambda_n=\mu_n^2$, $n=1,2,3,\ldots$, donde
$\tan\mu_n\pi=-2\mu_n$; y $y_n=c_n \operatorname{sen}\mu_nx$,
$n=1,2,3,\ldots$, donde c_n es cualquier número real.

3. **(a)** $\lambda_n=(n-1/2)^2$, $n=1,2,3,\ldots$, y
$y_n=\sqrt{2/\pi}\cos[(n-1/2)x]$, $n=1,2,3,\ldots$.
(b) $$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}(1-\pi)}{(n-1/2)}+\frac{1}{(n-1/2)^2}\right]\times\cos[(n-1/2)x]\ .$$

5. **(a)** $\int_0^{2\pi} h(x)e^{-3x}\operatorname{sen} 2x\,dx = 0$.

(b) $\int_1^2 h(x)dx = 0$.

7. **(a)** $G(x, s) = \begin{cases} s\ , & 0 \le s \le x\ , \\ x\ , & x \le s \le 1\ ; \end{cases}$

$y = x^3/6 + x^2/2 - 3x/2$.

(b) $G(x, s) = \begin{cases} -(e^s + e^{-s})(e^x - e^{2-x})/(2e^2 + 2)\ , \\ \qquad 0 \le s \le x\ , \\ -(e^x + e^{-x})(e^s - e^{2-s})/(2e^2 + 2)\ , \\ \qquad x \le s \le 1\ ; \end{cases}$

$y = 4(e^{1+x} + e^{1-x} - 1 - e^2)/(e^2 + 1)$.

9. π.

Índice

UNA TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$	$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$
1. $f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	**19.** $\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
2. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	**20.** $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
3. $f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	**21.** $t^{n-(1/2)}, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+(1/2)}}$
4. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)$	**22.** $t^r, \quad r > -1$	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$
	$- \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	**23.** sen bt	$\frac{b}{s^2+b^2}$
5. $t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$	**24.** cos bt	$\frac{s}{s^2+b^2}$
6. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	**25.** e^{at} sen bt	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
7. $\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$	**26.** e^{at} cos bt	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
8. $(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$	**27.** senh bt	$\frac{b}{s^2-b^2}$
9. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$	**28.** cosh bt	$\frac{s}{s^2-b^2}$
10. $f(t-a)u(t-a), \quad a \geq 0$	$e^{-as}F(s)$	**29.** sen $bt - bt$ cos bt	$\frac{2b^3}{(s^2+b^2)^2}$
11. $g(t)u(t-a), \quad a \geq 0$	$e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}(s)$	**30.** t sen bt	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
12. $u(t-a), \quad a \geq 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$	**31.** sen $bt + bt$ cos bt	$\frac{2bs^2}{(s^2+b^2)^2}$
13. $\delta(t-a), \quad a \geq 0$	e^{-as}	**32.** t cos bt	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
14. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	**33.** sen bt cosh bt − cos bt senh bt	$\frac{4b^3}{s^4+4b^4}$
15. $t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	**34.** sen bt senh bt	$\frac{2b^2s}{s^4+4b^4}$
16. $e^{at}t^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	**35.** senh bt − sen bt	$\frac{2b^3}{s^4-b^4}$
17. $e^{at} - e^{bt}$	$\frac{(a-b)}{(s-a)(s-b)}$	**36.** cosh bt − cos bt	$\frac{2b^2s}{s^4-b^4}$
18. $ae^{at} - be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	**37.** $J_\nu(bt)$	$\frac{(\sqrt{s^2+b^2}-s)^\nu}{b^\nu\sqrt{s^2+b^2}}, \quad \nu > -1$

TABLA 4.1 COEFICIENTES INDETERMINADOS PARA L[y](x) = g(x)

Tipo	$g(x)$	$y_p(x)$
(I)	$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$x^s P_n(x) = x^s\{A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0\}$†
(II)	$ae^{\alpha x}$	$x^s A e^{\alpha x}$
(III)	$a \cos \beta x + b \operatorname{sen} \beta x$	$x^s\{A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x\}$
(IV)	$p_n(x) e^{\alpha x}$	$x^s P_n(x) e^{\alpha x}$
(V)	$p_n(x) \cos \beta x + q_m(x) \operatorname{sen} \beta x$, donde $q_m(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$	$x^s\{P_N(x) \cos \beta x + Q_N(x) \operatorname{sen} \beta x\}$, donde $Q_N(x) = B_N x^N + \cdots + B_1 x + B_0$ y $N = \text{máx}(n, m)$
(VI)	$ae^{\alpha x} \cos \beta x + be^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$	$x^s\{Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\}$
(VII)	$p_n(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + q_m(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$	$x^s e^{\alpha x}\{P_N(x) \cos \beta x + Q_N(x) \operatorname{sen} \beta x\}$, donde $N = \text{máx}(n, m)$

El entero no negativo s se elige para que sea el entero más pequeño de tal forma que ningún término en la solución particular $y_p(x)$ sea una solución a la correspondiente ecuación homogénea $L[y](x) = 0$.

†$P_n(x)$ debe incluir todos sus términos aun cuando $P_n(x)$ tenga ciertos términos iguales a cero.

ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una solución general de la ecuación lineal de primer orden $dy/dx + P(x)y = Q(x)$ es

$$y(x) = [\mu(x)]^{-1}\left(\int \mu(x) Q(x)\, dx + C\right), \quad \text{donde} \quad \mu(x) = \exp\left(\int P(x)\, dx\right).$$

FÓRMULA DE REDUCCIÓN DE ORDEN

Dada una solución no trivial $f(x)$ de $y'' + py' + qy = 0$, una segunda solución linealmente independiente es

$$y(x) = f(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{[f(x)]^2}\, dx.$$

FÓRMULA DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Sí y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de $y'' + py' + qy = 0$, entonces una solución particular de $y'' + py' + qy = g$ es $y = \upsilon_1 y_1 + \upsilon_2 y_2$, donde

$$\upsilon_1(x) = \int \frac{-g(x) y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx, \qquad \upsilon_2(x) = \int \frac{g(x) y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx,$$

y $\quad W[y_1, y_2](x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x).$